Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

Литвинов Степан Викторович

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛИМЕРНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

1.4.7. Высокомолекулярные соединения

Диссертация
на соискание учёной степени доктора технических наук

Научный консультант
д. т. н., проф.
Б. М. Языев

Ростов–на–Дону — 2021

Оглавление

Введение **6**

1 Состояние вопроса. Основные соотношения статики неоднородных тел **13**

1.1 Состояние вопроса 13

1.2 Основные соотношения статики непрерывно неоднородных тел 19

1.2.1 Соотношения механики деформируемого твёрдого тела 19

1.2.2 Переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке 23

1.2.3 Основные уравнения метода конечных элементов и метода конечных разностей 23

1.2.3.1 Одномерный симплекс-элемент метода конечных элементов . . . 23

1.2.3.2 Двумерный симплекс-элемент метода конечных элементов 24

1.2.3.3 Аппроксимация функции методом конечных разностей 27

1.3 Выводы по главе 29

2 Методика определения реологических параметров полимеров на основе обработки опытных результатов **30**

2.1 Основные соотношения механики вязкоупругих материалов 30

2.1.1 Вязкоупругость 30

2.1.2 Основные уравнения в тензорной форме. Уравнение Максвелла-Гуревича . 35

2.1.3 О константах уравнения связи и понятие линеаризации уравнений высокоэластичности 39

2.1.4 Квазистатическое растяжение (сжатие) полимерных стержней 41

2.1.5 Релаксация напряжений в полимерах 44

2.2 Определение постоянных в уравнении связи 48

2.2.1 Методика определения постоянных в уравнении связи 48

2.2.2 Методика расчета задач с учётом высокоэластических деформаций материала 59

2.2.3 Анализ соответствия данных по полимерам в различных источниках 59

2.2.4 Лабораторные испытания по определению физико-механических параметров полимера 63

2.2.5 Определение физико-механических свойств полимера как функции нескольких факторов 64

2.3 Выводы по главе 69

3 Одномерные плоские задачи термовязкоупругости для неоднородных тел **70**

3.1 Определение постоянного во времени температурного поля 70

3.1.1 Решение с помощью метода конечных разностей 72

3.1.2 Решение с помощью метода конечных элементов 73

3.1.3 Сравнение результатов, полученных различными методами 75
3.2 Определение переменного во времени температурного поля 76
3.2.1 Решение с помощью метода конечных разностей 77
3.2.2 Решение с помощью метода конечных элементов 78
3.2.2.1 Аппроксимацию производной температуры по времени до составления выражения функционала 78
3.2.2.2 Аппроксимация производной температуры по времени после составления выражения функционала 80
3.2.3 Сравнение результатов, полученных различными методами 81
3.3 Определение напряжённо-деформированного состояния неоднородного полимерного цилиндра с учётом температурного нагружения и высокоэластических деформаций 81
3.3.1 Решение в напряжениях с помощью метода конечных разностей 82
3.3.2 Решение в перемещениях с помощью метода конечных элементов 86
3.3.2.1 Физические соотношения плоской задачи 86
3.3.2.2 Полная энергия системы 88
3.3.2.3 Получение матрицы жёсткости и вектора нагрузок КЭ 89
3.3.2.4 Граничные условия задачи 90
3.3.3 Решение типовых задач 91
3.4 Оптимизация процесса решения задач 100
3.4.1 Оптимизация интервала времени 100
3.4.2 Оптимизация определения центральной точки конечного элемента 101
3.5 Решение задач и анализ полученных данных 102
3.6 Выводы по главе 103

4 Моделирование напряжённо–деформированного состояния тел под воздействием физических полей 106
4.1 Влияние на напряжённо–деформированное состояние полимера ионизирующего излучения и добавок 106
4.1.1 Определение упругих и реологических постоянных ПЭВП 106
4.1.2 Задача релаксации напряжений 109
4.2 Оптимизация толстостенных полимерных цилиндров путем искусственного создания неоднородности 114
4.2.1 Постановка задачи 114
4.2.2 Решение модельных задач 115
4.3 Практический расчёт определения напряжённо–деформированного состояния изделия с учётом ионизирующего излучения и добавок 124
4.4 Построение модели равнопрочного толстостенного полимерного цилиндра при силовых и температурных воздействиях 135

4.5 Моделирование равновесия толстостенной железобетонной оболочки, находящейся в условиях температурного и радиационного нагружений 138
4.5.1 Формулировка модели краевой задачи термоупругости при двумерной неоднородности материала 139
4.5.2 Аппроксимация краевой задачи термоупругости вариационно-разностным методом (ВРМ) 140
4.5.3 Методика решения разностных уравнений 144
4.5.4 Деформации и напряжения в железобетонных конструкциях, вызванные радиационным нагружением 146
4.5.5 Решение модельных задач 147
4.5.6 Решение задачи теплопроводности и ионизации 148
4.5.7 Аналитическое решение 151
4.5.8 Численное решение 152
4.5.9 Напряжённо–деформированное состояние радиационно–теплового экрана . 154
4.6 Выводы по главе 164

5 Задачи термовязкоупругости в осесимметричной двумерной постановке 165
5.1 Разрешающие соотношения в осесимметричной двумерной постановке 165
5.1.1 Получение аппроксимирующей функции формы прямоугольного конечного элемента 165
5.1.2 Определение температурного поля 168
5.1.3 Определение напряжённо-деформированного состояния 173
5.1.4 Проверка достоверности полученного решения 176
5.2 Определение напряжённо–деформированного состояния полимерного цилиндра, находящимся под воздействием переменного температурного поля 183
5.2.1 Постановка задачи 183
5.2.2 Анализ результатов расчёта 185
5.3 Выводы по главе 186

6 Расчёт адгезионного соединения 199
6.1 Метод пограничного слоя для решения задачи о длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве 199
6.1.1 Постановка задачи 199
6.1.2 Вывод разрешающих уравнений 201
6.1.3 Методика расчёта 204
6.1.4 Результаты и обсуждение 204
6.2 Решение задачи при помощи метода конечных элементов 209
6.3 Прочность адгезионного соединения при различных температурах 226
6.4 Экспериментальная апробация расчётной модели 227

6.5 Выводы по главе 235

Заключение **236**

Библиографический список **238**

Приложения **257**

А Условные обозначения и основные математические операции **258**

А.1 Условные обозначения 258

А.2 Дифференцирование матричных соотношений 258

А.3 Значения коэффициентов выражений (5.21) и (5.22) 260

Б Код модулей к программных комплексам MatLab и Octave **271**

Б.1 Код модуля определения НДС полимерного диска из главы 4 271

В Свидетельства регистрации программ ЭВМ **280**

Г Внедрения результатов работы **285**

Введение

Несмотря на широкое распространение полимерных материалов, они имеют ряд особенностей, накладывающих ряд серьёзных ограничений на возможную сферу их применения. В отличие от подавляющего большинства «классических» материалов, используемых во многих отраслях: строительство, машиностроение, авиастроение и т. д. — полимерные материалы обладают особенностями, которыми никоим образом нельзя пренебрегать.

Во–первых, это сильная зависимость физико–механических параметров (упругих и реологических) полимера от многочисленных факторов, основным из которых является температура. Так, физико–механические параметры некоторых полимеров при изменении температуры в пределах нескольких десятков градусов меняют свои значения в несколько раз. Особенно это становится заметно, если температурные режимы находятся в относительной близости к температуре стеклования полимера. Таким образом, необходимо максимально точно определять физико–механические параметры полимера. Ситуация осложняется тем, что существующие и используемые до настоящего времени методики весьма сложны и громоздки.

Во–вторых, — выраженная реология полимеров. Это свойство может играть как положительную роль — процесс релаксации напряжений в полимерной конструкции за счёт высокоэластических деформаций, так и отрицательную — рост напряжений за счёт этих же деформаций, которые могут в разы превышать упругие деформации.

Для математического моделирования в программных комплексах работы конструкций из полимерных материалов необходимо использовать уравнения связи напряжения–деформации, максимально точно описывающие реологические процессы, протекающие в полимере. В подавляющем большинстве современных вычислительных программных комплексов используют уравнения связи слишком простого вида: линейные, степенные, логарифмические, соответствующие реальному поведению полимера лишь в очень узком диапазоне. Для полноценного описания этих процессов необходимо прибегать к нелинейным уравнениям.

Решением поставленных задач возлагается на механику полимеров, представленную рядом научных подходов. Так, научная специальность «Высокомолекулярные соединения» исследует физические состояния и фазовые переходы в высокомолекулярных соединениях, а также реологию полимеров и композитов. При этом раздел механики деформируемого твёрдого тела оперирует необходимыми уравнениями механики тела, разрабатывает математические подходы решения поставленных задач и исследует вопросы механика композиционных и интеллектуальных материалов и конструкций, а также вопросы теория пластичности и ползучести. Таким образом, необходим комплексный подход для определения свойств полимерных материалов и их последующего расчета.

Существует множество программных комплексов, основанных, как правило, на методе конечных элементов, являющимися актуальными и в настоящее время, поскольку позволяют производить расчёт конструкций с учётом реальных свойств материала, возникающих в различных условиях.

Одним из ключевых свойств является именно неоднородность материала (технологическая, естественная и т. д.), которая может возникать за счёт множества факторов: физические поля, добавки в материал изделия, процесс изготовления, обработки и эксплуатации отдельных элементов конструкции или изделия в целом.

Оценить влияние неоднородности на изменение напряжённо–деформированного состояния тела возможно путём сопоставления результатов, полученных двумя методами: аналитическим, при некотором упрощении исходных задач, с численным, максимально приближенным к постановке задачи в реальной жизни. Данное сопоставление позволяет оценить пределы применимости аналитического решения, которое может оказаться во многих ситуациях более удобным в инженерных расчётах. И наоборот, появляется возможность оценить различные зависимости распределения неоднородности в теле на напряжённо–деформированное состояние и дать рекомендации о переходе к большим упрощающим постановкам при решении определённых классов задач.

При исследовании неоднородных задач, принято разделять неоднородность на три вида: непрерывная, кусочно однородная и стохастическая. Соответственно и функции, связанные с вышеперечисленными видами неоднородности, имеют те же самые названия. Ситуацию осложняет то, что для каждого из трёх видов неоднородности в итоге разрешающие уравнения и методы их решения имеют мало общего, что порождает три самостоятельных класса задач механики неоднородных тел. Решение задач с неоднородностью первого вида производится при помощи решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; второго — сводится или в согласовании решении на границе участков, обладающими некоторой однородностью, или при помощи осреднения тепловых, физико–механических параметров и т. д.; решение задач с неоднородностью третьего вида сопряжено с привлечением аппарат математической статистики.

Настоящая диссертационная работа основана на задачах с неоднородностью первого вида, при которых функции распределения физико–механических параметров материала является непрерывной функцией, при этом в каждом бесконечно малом объёме исследуемых тел выполняются «классические» законы теории упругости, пластичности и ползучести. Неоднородность первого вида может возникать по многочисленным причинам, но в случае полимерных тел это, как правило, наличие температурного поля, наличие добавок в материале, наличие ионизирующего облучения и т. д., а также различные причины, порождающие их: механическая обработка изделия, получение полимерных изделий в процессе сушки или из экструдера, стерилизация медицинского оборудования из полимеров при помощи радиации и т. д. Однако, необходимо отметить, что подавляющее большинство задач решается при помощи метода конечных элементов, в результате чего значения физико–механических параметров усредняются по выбранному конечному элементу — присутствуют элементы неоднородности второго вида при аппроксимации непрерывных функций, описывающих закон распределения неоднородности применительно к МКЭ.

Зачастую бывает сложно определить функцию, описывающие физико–механические характеристики материала, особенно полимеров, поскольку необходимо учитывать не только упругие, мгновенные, параметры, но и высокоэластические. Следовательно, перед исследователями стоит достаточно острый вопрос определения функциональной зависимости указанных параметров.

Таким образом, исследование новых и совершенствование существующих методов расчёта конструкций из полимерных материалов на прочность, деформативность, долговечность, с учётом множества факторов, влияющих на упругие и реологические параметры полимеров (температура, наличие различных добавок, наличие приводящего к деструкции или сшиванию молекул полимера ионизирующего излучения и т. д.), *является актуальным.*

Необходимо отметить, что приведенные в диссертации методы математического моделирования конструкций из полимеров в полной степени относятся именно к гомогенным материалам, а также гетерогенным, неоднородность которых вызвана физическими полями (к примеру, температурой); в меньшей — к гетерогенным в случае рассмотрения армированных полимеров в виду их структурной неоднородности. Примером подобного расчёта будет расчёт толстостенной железобетонной оболочки, находящейся в условиях температурного и радиационного нагружений.

Для изучения вопросов напряжённо–деформированного состояния полимерных тел, в диссертации используется аппарат механики полимеров, определяющие зависимости высокоэластических параметров. На основании результатов литературного обзора установили, что вопросам исследования жёстких сетчатых полимеров посвящено довольно мало работ. Подобная ситуация обстоит и с работами по вопросам изучения и развития методов расчёта конструкций и их элементов из гомогенных и армированных полимеров в различных диапазонах температур и напряжений. Практически полностью отсутствуют, как среди отечественных, так и среди зарубежных, работ исследования механики армированных полимеров, учитывающие зависимость релаксационных свойств от температуры; приведение полных систем уравнений механики подобных армированных полимеров, а также алгоритм их использования для решения прочностных задач.

Имеющиеся труды ориентированы, как правило, на теоретические исследования с применением линеаризованных физических соотношений, которые не всегда позволяют полноценною описать работу полимера в заданных условия эксплуатации. Для решения подобных задач по описанию напряженно–деформированного состояния в полимерах, максимально соответствующего реальным материалам, необходимо использовать нелинейные физические соотношения. Эти соотношения были получены феноменологически, т. е. было произведено некоторое обобщение линейных соотношений, в трудах М. И. Розовского [1], А. А. Ильюшина с коллегами [2], А. К. Малмейстером [3] и др. Однако при более общем и строгом методе исследований необходимо использовать физическую теорию, в основе которой лежат изыскания в области молекулярной природы деформации рассматриваемых сред.

Если же говорить о вопросах практического использования полимеров, к примеру, в качестве материала для изготовления труб, то проблемы исследования их напряжённо–деформированного состояния изложили А. Л. Якобсен, В. С. Ромейко, А. Н. Шестопал, А. А. Персион, J. Hessel и др. Проблемы изучения и расчёта конструкций и их элементов из полимерных материалов связаны с особенностями поведения материала при деформировании и, как говорилось ранее, существенной функцией их физико–механических параметров от температуры. Так, термопласты могут претерпевать упругие деформации до значений 0.1–0.2 при температурах в диапазоне от 0 до +95 °C. Это явление рассматривали такие учёные, как Э. Л. Калиничев, Е. И. Каменев, Г. Д. Мясников, М. Б. Саковцев, М. П. Платонов и др. При этом исследований влияния нелинейных свойств полимерных материалов на напряжённо–деформированное состояние конструкций в осесимметричной постановке практически не проводили.

Исследование элементов конструкций из полимерных материалов (J. M. Hill, C. A. Martins, A. M. Milan, C. P. Pesce, R. Ramos, В. И. Андреев, А. А. Аскадский, Г. М. Бартенев, Д. Ф. Коган, М. Н. Попов, А. Л. Рабинович, Р. А. Турусов и др.) показало, что деформативные и прочностные свойства термопластов (поливинилхлорид, полиэтилен, полипропилен и др.) могут меняться в разы в пределах нормативных эксплуатационных температур (от 0 до +80 °C).

С учётом того, что физико–механические параметры полимеров сильно зависят от температуры, необходимо весьма точно определять распределение температурного поля в конструкциях и их элементах. Однако в подавляющем большинстве существующих работ принимали упрощённый закон распределения температуры, к примеру, логарифмический, справедливый только в статичных задачах, не учитывающих изменение температурного поля во времени.

Цель работы — комплексная оптимизация определения напряжённо–деформированного состояния гомогенных и гетерогенных систем сетчатых и линейных полимеров, а также иных материалов, как при статических нагрузках, так и при воздействии физических полей, разработке методов, алгоритмов и расчётных модулей для ЭВМ и решении на их основе задач, имеющих важное практическое применение.

Задачи работы:

1. Проведение анализа современного состояния и тенденций развития данной проблемы в Российской Федерации и за рубежом.
2. Выбор методических вопросов определения зависимостей, аппроксимирующих реальные законы изменения механических характеристик тел и функций нагрузок.
3. Разработка методики определения функциональной зависимости физико–механических параметров полимера в зависимости от множества факторов: температуры, ионизирующего излучения, а также от наличия добавок.
4. Апробация достоверности решения плоских осесимметричных задач для полимера путём решения их несколькими методами (МКР и МКЭ) с последующим анализом и сопоставлением результатов.

5. Разработка 4–узлового конечного элемента, описывающего работу полимерных конструкций с учётом термовязкоупругости и апробация достоверности решения с использованием полученного 4–узлового КЭ. Сравнение с другими вариантами узлового моделирования конечного элемента.

6. Расчёт адгезионного соединения с течением времени (длительная прочность) с использованием нелинеаризованной и линеаризованной теорий и сопоставлением решений с другими авторами и их моделями.

Научная новизна работы заключается в следующих основных результатах, выносимых на защиту:

1. Предложена методика определения физико–механических параметров полимера, входящих в нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича, на основе кривых релаксации материала как функции от нескольких факторов.

2. Проведено численное моделирование напряжённого состояния модельного математического объекта по промежуточным значениям полученных физико–механических параметров, как функций нескольких переменных.

3. Проведён анализ влияния модифицированных упругих и реологических свойств полимера (введение добавок и воздействие ионизирующего излучения) на напряжённое состояние соответствующего элемента конструкции в осесимметричной постановке.

4. Разработана на основе МКЭ и получены матрица жёсткости и вектор сил для прямоугольного конечного элемента, учитывающие при помощи непосредственного интегрирования заданной функции формы как температурные составляющие, так и составляющие высокоэластических деформаций с соответствующим спектром времён релаксации.

5. Проведено исследование напряжённо–деформированного состояния полимерного тела с комплексным подходом по оптимизации математической модели (получение нового конечного элемента и вектора нагрузок, конечно–элементной сетки, переменного шага времени и т. д.).

6. Выполнен расчёт на длительную прочность при нормальном отрыве адгезионного соединения путём прямого моделирования двумерными конечными элементами вместо «классического» использования модели пограничного слоя.

7. Разработка на основе предложенных результатов алгоритма и его реализация в виде пакета прикладных программ для ЭВМ задачи определения НДС неоднородных тел с учётом действия механических нагрузок и физических полей.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что

— Предложен комплексный подход по оптимизации математической модели определения напряжённо–деформированного состояния полимерных тел.

— Проведено исследование ползучести толстостенного цилиндрического полимерного тела с учётом влияния физических полей и наличия добавок на упругие и высокоэластические параметры материала и их спектров времён релаксации как функции нескольких переменных.

Практическое значение работы:

1. На основании проведённых исследований в программном комплексе MatLab представлен комплект модулей для определения напряжённо–деформированного состояния полимерных тел в осесимметричной постановке.

2. Получены матрица жёсткости и вектор нагрузок двумерного конечного элемента численно–аналитическим методом, включающие в себя температурные компоненты и компоненты, отвечающие за высокоэластические деформации.

3. Представлена методика определения физико–механических параметров полимера по одним только кривым релаксации, что позволяет получить необходимые упругие и реологические данные максимально быстро.

4. На основании решения модельных задач показано, что значительные отличия в поведении релаксационных свойств материала незначительно сказываются на изменении напряжённо–деформированного состояния идентичных полимерных тел.

5. Решена практически важная задача определения НДС в полимерном цилиндре при его выходе из экструдера. Решена задача определения температурного поля с учетом охлаждения тела от контакта с окружающей средой, возникновением косвенной неоднородности материала и, как следствие, изменение НДС.

6. Решена практически важная задача определения длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве. Представлено существенное различие между результатами, полученными ранее другими авторами, и результатами, представленными в настоящей диссертационной работе.

7. Показано, что изменение температуры адгезионного соединения не существенно влияет на прочность этого соединения, а значительно сказывается на времени, когда достигаются максимальные напряжения и заканчивается процесс их релаксации.

Методология и методы исследования. Исследования проведены при помощи аналитических, численных и численно–аналитических методов. Непосредственная задача определения напряжённо–деформированного состояния полимерных тел производилось при помощи метода конечных элементов с применением программного комплекса MatLab. Для оценки достоверности результатов также использовали метод конечных разностей.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методика комплексной оптимизации математических моделей полимерных тел (оптимизация шага времени, оптимизация соотношения размеров сторон конечного элемента и т. д.).

2. Модифицированная матрица жёсткости и вектор нагрузок прямоугольного конечного элемента с учётом температурных и реологических составляющих, полученные численно–аналитическим методом.

3. Результаты решения тестовых задач для различных полимеров, где оценивается эффективность проведённых оптимизационных процессов.

4. Результаты оценки длительной прочности адгезионного соединения на нормальный отрыв, полученные методом конечных элементов.

5. Методика оценки длительной прочности адгезионного соединения при различных температурных режимах.

6. Результаты оценки напряженного состояния цилиндрических объектов с учётом изменения физико–механических параметров полимера.

7. Результаты сопоставления напряжённо–деформированного состояния адгезива, полученные при помощи нелинейных и линеаризованных выражений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

— проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений;

— сравнением полученных результатов с известными решениями других авторов;

— применением нескольких методов к решению одной задачи с последующим сопоставлением результатов.

Необходимо отметить, что предложенные методики расчёта полимерных тел справедливы и для иных материалов. Так, в работе приводится задача определения бетонного тела под действием физических полей с учётом изменения его физико-механических характеристик.

Апробация работы. Основные моменты работы отражены в печатных и электронных публикациях [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29], материалах конференций (Новые полимерные композиционные материалы: материалы III, IV, V, VIII, XIII—XVI международных научно–практических конференций, КБГУ, Нальчик, Строительство–2007, 2009, 2011–2015, РГСУ, Ростов–на–Дону, Современные строительные материалы, технологии и конструкции: материалы Международной научно–практической конференции, посвященной 95–летия ФГБОУ ВПО ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщикова) [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37], XIII Международной научной конференции по архитектуре и конструкциям (Сингапур, 2020 г.) [38], а также в изданиях, входящих в базы SCOPUS или Web of Science [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54].

Внедрение результатов работы. Имеются 5 свидетельств о регистрации программ ЭВМ [55, 56, 57, 58, 59] (см. страницы 280–284).

Структура и объём работы. Работа состоит из введения, шести глав, основных выводов, библиографического списка и трёх приложений. Изложена на 289 страницах машинописного текста и содержит 124 рисунка и 24 таблицы.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 80 печатных и электронных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК РФ — 39, в журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science — 20, в других периодических изданиях — 14, в монографиях — 4, получено 5 свидетельств о регистрации программы для ЭВМ, приравниваемые ВАК к публикациям в рецензируемых изданиях.

Глава 1. Состояние вопроса. Основные соотношения статики неоднородных тел

1.1 Состояние вопроса

В технике, в частности машиностроительной, наряду с использованием полимеров в качестве электро-, тепло-, звуко- и радиоизоляционных материалов, а также в качестве покрытий, защищающих несущие детали от различных агрессивных воздействий, большое значение приобретает использование их как конструкционных материалов в элементах силовых конструкций. При этом довольно давно изучают вопрос применения неармированных гомогенных (однородных) и практически изотропных полимеров в слабонагруженных элементах конструкций и деталях, например, трубы из полиэтилена высокой плотности, применяемые для переноса жидкостной массы при малых давлениях; полиамидные лопасти маломощных вентиляторов [60, 61, 62] и т. д.

В сильнонагруженных деталях, особенно там, где необходима высокая удельная прочность, например в корпусах судов и ракет из стеклопластиков [63, 64, 65], в штампах из дельта-древесины [66, 67] используют армированные полимеры, чаще всего анизотропные.

При этом разнообразные вещества способны выступать в роли армирующих элементов: в стеклопластиках — стеклянные волокна, в дельта-древесине — древесный шпон и т.д. Причём в настоящее время именно стеклопластики [65, 68, 69, 70, 71], а конкретнее — армированные стеклопластики [72, 73, 74, 75, 76, 77] обладают максимальными показателями прочностных и жёсткостных характеристик. Если отойти от классификации армированных полимеров с точки зрения механики [78, 79], то в большей мере свойства армирующих элементов, их ориентировка и объединяемые элементы в единую систему особенностями полимерных связей — определяют физико-механические свойства композитов.

Необходимо отметить особую роль связующих, некоторые особенности механического влияния высокомолекулярных соединений которых известны достаточно хорошо, по крайней мере качественно [80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90]. Характерной особенностью полимерных связующих являются значительные обратимые деформации, которые по фазе с напряжённым состоянием не совпадают, кроме того у них, связующих, имеется значительно бо́льшая, чем у тех же металлов, зависимость упругих и реологических параметров от многих факторов: длительность воздействия нагрузок, скорость развития деформаций, температура и существенная роль релаксационных процессов.

Современные конструкции не могут быть спроектированы и изготовлены без применения инженерных расчётов, в том числе и в виде пакетов прикладных программ на основе метода конечных элементов. В этом случае возможно создать конструкции, для изготовления которых рационально применять и гомогенные, и гетерогенные полимеры, в том числе и армированные. Однако эти программные комплексы обязательно нужно создавать на основе механики полимеров или учитывать её в специальных модулях, отвечающих за расчёт полимерных изделий. Будучи частью механики сплошных сред, для развития механики полимеров необходимо наличие полной системы уравнений, связывающих напряжённое и деформированное состояние среды, а также функциональную связь между ними.

Следовательно, необходимо решить вопросы трёх групп задач, необходимых для развития механики армированных полимеров:

Первая — получение на основе экспериментальных и теоретических изысканий данных о закономерностях деформаций жёстких полимеров, применяемых в качестве связующих. Также для них необходимо получить полную систему уравнений, установить возможности согласования с ними таких разделов наук, как теория упругости, пластичности и ползучести, сопротивление материалов и т. д. с последующей разработкой методов их решения.

Вторая — исследование совместной работы механической системы, состоящей из армирующих элементов и связующих полимеров. Необходимо определить критерии возможности рассмотрения этой гетерогенной системы как сплошной анизотропной или изотропной среды. Разработать методики прогнозирования свойств и характеристик армированных полимеров по известным свойствам слагаемых их компонентов.

Третья — комплексное исследование деформаций армированных полимеров с последующим определением полной системы уравнений и создание теорий прочности, которые дают возможность найти условия разрушения конструкций и их элементов, находящихся в сложном напряжённом состоянии, по данным простейших испытаний.

С точки зрения «целевой аудитории» задачи первой и третьей групп ориентированы на конструкторов и специалистов по расчёту конструкций; второй — на технологов, занимающихся созданием и изготовлением материалов с чётко заданными свойствами благодаря максимальному использованию потенциала и качеств отдельных компонентов.

Таким образом, всесторонний подход к решению полного объёма перечисленных задач требует длительного периода времени и значительные усилия многочисленных исследователей как теоретиков, так и экспериментаторов.

В периодической печати можно выделить работы по исследованию механических свойств полимеров, в том числе и армированных. Исследования свойств гомогенных изотропных полимеров изложены в монографиях Т. Алфрея [91], Л. Трелоара [92], А. Тобольского [90]. При этом подробное изуение совокупности свойств линейных полимеров проводил Ю. С. Лазуркин [85]. Однако в настоящее время существует относительно малое количество работ по исследованию жёстких сетчатых полимеров, и ещё меньше — по созданию общих методов расчёта гомогенных, а тем более армированных полимеров и конструктивных элементов из этих материалов при значительных изменениях уровня напряжений и температуры. Не удалось найти ни одной работы для решения поставленных задач при помощи полной системы уравнений механики армированных полимеров с учётом реальных релаксационных температурно-временных свойств этих материалов.

Существующие теоретические работы в основном созданы на базе линеаризованных физических соотношений, которые зачастую даже близко не описывают механическое поведение полимеров в реальных условиях. Стремление к максимально полному их описанию приводит к безальтернативному использованию нелинейных физических соотношений.

Ряд авторов (Ю. Н. Работнов [93], А. А. Ильюшин с сотрудниками [94], А. К. Малмейстер с сотрудниками [3]) получили подобные соотношения чисто феноменологически, путем формального обобщения линейных соотношений. Однако имеется и более строгий метод в использовании физической теории, основанный на исследовании молекулярной природы деформации рассматриваемых сред: А. Л. Рабинович [95, 96], А. А. Аскадский [83], Г. И. Гуревич [95, 97, 98, 99, 100]. Данный подход и используется в дальнейшем в диссертационной работе.

Представителями полимеров являются, с точки зрения химической природы, углеводороды, хлор- и фторпроизводные, эфиры, кислоты и т. д. Молекулы полимеров представляют собой длинные цепочки атомов. Подавляющее большинство полимеров делят на три класса [83]:

1. Карбоцепные полимеры –- атомы углерода слагают скелет макромолекулы полимера: полиэтилен, полипропилен, поливиниловый спирт и т. д. Фрагмент макромолекулы полиэтилена:

$$-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-;$$

2. Гетероцепные полимеры –- макромолекулы в основной цепи кроме атомов углерода содержат гетероатомы (азот, сера, кислород и т. д.): полиэфиры, полиуретаны, полиамиды и т.д. Фрагмент макромолекулы полиэтиленоксида:

$$-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_2-O-;$$

3. Высокомолекулярные соединения с сопряжённой системой связей: полинитрилы, полиацителены, полифенилены и т. д.

$$-CH=CH-CH=CH-CH=CH-.$$

Одним из главных свойств полимеров является величина молекулы, поэтому представляют большой интерес для изучения те реакции от действия ионизирующего излучения на полимеры, которые могут как разрушать их молекулы, так и укрупнять. В 1953 г. Чарльсби и Лаутон предложили классификацию полимеров в зависимости от их отношения к ионизирующему излучению: структурирующиеся, в которых образуются поперечные связи, и деструктурирующие, в которых происходит деструкция (разрыв молекул):

— Структурирующиеся

полиэтилен $$-\left[\begin{array}{ccccc} & H & & H & \\ & | & & | & \\ - & C & - & C & - \\ & | & & | & \\ & H & & H & \end{array}\right]_n -;$$

полиметилакрилат $$-\left[\begin{array}{ccccc} - & CH_2 & - & CH & - \\ & & & | & \\ & & & COOCH_3 & \end{array}\right]_n -;$$

поливинилхлорид $$-\left[\begin{array}{ccccc} & H & & H & \\ & | & & | & \\ - & C & - & C & - \\ & | & & | & \\ & H & & Cl & \end{array}\right]_n -;$$

— Деструктурирующие

полиметилметакрилат $$-\left[\begin{array}{ccccc} & & & CH_3 & \\ & & & | & \\ - & CH_2 & - & C & - \\ & & & | & \\ & & & COOCH_3 & \end{array}\right]_n -;$$

полиизобутилен $$-\left[\begin{array}{ccccc} & & & CH_3 & \\ & & & | & \\ - & CH_2 & - & C & - \\ & & & | & \\ & & & CH_3 & \end{array}\right]_n -;$$

поливинилденхлорид $$\begin{array}{c} \\ \\ -CH_2 - \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} Cl \\ | \\ C \\ | \\ Cl \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ - \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc} & & Cl & \\ & & | & \\ CH_2 & - & C & - \\ & & | & \\ & & Cl & \end{array}\right]_n \begin{array}{c} \\ \\ CH_2 - \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} Cl \\ | \\ C \\ | \\ Cl \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ -; \\ \\ \\ \end{array}$$

Следовательно, можно сделать вывод о связи изменения свойств полимера под действием излучения: деструктурируются полимеры, в которых рядом с атомом углерода атомы водорода заменены на иные группы; структурируются — когда каждый атом углерода цепи имеет хотя бы по одному атому водорода. Данная закономерность описывает поведение подавляющего большинства существующих полимеров.

Схему образования поперечных связей в полимере представили в 1958 году С. С. Медведев [101] с сотрудниками по мирному использованию атомной энергии на Женевской конференции, согласно которой на примере полиэтилена на первом этапе молекула теряет атом водорода

$$\ldots CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 \ldots \longrightarrow \ldots CH_2 - CH - CH_2 - CH_2 - \ldots + H,$$

который имеет избыток энергии, достаточный для отрыва другого, находящегося поблизости атома водорода

$$\begin{gathered}\ldots CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - \ldots + \ldots \dot{H} \ldots \\ \ldots CH_2 - \dot{C}H - CH_2 - CH_2 - \ldots CH_2 - \dot{C}H - CH_2 - CH_2 - \ldots \longrightarrow \\ \ldots H_2^+ \ldots CH_2 - \dot{C}H - CH_2 - CH_2 - \ldots\end{gathered}$$

Итогом является возникновение находящихся в непосредственной близости друг от друга двух высокомолекулярных свободных радикалов и выделение молекулы водорода. В дальнейшем происходит сшивание путём соединения свободных радикалов. При этом процесс может окончиться на первом этапе в случае выделения атома водорода без избытка энергии; тогда свободные радикалы могут существовать весьма значительное время.

Несмотря на то, что выход реакции сшивания относительно мал (порядка несколько молекул на 100 эВ), благодаря значительному размеру молекулы исходных полимеров достаточно небольшого числа связей для соединения молекул полимера в единую сетку, образующую гигантскую молекулу. Естественно, данный процесс сшивания приводит к изменению свойств полимеров.

Первое изменение влияет на растворимость полимера. Довольно много растворителей может растворять несшитый полимер вследствие относительно лёгкого разъединения полимерных цепей молекулами растворителей. Данный процесс перехода молекул полимера в раствор затрудняется при росте числа поперечных связей, при этом он прекращается, начиная с некоторого момента, определяемого дозами ионизирующего облучения, в зависимости от молекулярного веса полимера. Таким образом, возможно приблизительно оценить дозу, полученную раствором. Так, облучённые дозой 10^{19}–10^{20} эВ/г образцы полиэтилена полностью растворяются в горячем толуоле, как и необлучённые. Увеличение интенсивности облучения приводит к образованию некоторого нерастворённого материала, количество которого растёт пропорционально дозе облучения до некоторого момента, когда начинает увеличиваться вес образцов облучённого полимера после выдерживания, т. е. полимер набухает. При этом свободные несшитые участки между молекулами полимера заполняются молекулами растворителя. Дальнейшее облучение полимера приводит к такому сгущению его сетки, что уровень набухания полимера резко падает.

Второе изменение свойств — это проявление существующей пространственной сетки полимера при его нагреве до расплавления. Так, при температуре свыше 105–115 °С необлучённый полимер представляет собой вязкую жидкость. В случае производства из этого полимера изделий они превращаются в бесформенную массу. Под действием излучения такой полимер приобретает свойство резины благодаря сшивке его молекул. В результате под действием механического нагружения исключается скольжение молекул полимера друг относительно друга благодаря поперечным связям. Так, при растяжении, подобно пружине, происходит распрямление отдельных звеньев сетки и наблюдается удлинение изделий из этого полимера вместо растекания. При исчезновении механического нагружения происходит восстановление прежней формы сетки. В случае её значительной густоты поведение полимера под действием внешнего нагружения может ухудшаться, т. к. исключается возможность распрямления отдельных звеньев и тогда даже при относительно небольшом механическом нагружении изделие теряет эластичность и способность к растяжению, оно становится хрупким.

В технике широко применяется процесс вулканизации, т. е. сшивание полимеров, при котором создаётся пространственная сетка. Для этого, как правило, используют химические методы, при которых вводят в полимер некоторые вещества (серу, органические перекисные соединения и т. д.) с последующим подогревом. Происходит связывание молекул полимера присоединением введённых веществ к двум соседним его молекулам. Данная реакция возможна только, если в составе молекул полимера имеются группы, способные реагировать с вулканизирующими веществами. При отсутствии подобных групп в полимере, например в полиэтилене, становится весьма затруднительно проводить вулканизацию химическими приёмами. В таком случае становится очевидным преимущество проведения радиационной вулканизации, применимой к весьма широкому кругу вулканизирующих материалов.

Таким образом, в настоящее время радиационная вулканизация находит применение в практике. Так, изделия из полиэтилена, задача которых работать в условиях повышенных температур, предварительно облучают. В 1959 году в США на одном из предприятий было произведено 400 тонн плёнки из облучённого полиэтилена. В результате при незначительных затратах, по сравнению с плёнкой из обычного полиэтилена, удалось добиться увеличения прочности плёнки в 5 раз, а способности к растяжению — в 2 раза. При этом подобные изделия из облучённого полиэтилена способны работать при температурных режимах до 250 °С. В. Л. Карпов [102] с сотрудниками предложили использовать облучённый полиэтилен для изготовления изоляции проводов, эксплуатируемых в условиях повышенной температуры. Если же сравнивать облучённый полиэтилен и необлучённый в условиях обычных температур, то сшитый полимер, по сравнению с обычным, обладает повышенной механической прочностью.

В мировой практике для использования в качестве заменителей костей биоактивный нанокерамический армированный полимер изучается с 1980-х годов [103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111]. Одним из главных показателей создаваемого материала для замены кости является его жёсткость. Так, на ремоделировании кости сказываются условия приложения усилий на саму кость; жёсткость импланта сказывается на переносимые с импланта усилия на кости [112, 113].

Для исключения возможности развития при использовании имплантов остеопороза необходимо использовать биосовместимые материалы, по свойствам сходным со свойствами естественной кости [114].

Как говорилось ранее, ПЭВП в медицине является одним из наиболее распространённых материалов в качестве заменителей костей и ортопедических протезов, при этом на возможность его применения сказываются реология, низкие модуль упругости и низкая биологическая активность. В работах [115, 116, 117, 118, 119] были предприняты попытки улучшения вышеуказанных свойств.

Для получения композитной полимерной матрицы можно использовать различные керамические наночастицы. Данную матрицу можно применять как альтернативу металлам для заменителей костей и ортопедических имплантов [115, 120, 121]. В качестве наполнителей используют различные виды керамических материалов таких, как углеродные нановолокна, наноглины и ГА [120, 121, 122]. ГА положительно сказывается на композитной жёсткости и биологической активности, в то время, как ПЭВП обеспечивает прочность. Вязкоупругое поведение ПЭВП легко описывается во времени под действием нагрузки и позволяет сделать прогноз о длительной прочности материала [120, 121, 122, 123, 124]. Таким образом, использование наночастиц ГА в качестве армирующих элементов полимерного материала благоприятно сказывается и на биологической активности, и на реологическом поведении ПЭВП.

Гамма-излучение представляет собой один из часто используемых способов стерилизации в медицине многих лекарственных препаратов, т. к. оно разлагает молекулы ДНК любых живых организмов. Типичная доза облучения составляет от 25 до 70 кГр [110, 125]. Особенностью данного процесса стерилизации является возможное изменение в молекулярной структуре полимера: гамма-излучение отрицательно влияет на плотность сцепления длинных молекулярных цепей, а также на концентрацию связывающих молекул. При этом стерилизация благоприятно сказывается на процессе сшивки и свойствах композита. Р. Кейн [126] с коллегами изучали влияния гидроксиаппатита (ГА) на поведение армированного полиэтилена высокой плотности, где предположили, что нитевидные ГА благоприятно сказываются на усталостную долговечность армированных полимеров.

1.2 Основные соотношения статики непрерывно неоднородных тел

1.2.1 Соотношения механики деформируемого твёрдого тела

Дифференциальные уравнения равновесия *(уравнения Навье)* в цилиндрической системе координат записываются так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ \dfrac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta = 0; \\ \dfrac{\partial\tau_{zr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{zr}}{r} + Z = 0, \end{cases}$$

где R, Θ, Z — объёмные силы.

Формулы Коши в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}; & \gamma_{r\theta} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\theta}; \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\theta} + \dfrac{u}{r}; & \gamma_{\theta z} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{rz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана в цилиндрической системе координат имеют вид [127]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}\right) - \dfrac{\partial\varepsilon_r}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial^2(r\gamma_{r_\theta})}{\partial r\,\partial\theta} = 0; \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial r^2} - 2\dfrac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial r\,\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varepsilon_z}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\gamma_{\theta z}}{\partial\theta} + \gamma_{rz}\right) = 0; \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta\,\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\gamma_{\theta z}}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2(r^2\gamma_{r\theta})}{\partial r\,\partial z} - \dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\dfrac{\gamma_{rz}}{r}\right) = 0; \\ r\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_r - \dfrac{\partial(r\varepsilon_\theta)}{\partial r}\right) - \dfrac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2(r\gamma_{\theta z})}{\partial r\,\partial\theta} + \dfrac{\partial^2(r\gamma_{r\theta})}{\partial\theta\,\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\left(\dfrac{\varepsilon_z}{r}\right) + \dfrac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r\dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\dfrac{\gamma_{\theta z}}{r}\right) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial\theta\,\partial z} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

В работе [128] отмечается, что в случае плоских осесимметричных задач в цилиндрических координатах удобнее пользоваться выражением, нежели системой уравнений (1.2). Продифференцируем ε_θ, входящее в уравнение Коши (1.1), по радиусу r:

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r\cdot\frac{\partial u}{\partial r} - u\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{u}{r} = \frac{\varepsilon_r}{r} - \frac{\varepsilon_\theta}{r}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0, \tag{1.3}$$

которое имеет более низкий порядок, чем уравнение, получающееся напрямую из системы (1.2).

Закон Гука в цилиндрических координатах записывается так:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_{el,r} + \varepsilon_{pl,r} + \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{\text{вын}}; & \gamma_{r\theta} = \gamma_{el,r\theta} + \gamma_{pl,r\theta} + \gamma_{cr,r\theta}; \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_{el,\theta} + \varepsilon_{pl,\theta} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{\text{вын}}; & \gamma_{\theta z} = \gamma_{el,\theta z} + \gamma_{pl,\theta z} + \gamma_{cr,\theta z}; \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{el,z} + \varepsilon_{pl,z} + \varepsilon_{cr,z} + \varepsilon_{\text{вын}}; & \gamma_{rz} = \gamma_{el,rz} + \gamma_{pl,rz} + \gamma_{cr,rz}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где ε_r, ε_θ, ε_z — полная относительная деформация; $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, γ_{rz} — полная угловая деформация; $\varepsilon_{el,\xi}$, $\gamma_{el,\zeta\xi}$ $(\zeta, \xi = r, \theta, z)$ — от англ. *elastic* — упругая линейная и угловая деформации; $\varepsilon_{pl,\xi}$, $\gamma_{pl,\zeta\xi}$ $(\xi = r, \theta, z)$ — от англ. *plastic* — пластическая линейная и угловая деформации; $\varepsilon_{cr,\xi}$, $\gamma_{el,\zeta\xi}$ $(\xi = r, \theta, z)$ — от англ. *creep* — деформации ползучести материала, линейная и угловая, представляющие собой, соответственно, высокоэластическую деформацию полимеров; $\varepsilon_{\text{вын}}$ — вынужденные деформации (температурное расширение, радиация, влагоупругость и т. д.);

$$\begin{cases} \varepsilon_{el,r} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right]; & \gamma_{el,r\theta} = \dfrac{\tau_{r\theta}}{G}; \\ \varepsilon_{el,\theta} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right]; & \gamma_{el,\theta z} = \dfrac{\tau_{\theta z}}{G}; \\ \varepsilon_{el,z} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right]; & \gamma_{el,rz} = \dfrac{\tau_{rz}}{G}. \end{cases}$$

При использовании численных методов часто удобно использовать *закон Гука в обратной форме*:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_{pl,r} - \varepsilon_{cr,r}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \sigma_\theta = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_{pl,\theta} - \varepsilon_{cr,\theta}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \sigma_z = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{pl,z} - \varepsilon_{cr,z}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \tau_{r\theta} = \left(\gamma_{r\theta} - \gamma_{pl,r\theta} - \gamma_{cr,r\theta}\right)G; \\ \tau_{\theta z} = \left(\gamma_{\theta z} - \gamma_{pl,\theta z} - \gamma_{cr,\theta z}\right)G; \\ \tau_{zr} = \left(\gamma_{zr} - \gamma_{pl,zr} - \gamma_{cr,zr}\right)G, \end{cases} \tag{1.5}$$

где

$$\theta_{pl} = \varepsilon_{pl,r} + \varepsilon_{pl,\theta} + \varepsilon_{pl,z}$$

— объёмная пластическая деформация;

$$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z}$$

— объёмная деформация ползучести;

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

— параметры Ламе.

Полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела П и работой внешних сил A:

$$Э = П - A. \tag{1.6}$$

Потенциальная энергия упругой деформации тела описывается выражением:

$$П = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,z} + \tau_{r\theta}\gamma_{el,r\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{el,\theta z} + \tau_{zr}\gamma_{el,zr}\right) \mathrm{d}V, \tag{1.7}$$

или в матричной форме:

$$П = \frac{1}{2}\int\limits_V \left\{\sigma\right\}^T \cdot \left\{\varepsilon_{el}\right\} \mathrm{d}V, \tag{1.8}$$

где $\left\{\sigma\right\}^T = \left\{\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{zr}\right\}$; $\left\{\varepsilon_{el}\right\} = \left\{\varepsilon_{el,r} \quad \varepsilon_{el,\theta} \quad \varepsilon_{el,z} \quad \gamma_{el,r\theta} \quad \gamma_{el,\theta z} \quad \gamma_{el,zr}\right\}^T$.

Работа внешних сил описывается выражением:

$$A = \int\limits_V (Ru + \Theta v + Zw)\, \mathrm{d}V + \int\limits_\Omega \left(\bar{R}u + \bar{\Theta}v + \bar{Z}w\right) \mathrm{d}\Omega, \tag{1.9}$$

где R, Θ, Z и $\bar{R}, \bar{\Theta}, \bar{Z}$ — представляют собой проекции на оси координат, соответственно, объёмных (массовых) сил и поверхностных нагрузок.

В общем виде уравнение теплопроводности записывается:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = q_T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.10}$$

при граничных условиях

$$T = T_\Gamma \quad \text{на} \quad \Gamma_1;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + Q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - T_0) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3,$$

и начальном условии: $T = T_*$ при $t = t_0$.

Выражение (1.10) для практических расчётов часто записывают в виде:

$$-\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + \beta T = f(r, \theta, z, t). \tag{1.11}$$

Здесь в выражениях (1.10) и (1.11): T — температура; $\varkappa = \dfrac{\lambda_T}{c_p \rho}$ — коэффициент температуропроводности материала; λ_T — коэффициент теплопроводности; c_p — изобарная теплоёмкость; ρ — плотность материала; q_T — удельная мощность источников теплоты, которая считается положительной, если теплота подводится к структуре; Q — поток теплоты на части границы Γ, который считается положительным, если теплота теряется структурой; α

— коэффициент теплообмена с окружающей средой температурой T_0; T_Γ — температура на части границы Γ; T_* — начальное распределение температуры; $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$ — полная граница многослойной области V; n — внешняя нормаль к границе Γ.

1.2.2 Переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке

Наиболее часто при расчёте физических полей приходится иметь дело с эллиптическими краевыми задачами следующего вида: необходимо определить функцию $u(\bar{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} u) + \beta u = f \tag{1.12}$$

с краевыми условиями

$$u(\bar{x})|_{\Gamma 1} = g(\bar{x}); \tag{1.13}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma 2} - \Theta = 0; \tag{1.14}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma 3} + \gamma\left(u|_{\Gamma 3} - p\right) = 0, \tag{1.15}$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

В трудах [129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136] приводится теорема, согласно которой решение задач (1.12)—(1.15) эквивалентно задаче минимизации выпуклого функционала: $u = \arg\min_v \operatorname{Im} v$, где

$$\operatorname{Im}(v) = \int\limits_{\Omega} \left[\alpha (\operatorname{grad} v)^2 + \beta v^2\right] d\Omega + \int\limits_{\Gamma 3} \gamma v^2 d\Gamma - 2\int\limits_{\Gamma 3} \gamma p v \, d\Gamma - 2\int\limits_{\Gamma 2} \Theta v \, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega} f v \, d\Omega. \tag{1.16}$$

1.2.3 Основные уравнения метода конечных элементов и метода конечных разностей

1.2.3.1 Одномерный симплекс-элемент метода конечных элементов

Рассматривается прямолинейный элемент (рисунок 1.1), с узлами i и j, координаты которых X_i и X_j. Длина элемента равна $L = X_j - X_i$. Узловые значения функции φ соответственно Φ_i и Φ_j. Изучается глобальная система координат, не связанная с элементом. Для аппроксимации функции ф используется полиномальная функция [137]

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x. \tag{1.17}$$

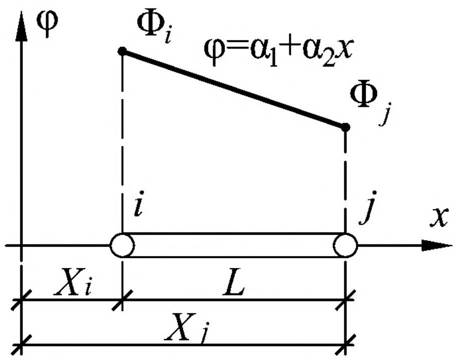


Рисунок 1.1 — Одномерный симплекс-элемент

Для определения коэффициентов α_1 и α_2 используются условия на концах элемента:

$$\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i$$

и

$$\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_j.$$

Результат решения системы двух уравнений

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i;$$
$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j$$

даёт значения коэффициентов:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \tag{1.18}$$

где $N_i = \dfrac{X_j - x}{X_j - X_i}$ и $N_j = \dfrac{x - X_i}{X_j - X_i}$ — интерполяционные функции (функции формы).

В практической работе соотношение (1.18) применяется в матричной форме:

$$\varphi = \left[N\right] \left\{\Phi\right\}, \tag{1.19}$$

где $\left[N\right] = \left[N_i \quad N_j\right]$ — матричная строка; $\left\{\Phi\right\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$ — вектор-столбец.

1.2.3.2 Двумерный симплекс-элемент метода конечных элементов

Используемый для всех дальнейших выкладок двумерный симплекс–элемент [137] представлен на рисунке 1.2. Элемент представляет собой треугольник без дополнительных внутренних узлов на прямолинейных сторонах. В дальнейшем нумерация узлов принята против часовой стрелки от произвольно выбираемого *i*-го узла.

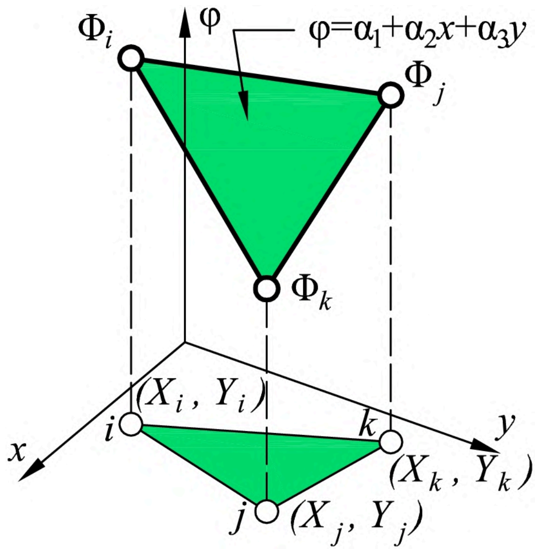


Рисунок 1.2 — Двумерный симплекс-элемент

Исследуемая функция φ принимает значения в узлах Φ_i, Φ_j и Φ_k, координаты которых — (X_i, Y_i), $\left(X_j, Y_j\right)$, (X_k, Y_k).

Интерполяционный полином принимается в виде:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{1.20}$$

Условия в узлах:

$$\begin{aligned}
&\varphi = \Phi_i && \text{при} && x = X_i, \quad y = Y_i;\\
&\varphi = \Phi_j && \text{при} && x = X_j, \quad y = Y_j;\\
&\varphi = \Phi_k && \text{при} && x = X_k, \quad y = Y_k.
\end{aligned}$$

С учётом приведённых условий в узлах выражение (1.20) можно представить в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}
\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i;\\
\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j;\\
\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k,
\end{cases} \tag{1.21}$$

в результате решения которой коэффициенты записываются как:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2A}\left[\left(X_j Y_k - X_k Y_j\right)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\,\Phi_j + \left(X_i Y_j - X_j Y_i\right)\Phi_k\right];\\
\alpha_2 &= \frac{1}{2A}\left[\left(Y_j - Y_k\right)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\,\Phi_j + \left(Y_i - Y_j\right)\Phi_k\right];\\
\alpha_3 &= \frac{1}{2A}\left[\left(X_k - X_j\right)\Phi_i + (X_i - X_k)\,\Phi_j + \left(X_j - X_i\right)\Phi_k\right].
\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что определитель системы уравнений (1.21) фактически представляет собой удвоенную площадь треугольника:

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = X_jY_k - X_kY_j + X_kY_i - X_iY_k + X_iY_j - X_jY_i = 2A.$$

Подставим полученные коэффициенты α_1, α_2 и α_3 в выражение (1.20), после чего произведём группировку коэффициентов перед узловыми значениями Φ_i, Φ_j и Φ_k:

$$\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k, \tag{1.22}$$

где

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_ix + c_iy\right] \quad \text{при} \quad \begin{cases} a_i = X_jY_k - X_kY_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A}\left[a_j + b_jx + c_jy\right] \quad \text{при} \quad \begin{cases} a_j = X_kY_i - X_iY_k, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k; \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left[a_k + b_kx + c_ky\right] \quad \text{при} \quad \begin{cases} a_k = X_iY_j - X_jY_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$$

Недостатком выбранного аппроксимирующего полинома (1.20) можно назвать то, что внутри треугольного элемента скалярная величина φ определяется линейными по x и y функциями формы. Следовательно, градиент φ в направлении осей x и y является величиной постоянной. Так, в направлении x градиент может быть представлен:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x}\Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x}\Phi_k,$$

но

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = b_\beta, \qquad \beta = i, j, k.$$

Таким образом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = b_i\Phi_i + b_j\Phi_j + b_k\Phi_k.$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = c_i\Phi_i + c_j\Phi_j + c_k\Phi_k.$$

Так как коэффициенты b_i, b_j, b_k, c_i, c_j и c_k фиксированы для заданных узловых координат, и значения функции в узлах Φ_i, Φ_j, Φ_k не зависят от координат пространства, то частные производные являются величинами постоянными. Таким образом, для аппроксимации быстро изменяющейся функции φ необходимо уменьшать размер конечного элемента.

1.2.3.3 Аппроксимация функции методом конечных разностей

Решение задач механики напрямую связано с использованием производной функции $y = f(x)$, которой называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Для численного дифференцирования [138, 139] функции $y = f(x)$ вводят на интервале $[a, b]$ равномерную сетку (рисунок 1.3). Неравномерная сетка не рассматривается, т. к. в диссертационной работе она не используется.

$$\omega_x = \left\{ x_i = a + (i-1)\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

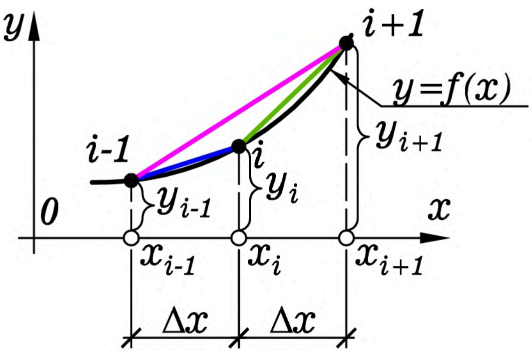


Рисунок 1.3 — Схема аппроксимации функции с помощью метода конечных разностей

Тогда для приближённое значение производной может быть получено из равенства

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для дальнейших расчётов будут использованы следующие способы определения производной в одной и той же точке:

$$\bigcirc\otimes \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}; \quad \Delta x = h; \quad y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h) \tag{1.23}$$

с помощью *левых разностей* (см. рисунок 1.3, синяя прямая);

$$\otimes\bigcirc \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta x = h; \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) \tag{1.24}$$

с помощью *правых разностей* (см. рисунок 1.3, зелёная прямая);

$$\bigcirc\times\bigcirc \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}; \quad \Delta x = h; \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \tag{1.25}$$

с помощью *центральных разностей* (рисунок 1.3, фиолетовая прямая).

Производные старших порядков можно определить комбинацией производных первого порядка (1.23) и (1.24), например

$$\bigcirc\otimes\bigcirc \qquad y_i'' = (y_i')' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2). \tag{1.26}$$

При практической аппроксимации функции $y = f(x)$ часто аппроксимация крайних точек i_1 и i_{N+1} по формулам (1.23) и (1.24) довольно неточна, в [139] приводятся выражения, позволяющие повысить точность аппроксимации:

— аппроксимация производных первого порядка в случае пяти узлов:

$$\begin{aligned}
y_1' &= \frac{-25y_1 + 48y_2 - 36y_3 + 16y_4 - 3y_4}{12h} + \frac{h^4}{5}y_*^V;\\
y_2' &= \frac{-3y_1 - 10y_2 + 18y_3 - 6y_4 + y_5}{12h} - \frac{h^4}{20}y_*^V;\\
y_3' &= \frac{y_1 - 8y_2 + 8y_4 - y_5}{12h} + \frac{h^4}{30}y_*^V;\\
y_4' &= \frac{-y_1 + 6y_2 - 18y_3 + 10y_4 + 3y_5}{12h} - \frac{h^4}{20}y_*^V;\\
y_5' &= \frac{3y_1 - 16y_2 + 36y_3 - 48y_4 + 25y_5}{12h} + \frac{h^4}{5}y_*^V,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

где y_*^V — значение производной пятого порядка в некоторой внутренней точке. Поскольку значение шага h мало, то слагаемыми, содержащими h^4, допускается пренебрегать в практических расчётах.

— аппроксимация производных второго порядка в случае пяти узлов:

$$\begin{aligned}
y_1'' &= \frac{35y_1 - 104y_2 + 114y_3 - 56y_4 + 11y_4}{12h^2} + O(h^3);\\
y_2'' &= \frac{11y_1 - 20y_2 + 6y_3 + 4y_4 - y_5}{12h^2} + O(h^3);\\
y_3'' &= \frac{-y_1 + 16y_2 - 30y_3 + 16y_4 - y_5}{12h^2} + O(h^4);\\
y_4'' &= \frac{-y_1 + 4y_2 + 6y_3 - 20y_4 + 11y_5}{12h^2} + O(h^3);\\
y_5'' &= \frac{11y_1 - 56y_2 + 114y_3 - 104y_4 + 35y_5}{12h^2} + O(h^3).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Выражения (1.27) и (1.28) позволяют получить аппроксимацию функции $y = f(x)$ любого n-го порядка точности. Данные выражения допускается использовать не только в узлах $x = x_1, x_2, \ldots$, но и в любых узлах $x = x_i, x_{i+1}, \ldots$, проводя соответствующую замену индексов.

1.3 Выводы по главе

1. Проведён краткий исторический обзор по вопросам исследования полимеров.
2. Приведены основные уравнения механики, необходимые для решения задач упругости, включающие в себя компоненты высокоэластической деформации полимера.
3. Рассматривается переход от эллиптических уравнений к вариационным. Данный переход необходим для решения задач в энергетической постановке (метод конечных элементов).
4. На основании литературного обзора сформулированы приведённые во введении цели и задачи исследования.

Глава 2. Методика определения реологических параметров полимеров на основе обработки опытных результатов

2.1 Основные соотношения механики вязкоупругих материалов

Ещё в 50–60-х годах XX века было показано [96, 140, 141, 142], что составляющие суммарной деформации, являющиеся по величине много меньше единицы, значительно преобладают над величинами остаточных деформаций полимера, что связывают с их сетчатой структурой.

Следовательно, в дальнейших выкладках вполне законно полностью пренебрегать пластическими деформациями, а ограничиться только учётом малой упругой и высокоэластической составляющими.

С другой стороны, предшествующая деформация материала может приводить к последующему процессу разрушения, таким образом возможно предположить примерную оценку момента разрушения при помощи анализа процесса деформации и следующей экстраполяцией данных вплоть до разрушения. При этом под самим моментом разрушения можно понимать очень много факторов: превышение предельных напряжений, предельных деформаций и т. д. Соглано опытным данным, полученным при одноосном растяжении (сжатии) и сдвиге в работах [96, 140, 141, 142], таким критерием является достижение некоторой предельной деформации, в результате формулировать некоторую приближенную теорию прочности, которая, правда, лежит вне настоящей работы.

Вследствие малости составляющих отдельных компонент деформаций, а также малости самой суммарной деформации, становится возможным использование только общей кинематической теории [96], при этом остается физическая нелинейность, обусловленная соответствующими уравнениями связи. Таким образом, в дальнейших выкладках в диссертации рассматривают лишь малые упругие и высокоэластические деформации и при этом жесткие сетчатые полимерные связующие исследуют как упругорелаксирующую среду в области малых деформаций.

Система уравнений можно представить в нескольких вариантах: векторной (см. параграф 1.2 на с. 19), тензорной и координатной. Для дальнейших выкладок удобно использовать уравнения в тензорной форме записи.

2.1.1 Вязкоупругость

Прежде чем говорить об основном уравнении связи напряжений и деформации, используемом в диссертации, — нелинейном обобщённом уравнении Максвелла-Гуревича — необходимо рассмотреть «классические модели» вязкоупругого поведения материала.

Существуют два идеальных случая деформаций:

1. Упругая деформация твёрдых тел — описывается законом Гука.
2. Течение жидкости — описывается законом Ньютона

В реальных телах можно выделить 2 основных вида отклонений от случаев идеального протекания деформаций:

1. Неподчинение законам Гука и Ньютона — имеет место нелинейная пропорциональность между напряжением и деформацией в твёрдом теле или скоростью деформации в жидкости.

2. Зависимость напряжений одновременно как от самой деформации, так и от её скорости, а также от более высоких производных деформации по времени. Данное свойство наблюдается в системах, проявляющих как свойства твёрдого тела, так и жидкости. Подобные тела называются *вязкоупругими*.

Наиболее часто в ходе экспериментальных данных устанавливают зависимость отношения напряжений к деформациям как функции исключительно от времени ($\sigma/\varepsilon = f(t)$), но не функции самих напряжений или деформаций — исследуются соотношения теории линейной вязкоупругости.

Максвелл моделировал поведение вязкоупругого тела последовательным соединением пружины и поршня, работающего в вязкой среде (рисунок 2.1, а). Здесь пружина описывает упругую деформацию, а поршень — необратимые деформации течения. Кельвин вместо последовательного соединения поршня и пружины предпочёл параллельное (рисунок 2.1, б). В дальнейшем идею Кельфина развивал Фойгт.

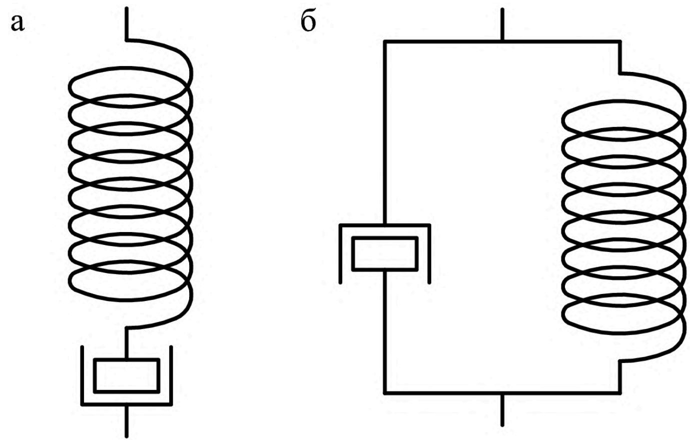


Рисунок 2.1 — Модели вязкоупругости Максвелла (а) и Кельвина (б)

Согласно модели Максвелла скорость изменения напряжений во времени описывается выражением:

для деформации сдвига

$$\frac{d\sigma_c}{dt} = G\frac{d\gamma}{dt} - \frac{\sigma_c}{\tau}; \qquad (2.1)$$

для деформации растяжения

$$\frac{d\sigma_н}{dt} = E\frac{d\varepsilon_н}{dt} - \frac{\sigma_н}{\tau}, \qquad (2.2)$$

где σ_c и $\sigma_н$ — напряжение сдвига и нормальное напряжение; t — время деформации; γ и $\varepsilon_н$ — относительная деформация сдвига и растяжения; G — модуль сдвига; E — модуль упругости; τ — время, необходимое для того, чтобы напряжение в теле уменьшилось в e раз.

При рассмотрении случая постоянной деформации ($\varepsilon = \text{const}$; $d\varepsilon/dt = 0$), выражения (2.1) и (2.2) в случае вязкоупругого тела имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\text{с}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_\text{с}}{t}; \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_\text{н}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_\text{н}}{t}. \tag{2.3}$$

В общем виде выражения (2.3) записываются

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}. \tag{2.4}$$

Интегрирование выражения (2.4) даёт

$$\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{t}{\tau}$$

или

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \tag{2.5}$$

где σ_0 — начальное напряжение при $t = 0$, определяющее неравновесное состояние тела; σ — напряжение через некоторый промежуток времени t.

Следствием из уравнения (2.5) является снижение уровня напряжения в теле с течением времени, т. е. $\sigma < \sigma_0$. При времени стремящемся к бесконечности $t \to \infty$ напряжение теоретически стремится к нулю. Однако значительная часть напряжения уменьшается за некоторый промежуток времени, и, как следствие из выражения (2.5), если изменение напряжения в e раз происходит за некоторый интервал времени t, т. е. $\sigma = \sigma_0/e$, то

$$\tau = t. \tag{2.6}$$

Таким образом выражение (2.6) подтверждает смысл переменной τ из выражения (2.2).

В случае неизменного во времени напряжения ($\sigma = \text{const}$; $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$) выражения (2.1) и (2.2) записываются

$$G\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_\text{с}}{\tau} = 0; \qquad E\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\text{н}}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_\text{н}}{\tau} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_\text{с} = G\tau\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}; \tag{2.7}$$

$$\sigma_\text{н} = E\tau\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\text{н}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

При сравнении уравнений (2.7) и (2.8) с законом Ньютона

$$\sigma_\text{с} = \eta_\text{сд}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

видно, что произведение величин $G\tau$ и $E\tau$ равно коэффициенту вязкости:

$$\eta_{\text{р}} = E\tau; \tag{2.9}$$

$$\eta_{\text{сд}} = G\tau. \tag{2.10}$$

где $\eta_{\text{р}}$ и $\eta_{\text{сд}}$ — коэффициенты вязкости при деформации растяжения и сдвига.

Анализ уравнений (2.9) и (2.10) показывает, что коэффициенты вязкости при различных видах деформаций (растяжение-сжатие, сдвиг) не равны друг другу. В случае абсолютно упругих тел ($\nu = 0.5$), получаем $E = 3G$ и, соответственно, $\eta_{\text{р}} = 3\eta_{\text{сд}}$, т. е. измеренный при растяжении коэффициент вязкости оказывается в три раза больше коэффициента вязкости, измеренного при сдвиге.

При рассмотрении модели Кельвина происходит суммирование напряжений в упругой ветви $\sigma_{\text{упр}}$ с вязкоупругой $\sigma_{\text{вязк}}$. Общее напряжение σ определяется

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{2.11}$$

где ε — относительная деформация; $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ — скорость изменения относительной деформации.

Уравнение (2.11) является неоднородным дифференциальным, решение которого определяется следующими шагами:

1. Поиск общего решения аналогичного однородного уравнения

$$\eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} + E\varepsilon = 0,$$

которое равно

$$\varepsilon = Ce^{-(E/\eta)t},$$

где C — постоянная интегрирования, равная $-\sigma/E$.

2. Поиск частного решения неоднородного уравнения. В данном случае

$$\varepsilon_{\text{част}} = \frac{\sigma}{E}.$$

Общее решение равно их сумме:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + Ce^{-(E/\eta)t}.$$

Следовательно

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{2.12}$$

Выражение (2.12) показывает, что относительная деформация ε стремится к некоторой постоянной величине σ/E при времени, стремящемся к бесконечности. В ином случае деформация составляет лишь часть от общей деформации, происходит запаздывание изменения деформации. Поэтому величину времени $\tau_з = \eta/E$ называют временем запаздывания.

Различными авторами предложены иные модели ползучести, так же базирующиеся на разделении деформаций на упругую и пластическую составляющие

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr}.$$

В общем случае деформация ползучести предполагают в виде произведения

$$\varepsilon_{cr} = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(T).$$

Значительную известность имеют следующие функциональные зависимости от напряжений

$$\begin{aligned}
&f_1(\sigma) = B\sigma^n && \text{— закон Нортона,}\\
&f_1(\sigma) = C\,\mathrm{sh}(\alpha\sigma) && \text{— закон Прандтля,}\\
&f_1(\sigma) = De^{\beta\sigma} && \text{— закон Дорна,}\\
&f_1(\sigma) = A\,[\mathrm{sh}(\gamma\sigma)]^n && \text{— закон Гарофало,}\\
&f_1(\sigma) = B(\sigma - \delta)^n && \text{— закон трения,}
\end{aligned}$$

где все символы, отличные от σ соответствуют определённым материальным константам.

Из приведённых зависимостей соотношение Гарофало включает как частные случаи законы Нортона, Прандтля и Дорна и учитывает нелинейность зависимости скорости деформаций ползучести от напряжений. Степенной закон Нортона также получен из физических соображений и широко распространён в практике.

Временны́е зависимости часто используются в следующем виде

$$\begin{aligned}
&f_2(t) = t && \text{— для второй стадии ползучести,}\\
&f_2(t) = Bt^m && \text{— закон Бейли,}\\
&f_2(t) = \left(1 + bt^{1/3}\right) e^{kt} && \text{— закон Андраде,}\\
&f_2(t) = \textstyle\sum_i a_i t^{m_i} && \text{— закон Греэхема и Уоллеса.}
\end{aligned}$$

Согласно закону Аррениуса зависимость функции от температуры записывается

$$f_3(T) = Ae^{-\Delta H/kT}.$$

Здесь ΔH — энергия активации; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

В практике часто применяется зависимость $\varepsilon_{cr}(\sigma, t, T)$, в которой заключены простейшие из приведённых выше выражений

$$\varepsilon_{cr} = Ce^{-\Delta H/kT} t^m \sigma^n,$$

откуда при постоянной температуре получаем

$$\varepsilon_{cr} = Bt^m \sigma^n. \tag{2.13}$$

Данные выражения могут быть использованы исключительно в случае постоянных напряжений и только представляют попытку математической формализации первой и второй стадий ползучести. Для рассмотрения переменных напряжений, необходимо выразить уравнения скоростного типа. Так, из соотношения (2.13) при $\sigma = \text{const}$ получаем выражение

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr}}{\mathrm{d}t} = mBt^{m-1}\sigma^n, \tag{2.14}$$

которое с учётом соотношений (2.13) и (2.14) можно преобразовать в виду, не содержащему время t

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr}}{\mathrm{d}t} = \frac{mB^{1/m}\sigma^{n/m}}{\varepsilon_{cr}^{(1-m)/m}}.$$

Выбор зависимости скоростного типа является попыткой математического моделировнаия первой стадии ползучести, когда скорость ползучести убывает.

В современных программных комплексах, таких как ANSYS [143, 144], Solid Works [145, 146] и др., ползучесть моделируется при помощи зависимости скорости изменения деформации от напряжений, относительной деформации, времени и температуры

$$\varepsilon_{creep} = f_1(\sigma) f_2(\varepsilon) f_3(t) f_4(T).$$

Данная форма описания ползучести даёт неплохие результаты при моделировании необратимых деформаций. Невозможность учёта обратимых деформаций является серьёзным недостатком данных комплексов. Учёт обратимых деформаций возможен при использовании нелинейного уравнения связи Максвелла-Гуревича, о котором будет сказано в дальнейшем.

Отсутствие уравнения Максвелла-Гуревича в существующих конечно-элементных комплексах вынуждает исследователей самостоятельно писать программные модули для определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел.

2.1.2 Основные уравнения в тензорной форме. Уравнение Максвелла-Гуревича

Несмотря на то, что настоящая работа посвящена осесимметричной задаче, то есть задаче, решаемой в цилиндрической системе координат, дальнейшие выкладки будут производиться в декартовой системе координат x, y, z (рисунок 2.2), так как именно в ней происходит получение опытных данных с последующим определением физико-механических параметров полимера.

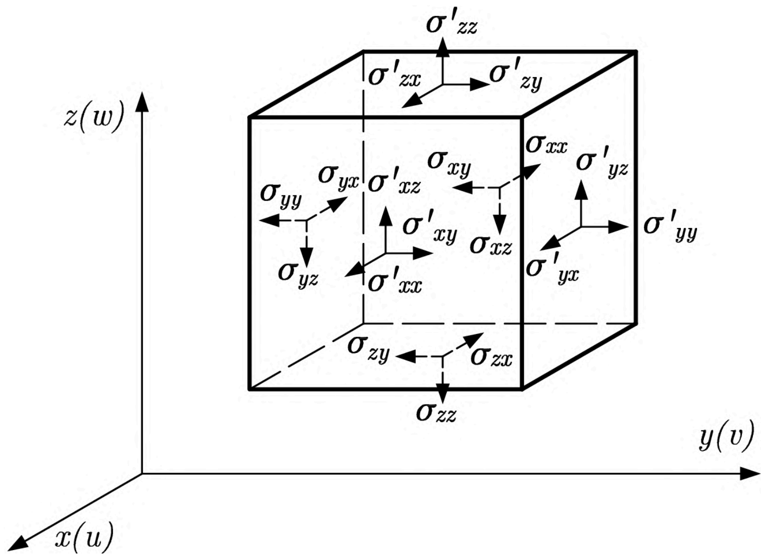


Рисунок 2.2 — Элемент сплошной среды в декартовых координатах

Записывать выражения можно более компактно, если присваивать осям и смещениям индексы 1, 2, 3

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3; \quad u = u_1; \quad v = u_2; \quad w = u_3,$$

а также для компонентов напряжений

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11}, \ldots, \quad \tau_{yz} = \sigma_{yz} = \sigma_{23}, \ldots, \quad (1,2,3), \quad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}).$$

При формировании компонент упругой и реологических деформаций необходимо отметить особенность сдвиговых деформаций

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{23}. \tag{2.15}$$

Коэффициент «2» в выражении (2.15) вводится не случайно и позволяет записывать дальнейшие выражения более удобно и универсально.

Тогда выражения для компонентов суммарной, упругой и высокоэластической деформации записываются так:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11}, \ldots, &&\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{23}, \ldots, \\ &\varepsilon_{el,xx} = \varepsilon_{el,11}, \ldots, &&\varepsilon_{el,yz} = 2\varepsilon_{el,23}, \ldots, \\ &\varepsilon_{cr,xx} = \varepsilon_{cr,11}, \ldots, &&\varepsilon_{cr,yz} = 2\varepsilon_{cr,23}, \ldots, \quad (1,2,3). \end{aligned}$$

Компоненты тензора малой суммарной деформации через смещения записываются как:

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.16}$$

Суммарная деформация имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{el,ik} + \varepsilon_{cr,ik} + \alpha(T - T_0)\,\delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{2.17}$$

где коэффициент δ_{ik} принимает значения

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Скорость деформаций получают дифференцированием выражения (2.17)

$$v_{s,ik} = \frac{\partial \varepsilon_{el,ik}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t}\delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.18}$$

На основании закона Гука в обратной форме (см. параграф 1.2, с.19) для упругих составляющих деформаций справедлива запись

$$\varepsilon_{el,ik} = \left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu} p\delta_{ik}\right)\frac{1}{2G} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{2.19}$$

где ν — коэффициент Пуассона; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; p — среднее давление.

Скорость высокоэластических деформаций, согласно [96], определяется выражением

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left[\frac{3}{2}(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}) - E_\infty \varepsilon_{cr,ik}\right]\frac{1}{\eta^*} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{2.20}$$

или в ином виде, получаемом путём преобразований с помощью закона Гука

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left(\varepsilon_{el,ik} - \frac{\theta_{el}\delta_{ik}}{3} - \frac{G_\infty}{G}\varepsilon_{cr,ik}\right)\frac{1}{\left(1 + \dfrac{G_\infty}{G}\right)T^*} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.21}$$

Здесь используется теория, согласно которой объёмная высокоэластическая деформация равна нулю $\theta_{cr} = 0$, при этом $\nu_{cr} = 0.5$ и тогда

$$G_\infty = \frac{E_\infty}{2(1+\nu_{cr})} = \frac{E_\infty}{3}, \quad \text{отсюда} \quad E_\infty = 3G_\infty,$$

где T^* — соответствующее время релаксации.

В общем виде релаксационная вязкость определяется формулой

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left\{-\frac{1}{m^*}\left[\gamma^* p + \left|\frac{3}{2}(\sigma_{rr} - p) - E_\infty \varepsilon_{cr,rr}\right|_{\max}\right]\right\}, \tag{2.22}$$

где индексом r обозначены главные направления для напряжений; γ^* — объёмный коэффициент, зависящий от структуры полимера и температуры.

Зависимость между временем релаксации T^* и коэффициентом релаксационной вязкости η^* описывается формулой

$$\eta^* = 3G\left(1 + G_\infty/G\right)T^*. \tag{2.23}$$

Здесь, как и ранее, использованы соотношения

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}\delta_{ik} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}; \tag{2.24}$$

$$\theta_{el} = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{el,ii}; \qquad p = K\theta_{el}; \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \tag{2.25}$$

Относительное изменение объёма записывается с учётом используемых гипотез

$$\theta = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \qquad \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{cr,ii} = 0.$$

$$\theta = \theta_{el} + 3\alpha(T - T_0).$$

Форма записи коэффициента релаксационной вязкости (2.22) предпочтительна в случае изотермических процессов, при которых составляющие данного выражения η_0^*, γ^* и m^*, зависящие от температуры T становятся константами. Довольно часто в выражении (2.22) слагаемое, содержащее $p = \theta_{el}K$, весьма мало и им можно пренебречь.

Использование выражений (2.17)—(2.19) позволяет прийти к системе уравнений относительно компонентов трёх величин: напряжений — σ_{ik}, смещений — u_i и суммарной деформации — ε_{ik}.

Подстановка (2.19) в (2.17) приводит к явному выражению деформаций ползучести $\varepsilon_{cr,ik}$, которое не могло быть получено при наличии остаточной деформации

$$\varepsilon_{cr,ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_{el,ik} - \alpha(T - T_0)\delta_{ik}$$

или

$$\varepsilon_{cr,ik} = \varepsilon_{ik} - \left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu}p\delta_{ik}\right)\frac{1}{2G} - \alpha(T - T_0)\delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.26}$$

Для удобства дальнейшей работы удобно ввести обозначения

$$f_{ik}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}) - E_\infty\varepsilon_{cr,ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.27}$$

Необходимо отметить, что $f_{ik}^* = f_{ki}^*$.

Подставляя в последнее уравнение выражение (2.26), определяют f_{ik}^* через σ_{ik} и ε_{ik}, справедливое при отсутствии остаточной деформации:

$$f_{ik}^* = \frac{3}{2}\left[\left(1 + \frac{G_\infty}{G}\right)\sigma_{ik} - \left(1 + 2\nu\frac{E_\infty}{E}\right)p\delta_{ik}\right] + \alpha E_\infty(T - T_0)\delta_{ik} - E_\infty\varepsilon_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.28}$$

Подставляя (2.26) и (2.28) в (2.20), получаем уравнение связи — обобщённое уравнение Максвелла, содержащее лишь компоненты напряжений и суммарной деформации.

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i,k = 1,2,3);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} - \frac{3}{1+\nu}\frac{\partial p}{\partial t}\delta_{ik}\right) + \alpha\delta_{ik}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{f_{ik}^*}{\eta^*} \quad (i,k = 1,2,3). \tag{2.29}$$

В последнем уравнении связи, коэффициент релаксационной вязкости η^* выражается

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*}\exp\left\{\frac{1}{m^*}\left[\gamma^* p + |f_{rr}^*|_{\max}\right]\right\}.$$

В связи с наличием в выражении η^* экспоненты, система (2.29) является нелинейной, что и определяет сложность её решения.

2.1.3 О константах уравнения связи и понятие линеаризации уравнений высокоэластичности

Используемые в настоящем параграфе уравнения связи представлены шестью независимыми константами в случае неизменности температуры ($T = \text{const}$): две константы упругой деформации G и ν, а также четырьмя параметрами высокоэластической деформации η_0^*, m^*, E_∞ и γ^*, в общем случае являющимися значительными функциями температуры. При этом не представляется возможным [96] теоретическое определение указанных параметров; определение возможно на основании данных макроскопического анализа.

При этом упругие параметры материала модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν зависят от атомного строения вещества, мало зависят от надмолекулярной структуры полимера и определяются, в основном, его химической структурой.

С другой стороны, например, модуль высокоэластичности E_∞ определяется взаимодействием отдельных элементов длинноцепочечных молекулярных комплексов, а также их тепловым движением, соответственно зависит от структурных характеристик полимера и поэтому является значительной функцией температуры.

Не меньшей зависимостью от температуры и структурного состояния полимера обладает коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^*. Связано это с тем, что сам коэффициент выражается через временной релаксационный параметр t_0^* и энергию активации.

Для оценки объёмного коэффициента γ^*, согласно [96], можно использовать выражение

$$\gamma^* = \frac{9}{2}\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)\frac{1-2\nu}{1+\nu}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{E_\infty}{E}(1+\nu)\right],$$

где α^* и β^* — структурные постоянные. Такие образом, объёмный коэффициент γ^* зависит от структуры полимера и температуры, но в гораздо меньшей степени, чем E_∞.

Высказанные соображения подтверждают ряд работ, ставшие «классикой» [140, 147], и до сих пор, несмотря на свою давность, не потеряли актуальность по содержащимся в них опытным данным по параметрам упругой и высокоэластической деформаций (кроме γ^*). Несмотря на это, до настоящего времени тяжело выделить работы, в которых всесторонне проводили бы исследования зависимости параметров полимеров от химического состава и строения для обобщённого уравнения Максвелла.

Нелинейность уравнений высокоэластичности приводит к тому, что получить их аналитическое решение практически невозможно — для этого применяют численные и численно-аналитические методы. Поэтому в инженерной практике, а также для предварительной оценки деформированного состояния используют приближённые методы, в том числе и метод линеаризованных уравнений.

Довольно часто необходимо на первом этапе определить качественную картину процесса деформации полимера, для чего и используются линеаризованные уравнения. При этом не всегда удаётся добиться количественного совпадения полученных теоретических решений с соответствующими опытными наблюдениями; совпадение, как правило, имеет место только при малых напряжениях [142]. Полезно применять линеаризованные уравнения и для качественного анализа при использовании численных методов интегрирования, т. к. в этом случае можно предварительно сориентироваться с подбором значений соответствующих параметров, что благоприятно сказывается на объёмах вычислительной работы.

Основы теории линейной высокоэластичности были заложены в многочисленных работах, к примеру, для одноосных задач развитие этой теории отразилось в работах [90, 91, 148, 149, 150].

При этом линейная теория представляется частным случаем нелинейной, получаемой при условии

$$m^* \longrightarrow \infty, \qquad \eta^* \longrightarrow \eta_0^*(T).$$

При известной зависимости $T = T(x_i, t)$ можно определить и зависимость $\eta_0^* = \eta_0^*(x_i, t)$. В этом случае скорость высокоэластических деформаций (2.20) имеет линейную зависимость от напряжений и деформаций, при этом может быть нелинейной функций времени и координат.

При радикальном упрощении уравнений обычно условие линеаризации записывают в виде

$$m^* \longrightarrow \infty, \qquad \eta^* \longrightarrow \eta_0^* \equiv \text{const}.$$

Необходимо отметить, что использовать вышеуказанное условие можно только при изотермических процессах при постоянном температурном поле. В этом случае коэффициент начальной релаксационной вязкости превращает η_0^* в константу, определяемую величиной температуры. Поскольку, как видно из выражения (2.22), коэффициент релаксационной вязкости η^* зависит не только от температуры (через коэффициент начальной релаксационной вязкости), но является функцией и напряжений, и модуля скорости m^*, который сам сильно зависит от температуры, использование линеаризации не всегда возможно, т. к. может приводить к значительным отличиям от нелинеаризованного расчёта.

2.1.4 Квазистатическое растяжение (сжатие) полимерных стержней

При исследовании однородного растяжения образца вдоль оси x можно записать

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}(t) = \sigma_x(t) \quad \text{и} \quad \sigma_i = 0 \quad (i = 2, 3). \tag{2.30}$$

Далее выкладки приводятся в декартовой системе координат (x, y, z). Однако при рассмотрении стержней цилиндрической формы, задача становится в осесимметричной постановке, в результате в декартовой системе направления осей y и z эквивалентны.

В выражении (2.30) $\sigma_{xx}(t) = \sigma_x(t)$ — зависимая от режима нагружения стержня величина напряжений.

Величина деформаций от времени может быть определена на основании выражений (2.17)–(2.20):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{el,xx} + \varepsilon_{cr,xx}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{el,yy} + \varepsilon_{cr,yy}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{el,xy} + \varepsilon_{cr,xy}, \tag{2.31}$$

где упругие составляющие деформации определяются так:

$$\varepsilon_{el,xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_{el,yy} = -\nu\varepsilon_{el,xx}; \quad \varepsilon_{el,xy} = 0. \tag{2.32}$$

Скорости высокоэластических деформаций будут определяться выражениями

$$\frac{d\varepsilon^*_{xx}}{dt} = \frac{f^*_{xx}}{\eta^*}; \quad \frac{d\varepsilon^*_{yy}}{dt} = \frac{f^*_{yy}}{\eta^*}; \quad \frac{d\varepsilon^*_{xy}}{dt} = \frac{2f^*_{xy}}{\eta^*}. \tag{2.33}$$

При этом вместо частных производных используются полные производные. В выражении (2.33) функции напряжений имеют вид

$$f^*_{xx} = \sigma_x - E_\infty\varepsilon_{cr,xx}; \quad f^*_{yy} = -\left(\frac{1}{2}\sigma_x + E_\infty\varepsilon_{cr,yy}\right); \quad 2f^*_{xy} = -E_\infty\varepsilon_{cr,xy},$$

Коэффициент η^* принимает вид

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta^*_0}\exp\left\{\left[\gamma^*\frac{\sigma_x}{3} + |f^*_{rr}|_{max}\right]\frac{1}{m^*}\right\}.$$

Таким образом, коэффициент релаксационной вязкости η^* напрямую зависит от максимального значения функции напряжений f_{rr} для главных направлений. Вследствие того, что в данном случае главные направления совпадают с координатами, используют наибольшую по модулю величину из f_{xx} и f_{yy}.

Также в рассматриваемой задаче деформация сдвига ε_{xy} имеет тождественно нулевое значение. Это становится очевидно при рассмотрении последней компоненты выражения (2.33), если представить его в конечно-разностном виде:

$$\Delta\varepsilon_{xy}^* = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xy}^*}{\mathrm{d}t}\Delta t; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xy}^*}{\mathrm{d}t} = -\frac{E_\infty}{\eta^*}\cdot\varepsilon_{xy}^*\right). \tag{2.34}$$

Для данного уравнения можно записать единственное тривиальное решение $\varepsilon_{xy}^* \equiv 0$ только в случае однородных начальных условий.

Необходимо отметить, что в случае высокоэластической деформации, достигается некоторая предельная деформация, которая перестаёт зависеть от времени, называемая равновесной высокоэластической деформацией $\varepsilon_{cr,x,\text{пред}}$ и являющаяся функцией напряжений. В предельном значении высокоэластической деформации связь между напряжениями и самой высокоэластической деформацией представляет собой линейную функцию

$$\sigma_x = E_\infty \varepsilon_{cr,x,\text{пред}}, \tag{2.35}$$

где E_∞ — модуль высокоэластической деформации.

Суммарная предельная деформация определяется суммой двух составляющих: упругой и высокоэластической. На основании (2.35)

$$\varepsilon_{x,\text{пред}} = \varepsilon_{el,x} + \varepsilon_{cr,x,\text{пред}} = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x}{E_\infty} = \frac{\sigma_x}{E_\infty^*}, \tag{2.36}$$

где величина

$$E_\infty^* = \frac{E_\infty}{1+\dfrac{E_\infty}{E}} = \frac{E}{1+\dfrac{E}{E_\infty}}$$

называется приведённым модулем высокоэластичности.

В поперечном направлении деформации определяются из уравнений (2.33) делением почленно двух первых уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr,yy}}{\mathrm{d}t}\Bigg/\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr,xx}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_x/2 + E_\infty\varepsilon_{cr,yy}}{\sigma_x - E_\infty\varepsilon_{cr,xx}}.$$

Это выражение обращается в тождество при условии

$$\varepsilon_{cr,yy} = -\frac{\varepsilon_{cr,xx}}{2}. \tag{2.37}$$

Данное соотношение удовлетворяет условию постоянства объёма при указанной деформации, т. к. $\theta_{cr} = \text{const}$.

С учётом (2.37), из (2.31) и (2.32)

$$\varepsilon_{yy} = \left(\frac{1}{2}-\nu\right)\varepsilon_{el,xx} - \frac{1}{2}\varepsilon_{xx} = \left(\frac{1}{2}-\nu\right)\frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{2}\varepsilon_{xx}. \tag{2.38}$$

Далее, для удобства, вводится эффективный коэффициент Пуассона, равный отношению суммарных деформаций с обратным знаком

$$\nu_{\text{эфф}} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}, \tag{2.39}$$

тогда выражение (2.38) принимает вид

$$\nu_{\text{эфф}} = -\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\frac{\varepsilon_{el,xx}}{\varepsilon_{xx}} + \frac{1}{2}, \qquad \left(\varepsilon_{el,xx} = \frac{\sigma_x}{E}\right). \tag{2.40}$$

В случае монотонного процесса имеет место соотношение

$$\frac{\varepsilon_{el,xx}}{\varepsilon_{cr,xx}} \leqslant 1,$$

следовательно, из выражения (2.40) следуют два предельных значения $\nu_{\text{эфф}}$: ν при $\varepsilon_{el,xx} \simeq \varepsilon_{xx}$, и $\frac{1}{2}$ при $\varepsilon_{el,xx} \ll \varepsilon_{xx}$, таким образом $\nu \ll \nu_{\text{эфф}} \ll \frac{1}{2}$. В общем случае параметр $\nu_{\text{эфф}}$ — представляет собой функцию времени, зависящую от режима нагружения.

С помощью соотношения (2.40) можно сопоставить между собой величины f^*_{xx} и f^*_{yy}. При этом $2f^*_{yy} = -(\sigma_x - E_\infty \varepsilon_{cr,x}) = -f^*_{xx}$, соответственно $\left|f^*_{yy}\right| = \frac{|f^*_{xx}|}{2}$. Таким образом, в выражении коэффициента релаксационной вязкости η^* используют величину f^*_{xx}.

В результате в рассматриваемой задаче после нахождения удлинения в направлении растяжения появляется возможность определить деформированное состояние.

Деформация определяется при помощи оставшихся выражений (2.31)–(2.33)

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{el,xx} + \varepsilon_{cr,xx}; \qquad \varepsilon_{el,xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \\ \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr,xx}}{\mathrm{d}t} = \frac{f^*_{xx}}{\eta^*}; \qquad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta^*_0}\exp\left\{\left[\frac{1}{3}\gamma^*\sigma_x + |f^*_{xx}|\right]\frac{1}{m^*}\right\}, \end{gathered} \tag{2.41}$$

где $f^*_{xx} = \sigma_x - E_\infty \varepsilon_{cr,xx} = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right)\sigma_x - E_\infty \varepsilon_{xx}$.

С другой стороны, можно воспользоваться одним уравнением относительно суммарной деформации

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xx}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} + \frac{f^*_{xx}}{\eta^*}, \tag{2.42}$$

в которое подставляется второе выражение f^*_{xx} из (2.41).

Следовательно, деформация вдоль оси x определяется из независимой группы уравнений.

Необходимо отметить, что в связи с весьма малым влиянием объёмного коэффициент γ^* на коэффициент релаксационной вязкости, часто принимают $\gamma^* \to 0$. Следующим этапом после определения скоростей смещения и деформаций, является определение самих смещений

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad v_x = \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.43}$$

Резюмируя вышесказанное, в случае квазистатического одноосного растяжения, напряжение σ_x и соответствующая суммарная деформация ε_{xx} связаны дифференциальным уравнением (2.42), при этом поперечная деформация ε_{yy} может быть определена из соотношения (2.38).

2.1.5 Релаксация напряжений в полимерах

Наибольший практический интерес представляет собой режим постепенной релаксации напряжений в растянутом (сжатом) стержне с фиксированной суммарной деформацией.

Полагая в выражении (2.42)

$$\varepsilon_{xx} = \text{const} = \varepsilon_c, \tag{2.44}$$

получают дифференциальное уравнение, описываемое изучаемый процесс

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{E}{\eta_0^*} f_{xx}^* \exp\left\{\left[\frac{1}{3}\gamma^*\sigma_x + |f_{xx}^*|\right]\frac{1}{m^*}\right\}. \tag{2.45}$$

Здесь f_{xx}^* — функция напряжений, определяемая выражениям

$$f_{xx}^* = \sigma_x - E_\infty \varepsilon_{cr,x} = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right)\sigma_x - E_\infty \varepsilon_x.$$

Начальное условие записывается так: $\sigma_x = \sigma_{x,0}$ при $t = 0$.

В рассматриваемом режиме

$$\frac{\mathrm{d}f_{xx}^*}{\mathrm{d}t} = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t},$$

далее, исключая из (2.45), можно записать

$$\frac{\mathrm{d}f_{xx}^*}{\mathrm{d}t} = -\frac{E + E_\infty}{\eta_0^*}\exp\left(b^*\varepsilon_c\right) f_{xx}^* \exp\left|\frac{f_{xx}^*}{m_0^*}\right|, \tag{2.46}$$

где введены обозначения

$$m_0^* = \frac{m^*}{1 + \dfrac{\gamma^* \operatorname{sign}\sigma_x}{3\left(1 + \dfrac{E_\infty}{E}\right)}} \quad \text{и} \quad b^* = \frac{E_\infty^*\gamma^*}{3m^*}.$$

В выражении (2.46) отмечен множитель $(b^*\varepsilon_c)$, в данном режиме являющийся величиной постоянной.

Как показано в работе [96], дальнейшее решение производится при помощи некоторой экспоненциальной функции

$$\Psi(x) = x\exp x,$$

которая подробно табулирована с шагом 0.01 и ясно, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-Ei(-x)\right] = -\frac{\exp(-x)}{x}.$$

Тогда можно получить решения (2.46)

$$t = \frac{\eta_0^*}{E+E_\infty}\exp\left(-b^*\varepsilon_c\right)\left[-Ei(-\xi^*)+Ei(-\xi_0^*)\right], \tag{2.47}$$

где введена переменная ξ,

$$\xi^* = \left|\frac{f_{xx}^*}{m_0^*}\right| = \frac{\left|\left(1+\dfrac{E_\infty}{E}\right)\sigma_x - E_\infty\varepsilon_c\right|}{m_0^*}. \tag{2.48}$$

В области $\xi^* \gg 1$ приближённое решение может быть записано в виде

$$t = \frac{\eta_0^*}{E+E_\infty}\exp\left(-b^*\varepsilon_c\right)\left[\frac{\exp(-\xi^*)}{\xi^*} - \frac{\exp\left(-\xi_0^*\right)}{\xi_0^*}\right]. \tag{2.49}$$

Интегральные кривые удобно представлять графически при помощи полулогарифмических координат. Тогда, логарифмируя (2.47), получим:

$$\lg\frac{t}{t_0} = -\frac{b^*\varepsilon_c}{\ln 10} + \lg\frac{\eta_0^*}{(E+E_\infty)\,t_0} + \lg\left[-Ei(-\xi^*)+Ei(-\xi_0^*)\right], \tag{2.50}$$

где t_0 — масштабный коэффициент времени (1 с или 1 мин и т. д.).

На рисунке 2.3 представлен характер интегральных кривых.

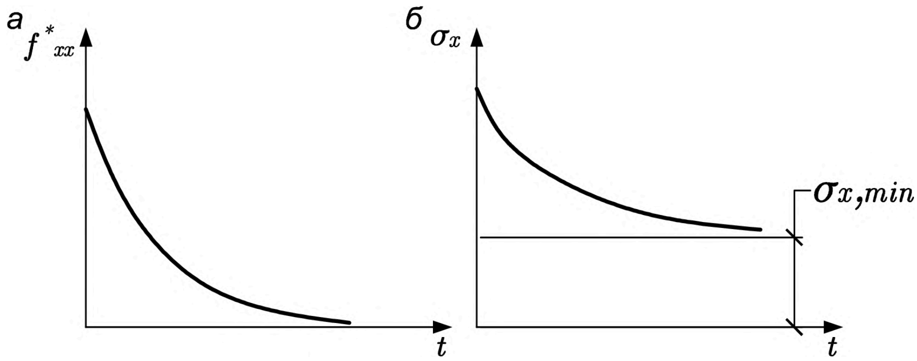
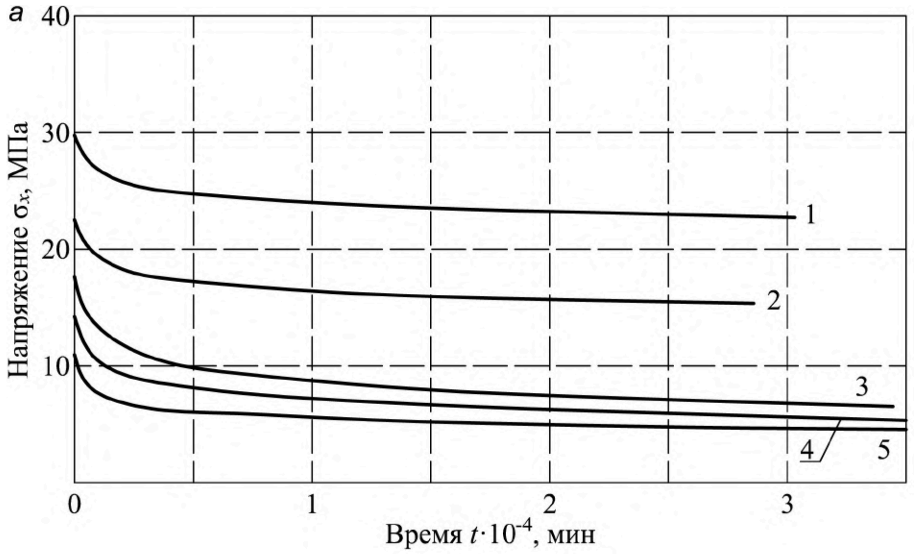


Рисунок 2.3 — Характер интегральных кривых при релаксации напряжений: *а* — функция $f_{xx}(t)$; *б* — напряжение $\sigma_x(t)$

На рисунке 2.4 — теоретические кривые в координатах (σ_x ,t) и (σ_x, $\lg t$), полученные для некоторых значений параметров.

Вследствие того, что напряжения в рассматриваемом процессе релаксации напряжений убывают со временем, полученные графики релаксации напряжений имеют тот же характер, что и кривые релаксации деформаций [96]. Если рассматривать графики, полученные с



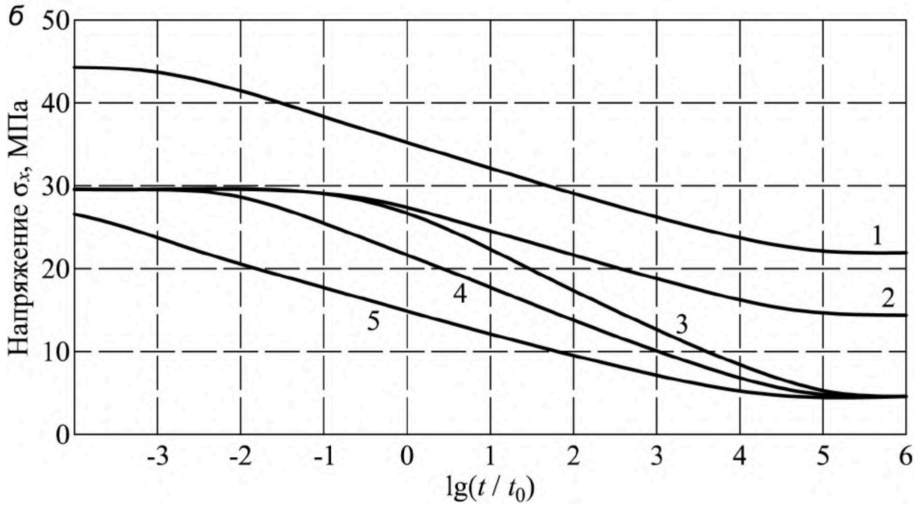


Рисунок 2.4 — Интегральные кривые релаксации напряжений, вычисленные по формулам (2.47) и (2.50): a — в координатах ε, t; $б$ — в координатах ε, $\lg(t/t_0)$. Величина деформаций $\varepsilon_c \cdot 10^5$: 1 — 1.5; 2–5 — 1. Значения E_∞, МПа: 1 и 2 — 3000; 3, 4 и 5 — 600. Значения остальных параметров: $E = 3000$ МПа; $m^* = 3$ МПа; $\eta_0^* = 0.4 \cdot 10^6$ МПа. Значения γ^*: 1, 2 и 3 — 0; 4 — 1; 5 — 3

использованием полулогарифмических координат, они имеют две горизонтальные асимптоты и одну точку перегиба. Когда в процессе упругого последействия происходит релаксация деформаций до нулевого значения, то при $\varepsilon_x = \text{const}$ релаксация напряжений происходит до некоторого минимального значения, определяемого условием $\xi^* \to 0$. Это значение вычисляется выражением

$$\sigma_{\min} = E_\infty \varepsilon^*_{\max} = E_\infty \varepsilon^*_c \tag{2.51}$$

и можно определить нижний предел релаксации напряжений.

Высокоэластическая деформация изменяется и в случае ползучести, и в случае релаксации напряжений. В последнем случае из выражения (2.41) имеет место запись

$$\varepsilon_x^* = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x}{E} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_x}{E}.$$

С учётом значения $\sigma_{\min}$ и начального условия,

$$\varepsilon_0^* \ll \varepsilon_x^* \ll \varepsilon_{\max}^*, \qquad \varepsilon_0^* = \varepsilon_c^* - \frac{\sigma_{x,0}}{E}, \qquad \varepsilon_{\max}^* = \varepsilon_c^* - \frac{\sigma_{\min}}{E} = \frac{\varepsilon_c}{1+\dfrac{E_\infty}{E}}. \tag{2.52}$$

В случае быстрого нагружения перед фиксацией постоянной деформации такого, что имеет место только упругая составляющая деформации, а неупругая — не успевает развиться, т. е. $\sigma_{x,0} = E\,\varepsilon_c$, справедлива запись равенства нулю неупругой составляющей: $\varepsilon_c^* = 0$.

В полулогарифмических координатах угловой коэффициент касательной к диаграмме релаксации напряжений может быть определён дифференцированием выражения (2.50), таким образом, в точке перегиба можно записать

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi^*}{\mathrm{d}y^*}\right)_{\xi^*=\xi_{\text{П}}^*} = -\frac{1}{1+\dfrac{1}{\xi_{\text{п}}^*}}, \tag{2.53}$$

где

$$y^* = \ln\frac{t}{t_0} = \lg\frac{t}{t_0}\ln 10.$$

Значение ординаты точки перегиба

$$\xi_{\text{п}}^* = \frac{\left|\left(1+\dfrac{E_\infty}{E}\right)\sigma_{\text{п}} - E_\infty\,\varepsilon_0\right|}{m_0^*}$$

для кривых, представленных на рисунке 2.4 можно однозначно определить через ξ_0^* путем отыскания корня уравнения [96]

$$[-Ei\,(-\xi_{\text{п}}^*) + Ei\,(\xi_0^*)]\,(1+\xi_{\text{п}}^*)\exp\xi_{\text{п}}^* = 1. \tag{2.54}$$

Корень представленного уравнения может быть определён и путём подбора, и графически. Поскольку в дальнейшем для определения упругих и высокоэластических параметров будет использована несколько другая методика, классическое решение здесь приводить не будем, его можно найти в [96].

Следующим этапом в левой части выражения (2.54) заменяют ξ^* и y^* их значениями, в результате чего получают выражение

$$\bar{m}_0^* = \left|\bar{k}\right|\left(1+\frac{1}{\xi_{\text{п}}^*}\right), \tag{2.55}$$

где
$$\bar{k} = \frac{k}{\ln 10}; \qquad k = \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta \lg\left(\dfrac{t}{t_0}\right)}.$$

Таким образом, параметр k представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой $\sigma_x(\lg t)$ в точке перегиба, имеет ту же размерность, что и напряжения и может быть определён по соответствующей опытной диаграмме релаксации напряжений. Параметр $\bar{m}_0^*$ в выражении (2.55) имеет значение
$$\bar{m}_0^* = \frac{m_0^*}{1+\dfrac{E_\infty}{E}} = \frac{m^*}{1+\dfrac{E_\infty}{E}+\gamma^* \operatorname{sign}\dfrac{\sigma_x}{3}}.$$

В случае малых значений γ^* и $\dfrac{E_\infty}{E}$ имеет место приближённое соотношение $\bar{m}_0^* = m^*$.

При наличии данных опытных испытаний диаграмм $\sigma_x(t)$ в случае $\varepsilon_x = \text{const}$ при помощи выражения (2.55) по угловому коэффициенту линейного участка в области перегиба кривой можно определить параметр $\bar{m}_0^*$. В первом приближении можно принять $\bar{m}_0^* = \left|\bar{(}k)\right|$, в случае известного соотношения $\dfrac{E_\infty}{m^*}$ можно более точно найти $\bar{m}_0^*$ с учётом $\xi_\text{п}^*$ методом перебора по (2.55), т. к.
$$\xi^* = \left|\left(1+\frac{E_\infty}{E}\right)\frac{\sigma_x}{m_0^*} - \frac{E_\infty}{m_0^*}\varepsilon_c\right|.$$

В работе [96] показано, что при помощи выражения (2.55) можно определить величину γ^* исходя из сравнения угловых коэффициентов касательных к опытным диаграммам ползучести и релаксации напряжений. При этом для практического применения указанный способ мало пригоден, поскольку малые погрешности определения угловых коэффициентов ведут к существенным погрешностям при вычислении γ^*. На основании вышесказанного, все определения параметров и вычисления происходят без учёта коэффициента γ.

На рисунке 2.5 отражены опытные данные по релаксации напряжений образца из эпоксидной смолы ЭДТ-10. В практике удовлетворительное совпадение опытных кривых с теоретическими происходит только в области малых времён, в области больших времен необходимо учитывать несколько спектров времён релаксации полимера.

2.2 Определение постоянных в уравнении связи

2.2.1 Методика определения постоянных в уравнении связи

Ученики школы профессора Б. М. Языева, к которым относится и автор настоящей диссертационной работы, разработали иной подход к определению упругих и высокоэластических параметров полимеров. Автор отразил в работах [5, 41], и в работах других учеников [151, 152]; методика определения параметров полимера с использованием методов нелинейной оптимизации отражена в работе [153].

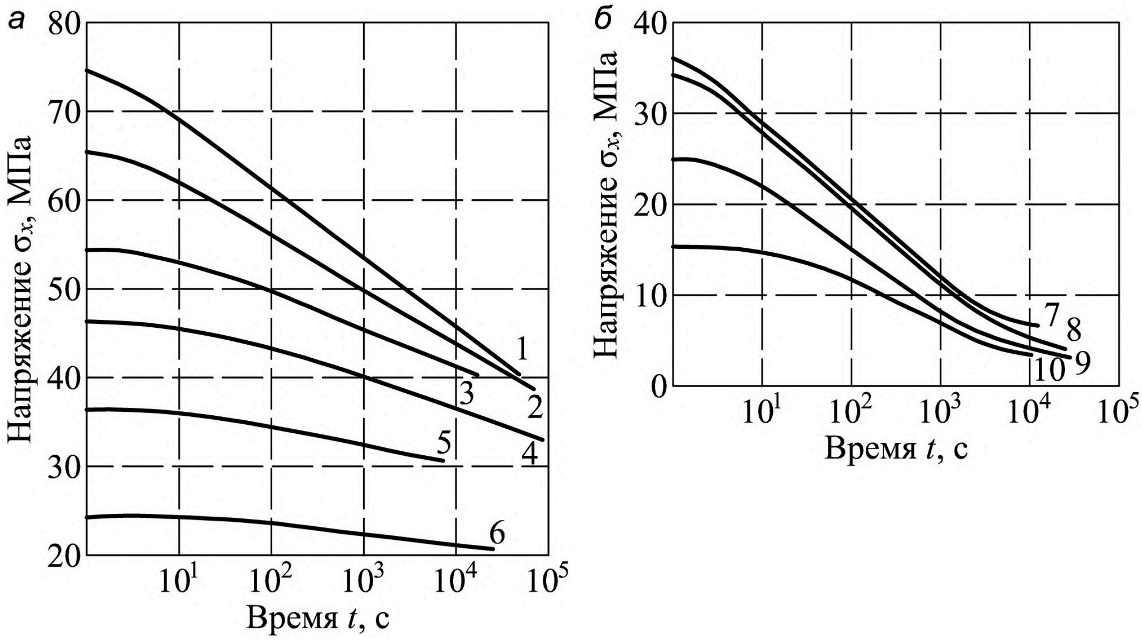


Рисунок 2.5 — Экспериментальные диаграммы релаксации напряжений эпоксидного полимера ЭДТ-10: Температура T, °C: *а* — 20; *б* — 80. Величина деформации $\varepsilon_c \cdot 10^2$: 1 — 3.5; 2 — 2.7; 3 — 1.9; 4 — 1.5; 5 — 1.2; 6 — 0.8; 7 — 3.4; 8 — 2.4; 9 — 1.8; 10 — 1

В настоящем параграфе приводится методика определения физико-механических параметров (упругих и высокоэластических) полимеров на примере поливинилхлорида. Связано это с тем, что в настоящее время долю на рынке конструкционных материалов из полимеров порядка 70 % занимает именно поливинилхлорид, из которого изготавливают: окна, трубы, изоляция кабелей и т. д. Данный материал обладает многими положительными свойствами такими, как высокая огнестойкость, устойчивость к агрессивным средам, довольно высокие физико-механические свойства — всё это и определяет его широкое распространение.

Как отмечалось ранее, оценку прочностных и деформационных свойств конструкций и их элементов из полимерных материалов нельзя проводить только по мгновенной, упругой работе. Необходимо учитывать высокоэластические деформации, развивающиеся в течение времени, которые могут приводить к существенному перераспределению напряжений в элементах конструкций, в результате чего существенно меняется напряжённо-деформированное состояние. Ситуация осложняется тем, что для поливинилхлорида, как и для большинства других полимеров, данные по высокоэластическим деформациям (релаксация, ползучесть и т. д.) в литературе встречаются довольно редко. Можно отметить работы [154, 155], из которых был заимствован график релаксации ПВХ для дальнейшего анализа и получения необходимых параметров уравнения Максвелла-Гуревича (рисунок. 2.6) при постоянной относительной деформации $\varepsilon = 3\,\%$.

В таблице 2.1 представлена зависимость напряжения от времени $\sigma(t)$ на основе рисунка 2.6.

Авторы работ [154, 155] используют интегральное уравнение Больцмана–Вольтера для аппроксимации полученных кривых:

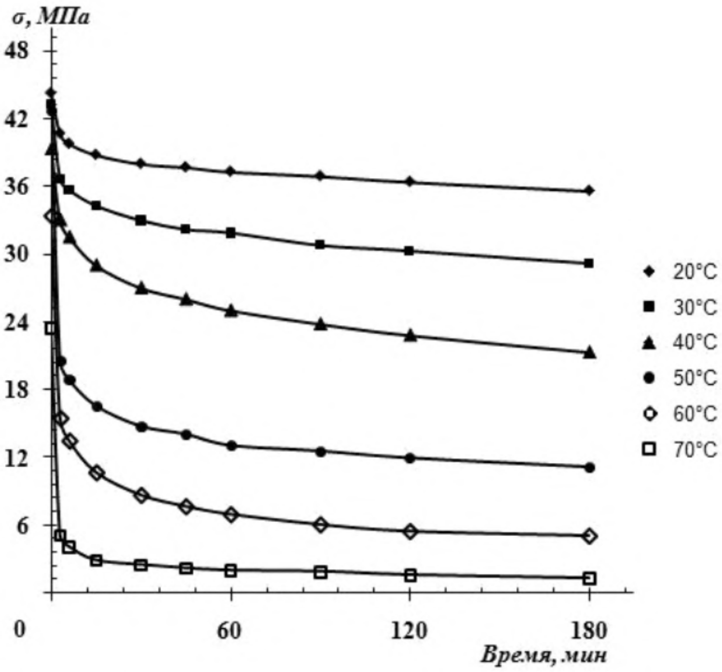


Рисунок 2.6 — Кривые релаксации вторичного ПВХ

Таблица 2.1 — Зависимость напряжения–деформации ($\sigma(t)$) для ПВХ

σ,	t, ч									
МПа	0	3	6	15	30	45	60	90	120	180
20 °C	44.4	40.8	39.8	38.8	38.0	37.7	37.3	36.9	36.4	35.6
30 °C	43.4	36.7	35.7	34.3	33.0	32.2	31.9	30.8	30.3	29.2
40 °C	39.3	32.9	31.4	29.0	27.0	25.9	24.9	23.8	22.7	21.3
50 °C	36.4	20.5	18.8	16.5	14.7	13.9	13.0	12.5	11.9	11.1
60 °C	33.4	15.4	13.4	10.6	8.61	7.63	6.95	6.02	5.42	5.05
70 °C	23.4	5.06	4.05	2.84	2.48	2.16	2.00	1.85	1.58	1.31

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \int_0^t T(\tau)\, d\tau \right],$$

где σ — напряжение в заданный (текущий) момент времени t; σ_0 — напряжение в начальный момент времени $t = 0$; τ — переменная, изменяющая свои значения от 0 до t; $T(\tau)$ — ядро релаксации.

Рассмотрим ядро, имеющее довольно сложный вид:

$$T(\tau) = -\frac{S}{k_B m} \left[\frac{1}{\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)} - \frac{1}{\ln 0.5} \right],$$

где $m = m^* \int_0^\infty T^*(\tau)\, d\tau$; $T^*(\tau)$ — переменная часть ядра; k_B — постоянная Больцмана; m^* — общее число кинетических единиц (релаксаторов и нерелаксаторов в единице объёма); α — доля релаксаторов в общем числе кинетических единиц; S_0 — величина начальной энтропии системы.

При этом, параметр α является функцией от τ:

$$\alpha = \frac{1}{\left(1 + \frac{k^*}{\beta}\tau\right)^{\beta}},$$

где $k^* = k^{n-1}$; $\beta = \frac{1}{n-1}$; n — порядок реакции взаимодействия релаксаторов; k — постоянная скорости этого взаимодействия.

Плюсом интегральной формы уравнений является удобство обработки экспериментальных данных, а также весьма точное описание процессов ползучести и релаксации. В практике, при непосредственном решении задач, возникают значительные математические трудности, в результате чего отдают предпочтение дифференциальной форме, а не интегральной.

Рассмотрим альтернативную методику определения входящих в нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича реологических параметров на основе анализа графика релаксации напряжений (см. рисунок. 2.6).

Испытания стержней производят в условиях одноосного напряженного состояния. Далее приводят выкладки при учёте только одного спектра времён релаксации полимеров. В таком случае уравнение Максвелла–Гуревича имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}, \qquad (2.56)$$

где ε_{cr} — деформация ползучести (высокоэластическая деформация); f^* — функция напряжений

$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr},$$

где E_∞ — модуль высокоэластичности.

Релаксационная вязкость η^* определяется выражением

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left\{\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right)\right\}, \qquad (2.57)$$

где η_0^* — начальная релаксационная вязкость; m^* — модуль скорости.

Полная деформация ε испытываемого стержня складывается из упругой и высокоэластической деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr} = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon_{cr}, \qquad (2.58)$$

где E — мгновенный модуль упругости.

При этом, по условиям проведения испытаний полимерного образца, полная деформация остается величиной постоянной. В нашем случае

$$\varepsilon = \text{const} = 0.03.$$

В самом начале процесса релаксации при $t = 0$ ч высокоэластические деформации отсутствуют, таким образом появляется возможность определить мгновенный модуль упругости E:

$$E = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon} = \frac{\sigma(0)}{0.03}.$$

Следовательно, из уравнения (2.58) появляется возможность найти деформации ползучести ε_{cr} в каждой точке времени:

$$\varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon - \frac{\sigma(t)}{E}. \tag{2.59}$$

Уравнение Максвелла–Гуревича (2.56) отражает скорость ползучести, поэтому следующим этапом дифференцируем выражение (2.59) во времени:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = -\frac{1}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{2.60}$$

Для удобства введём обозначение скорости ползучести в каждый момент времени через переменную $\upsilon = \frac{\partial \varepsilon_{cr}(t)}{\partial t}$. Для нахождения скорости деформаций необходимо предварительно продифференцировать напряжения $\sigma(t)$ по времени t. Так как необходимые данные получены при различных интервалах времени (см. таблицу 2.1), то для численного дифференцирования будет применён метод неопределённых коэффициентов. Для удобства записи штрихом «$'$» обозначается производная по времени t. В самом начале процесса релаксации (при $t_1 = 0$), производная напряжения по времени σ' может быть представлена линейной комбинацией напряжений по трём точкам: исследуемая точка и две соседние

$$\sigma'_1 \approx c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3. \tag{2.61}$$

Предполагается, что соотношение (2.61) выполняется точно, если функция напряжения σ является многочленом степени не выше «2», т. е. выражение (2.61) можно представить в виде

$$\sigma = 1; \qquad \sigma = t - t_1; \qquad \sigma = (t - t_1)^2. \tag{2.62}$$

Производные выражений (2.62) имеют вид

$$\sigma' = 0; \qquad \sigma' = 1; \qquad \sigma' = 2\,(t - t_1). \tag{2.63}$$

Производим подстановку выражений (2.62) и (2.63) в (2.61):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_1 - t_1) + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t1) = 1; \\ c_1(t_1 - t_1)^2 + c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t1)^2 = 2\,(t_1 - t_1). \end{cases}$$

Упрощая данное выражение, окончательно получаем:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_1) = 1; \\ c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t_1)^2 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы будут коэффициенты

$$c_1 = -\left(\frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{t_3 - t_1}\right);$$
$$c_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{t_3 - t_2};$$
$$c_3 = -\frac{1}{t_3 - t_2} + \frac{1}{t_3 - t_1}.$$

Проверкой полученных коэффициентов является рассмотрение частного случая при $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$. Тогда выражение для σ_1' записывается так:

$$\sigma_1' \approx \frac{1}{2\Delta t}\left(-3\sigma_1 + 4\sigma_2 - \sigma_3\right).$$

Для промежуточных точек ($i = 2 \ldots n-1$) выражение производной напряжения по времени можно записать:

$$\sigma_i' \approx c_1\sigma_{i-1} + c_2\sigma_i + c_3\sigma_{i+1}. \tag{2.64}$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_1, c_2, c_3 используем следующие функции:

$$\sigma = 1; \qquad \sigma = t - t_i; \qquad \sigma = (t - t_i)^2,$$

производные которых имеют вид

$$\sigma' = 0; \qquad \sigma' = 1; \qquad \sigma' = 2\left(t - t_i\right).$$

В результате может быть получена система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_{i-1} - t_i) + c_3(t_{i+1} - t_i) = 1; \\ c_1(t_{i-1} - t_i)^2 + c_3(t_{i+1} - t_i)^2 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$c_1 = -\frac{1}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i};$$
$$c_2 = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i};$$
$$c_3 = -\frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i}.$$

Проверкой полученных коэффициентов может быть частный случай, когда $t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = \Delta t$. В этом случае выражение производной напряжения по времени принимает известную форму

$$\sigma_i' \approx \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}}{2\Delta t}.$$

В крайней точке ($t = n$) производная напряжения по времени σ_n' не определяется, т. к. здесь она мало отличается от нуля

$$\sigma_n' \approx 0.$$

В конце процесса релаксации скорость роста высокоэластической деформации равна нуля, в результате чего можно определить величину модуля высокоэластичности:

$$\upsilon = \frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*} = 0;$$
$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr}; \tag{2.65}$$
$$E_\infty = \frac{\sigma(\infty)}{\varepsilon^{cr}(\infty)}.$$

Таким образом, уже известны два параметра уравнения Максвелла–Гуревича: мгновенный модуль упругости E и модуль высокоэластичности E_∞. Зная их, следующим этапом определяют коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^* и модуль скорости m^*. Определяем релаксационную вязкость на каждом временном этапе:

$$\eta^*(t) = \frac{f^*(t)}{\upsilon(t)},$$

где $f^*(t)$ вычисляем в соответствии с выражением (2.65).

Далее необходимо прологарифмировать выражение для релаксационной вязкости η^* в (2.57):

$$\ln \eta^* = \ln\left[\eta_0^* \exp\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right)\right] = \ln \eta_0^* - \frac{|f^*|}{m^*}; \tag{2.66}$$

Анализируя выражение (2.66), делаем вывод, что между величинами $y = \ln \eta^* = y$ и $x = |f^*|$ имеется линейная зависимость

$$y = ax + b, \tag{2.67}$$

где $a = -\dfrac{1}{m^*}$; $b = \ln\eta_0^*$.

Получив ряд значений $\ln\eta^*$ для соответствующих функций напряжений $|f^*|$, можно подобрать коэффициенты a и b выражения (2.67), определив которые, найдём, соответственно, модуль скорости m^* и начальную релаксационную вязкость η_0^*.

Кривая зависимости величины $\ln\eta^*$ от функции напряжений $|f^*|$, полученная при температуре $T = 20°\text{C}$, показана на рисунке 2.7. Отклонение линии тренда (пунктирная прямая) от полученных зависимостей (сплошная кривая) объясняется рядом факторов, в том числе, малым количеством точек на исходной релаксационной кривой, которое сказывается на точности численного дифференцирования.

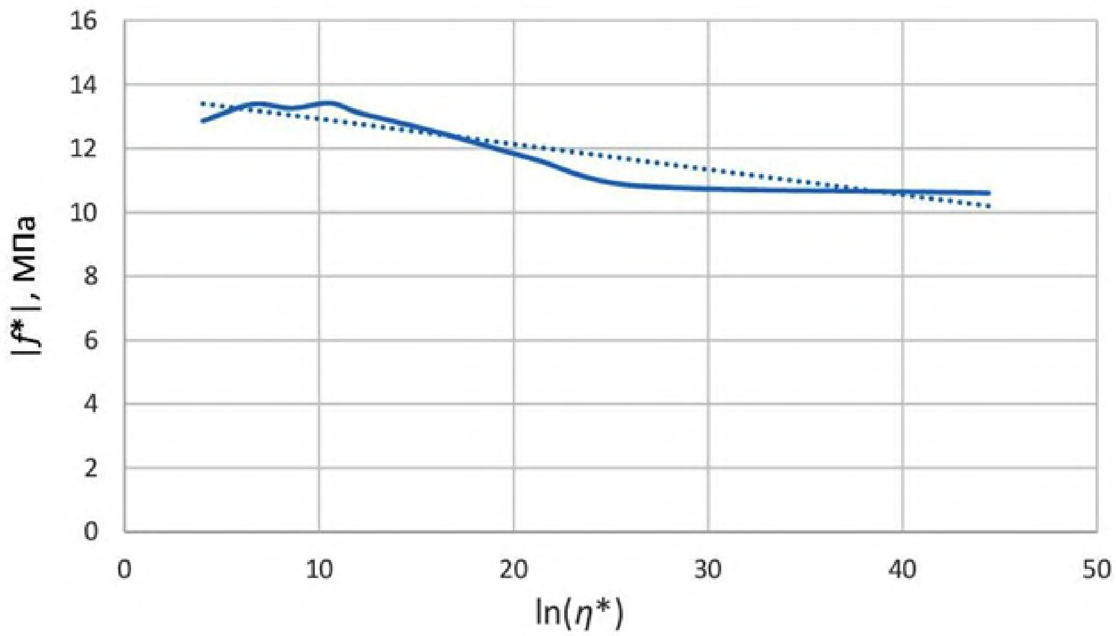


Рисунок 2.7 — Изменение величины η^* в зависимости от f^*

Таким образом, определение всех параметров уравнения Максвелла–Гуревича возможно только по данным зависимости релаксации напряжений от времени $\sigma(t)$. Результаты определения параметров приведены в таблице 2.2. Далее, согласно данным в настоящей таблице, были построены соответствующие графики (рисунки 2.8–2.11).

Таблица 2.2 — Упругие и релаксационные параметры вторичного поливинилхлорида, определённые при различных температурах

T, °C	20	30	40	50	60	70
E, МПа	1480	1450	1310	1210	1110	780
E_∞, МПа	5990	2975	1550	532	198	46.3
m^*, МПа	12.6	12.1	13.9	11.2	11.8	7.76
$\eta_0^* \cdot 10^{-5}$, МПа·мин	9.06	5.17	2.81	0.891	0.48	0.256

На основании анализа графиков изменения упругих и релаксационных параметров ПВХ, представленных на рисунках 2.8–2.11 сплошными линиями, устанавливаем, что все параметры, за исключением модуля скорости, являются значительной функцией температуры, т. е. — характерной чертой полимерных материалов.

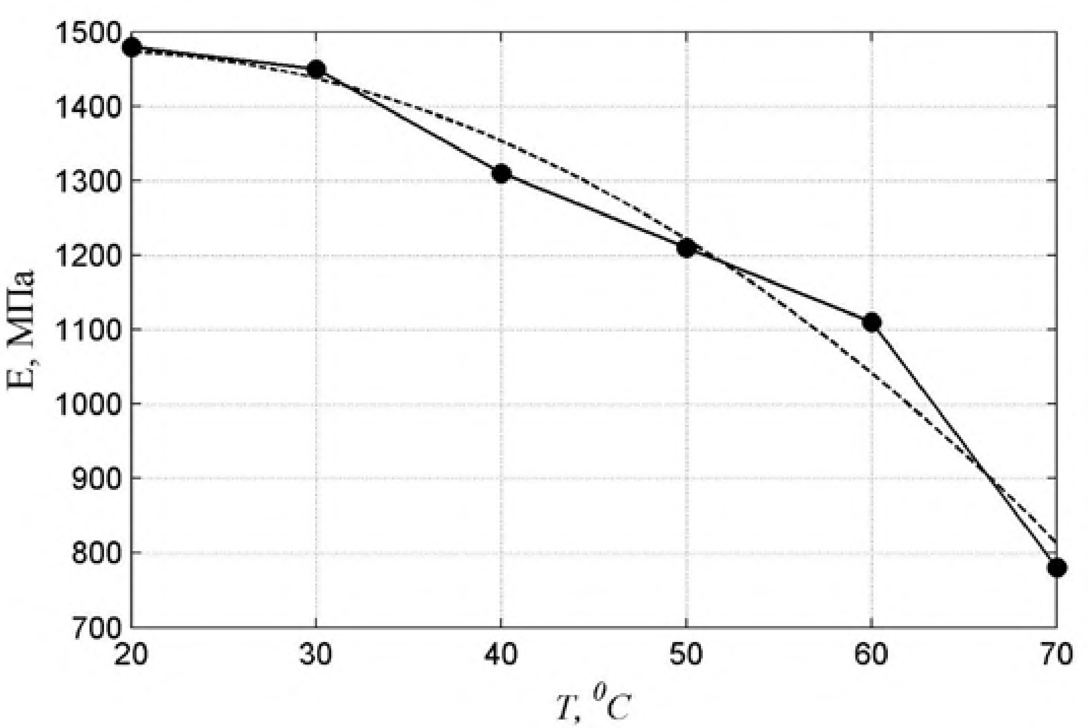


Рисунок 2.8 — Зависимость модуля упругости *E* вторичного ПВХ от температуры

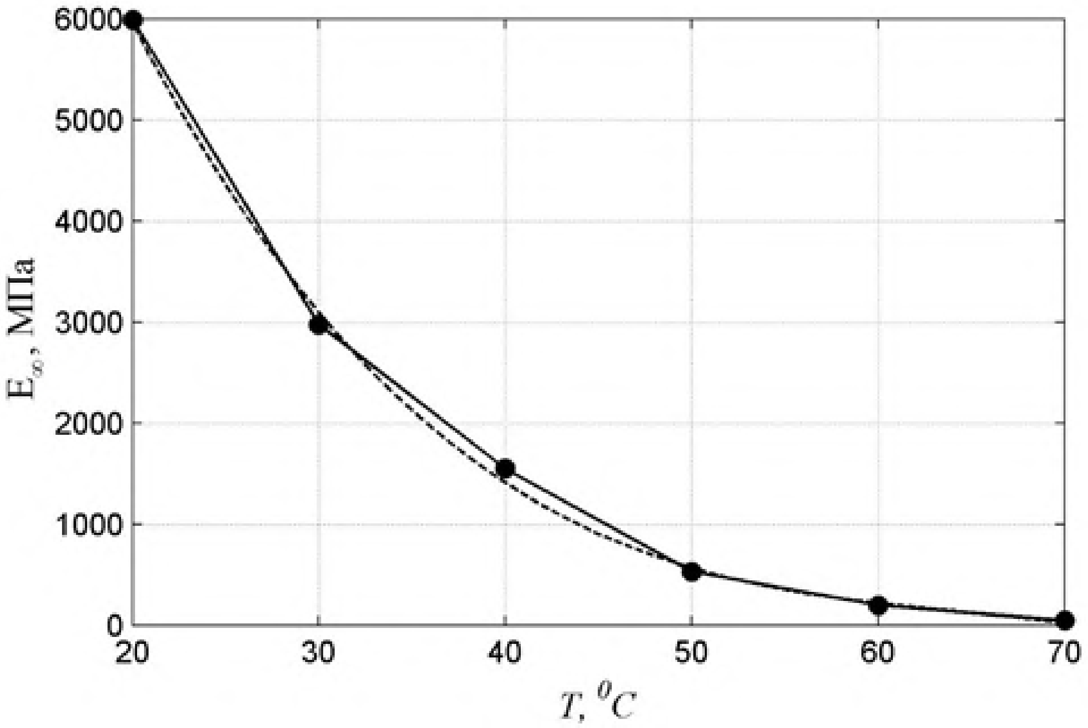


Рисунок 2.9 — Зависимость модуля высокоэластичности E_∞ вторичного ПВХ от температуры

Имея распределение физико-механических параметров, можно определить закон аппроксимирующих кривых. Окончательно, параметры уравнения Максвелла–Гуревича для ПВХ имеют следующие зависимости от температуры:

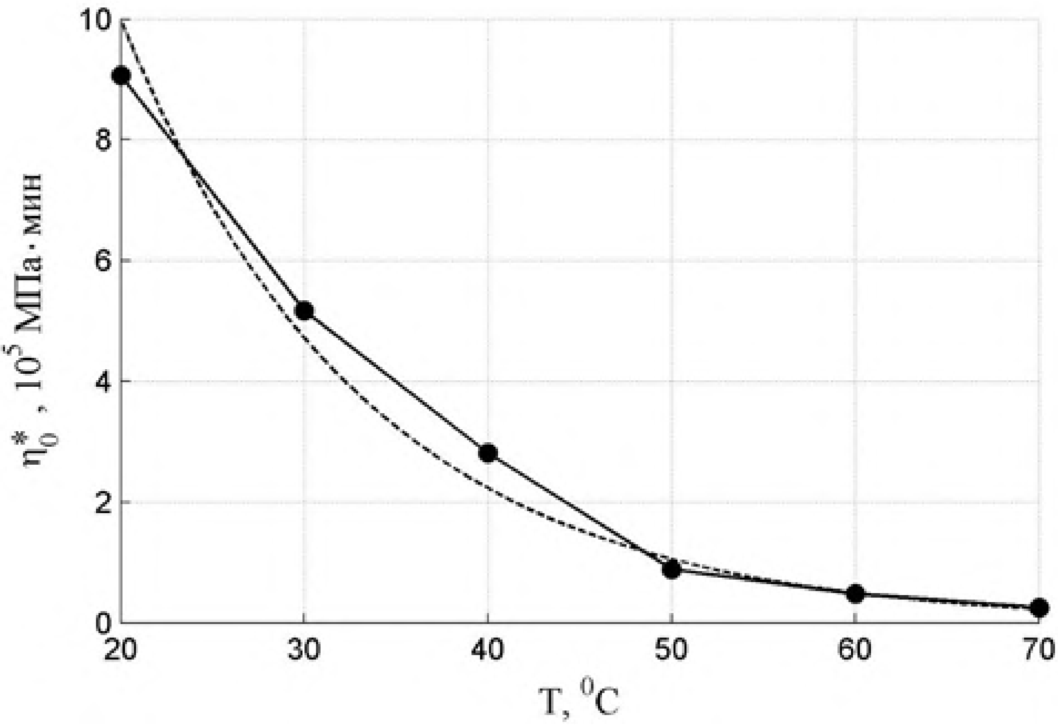


Рисунок 2.10 — Зависимость коэффициента начальной вязкости η_0^* вторичного ПВХ от температуры

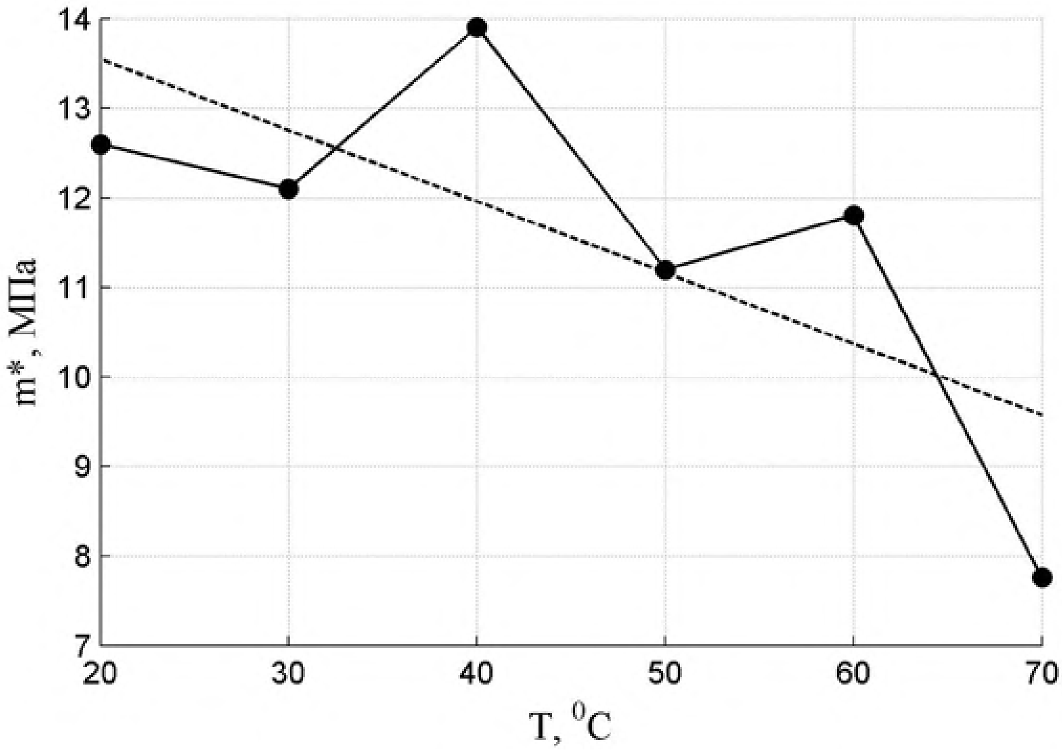


Рисунок 2.11 — Зависимость модуля скорости m^* вторичного ПВХ от температуры

$$
\begin{aligned}
&E(T) = -0.2393T^2 + 8.3357T + 1402.6 \text{ [МПа]};\\
&E_\infty(T) = -0.0575T^3 + 11.095T^2 - 732T + 16618 \text{ [МПа]};\\
&\eta_0^*(T) = 44.78 \cdot 10^5 e^{-0.075T} \text{ [МПа} \cdot \text{мин]};\\
&m^*(T) = -0.0794T + 15.134 \text{ [МПа]}.
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Выражение (2.68) аппроксимирует зависимости модуля упругости от температуры с достоверностью $R^2 = 0.976$, модуля высокоэластичности — с достоверностью $R^2 = 0.9986$, коэффициента начальной релаксационной вязкости — с достоверностью $R^2 = 0.989$.

С целью оценки достоверности полученных коэффициентов решили задачу расчёта релаксации напряжения с течением времени в стержне на основе зависимостей (2.68). Подробная методика решения задачи релаксации напряжений будет рассмотрена в параграфе 4.1.2, на стр. 109. Сопоставление экспериментальных кривых с результатами теоретического решения задачи релаксации напряжений представлено на рисунке 2.12. Треугольные маркеры показывают значения напряжений по результатам проведения эксперимента, сплошные кривые — построены на основе уравнения Максвелла–Гуревича. Проанализировав построенные графики, видим очень хорошее совпадение экспериментальных данных с результатами решения задачи при температурах $T = 20, 30$ и $60\,^\circ\mathrm{C}$, при остальных температурных режимах совпадение весьма удовлетворительное.

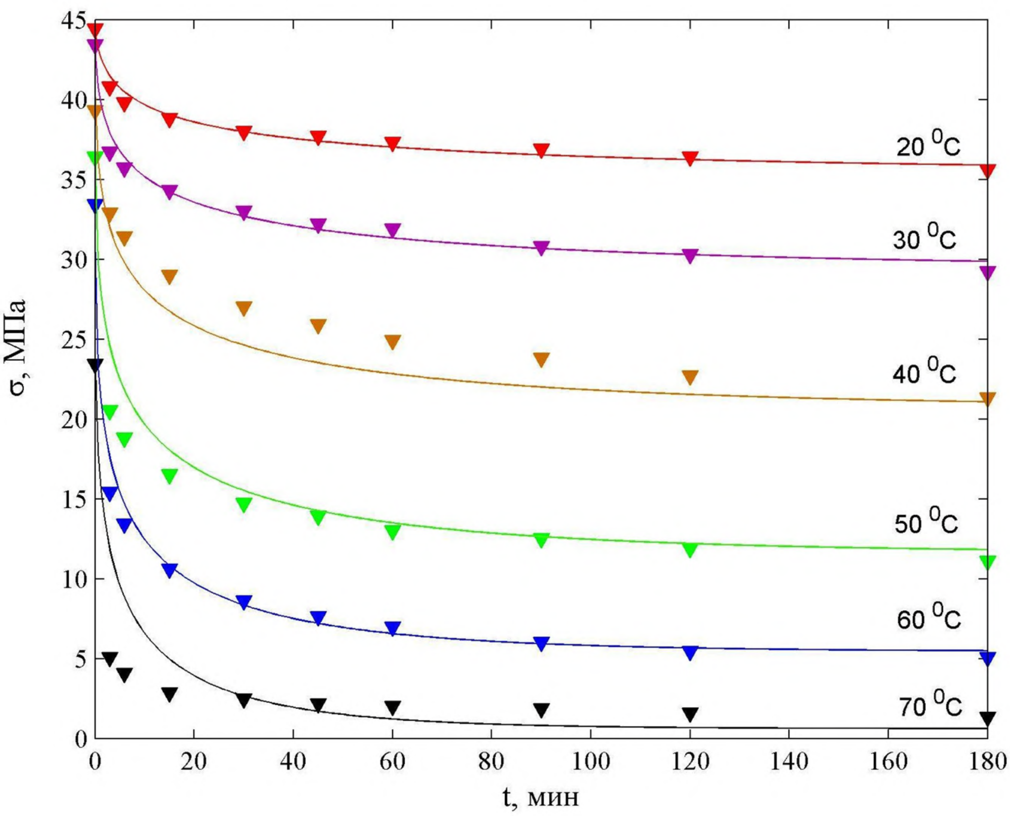


Рисунок 2.12 — Сопоставление экспериментальных кривых с результатами теоретических расчётов

2.2.2 Методика расчета задач с учётом высокоэластических деформаций материала

Все рассмотренные в диссертации задачи, в которых расчёт производится с учётом высокоэластических деформаций, решают численно одним из двух методов: конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ). Представленный далее алгоритм расчёта справедлив для обоих методов.

Задачи рассматривают несвязные, т. е. на первом этапе определяют температурное поле в полимерном теле, на втором — вычисляют упругие и реологические параметры полимера в каждой точке (в случае МКР) и каждом конечном элементе (в случае МКЭ) в зависимости от распределения температурного поля. На третьем этапе определяют напряжённо-деформированное состояние в исследуемом теле.

Третий этап состоит из нескольких подэтапов. Связано это с тем, что нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича (2.56) содержит неизвестную высокоэластическую деформацию и в левой части (скорость высокоэластической деформации), и в правой части (в функции напряжений и экспоненциальной зависимости коэффициента релаксационной вязкости). Таким образом используется пошаговый метод, при котором в начальный момент времени ($t = 0$) считают, что все высокоэластические деформации отсутствуют, т. е. $\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s} = 0$. Остаётся определить напряжённо-деформированное состояние исходя только из упругой работы расчётной модели и скорость высокоэластической деформации на основе уравнения Максвелла–Гуревича (2.56). Предполагая, что временной интервал ($t = \Delta t$) достаточно мал, высокоэластическую деформацию на следующем временном интервале можно вычислить так:

$$\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t_{i+1}) = \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t)}{\partial t}(t_{i+1} - t).$$

Таким образом, используя данное уравнение можно определить на следующем временном этапе высокоэластическую деформацию, а зная её — напряжённо-деформированное состояние. Далее процесс повторяется циклично.

2.2.3 Анализ соответствия данных по полимерам в различных источниках

Одной из неприятных особенностей полимерных материалов является существенный разброс из физико-механических параметров. Особенно это касается вязкости материла; так вязкость одного и того же материала может варьироваться на 2 порядка. Другой особенностью является отличие приведённых характеристик материала в различных источниках.

В диссертационной работе большинство исследований посвящены телам из эпоксидной смолы термического отверждения ЭДТ-10 (далее — ЭДТ-10). Связано это с её широкой доступностью, изученностью, возможностью изготовления образцов для проведения опытных испытаний и сравнения полученных результатов с известными решениями.

Во многих источниках параметры для ЭДТ-10 значительно отличаются.

В источниках [156, 157] приводится ссылка на работу В. Ф. Бабича [140] со следующими выражениями для физико-механических параметров ЭДТ-10:

$$
\begin{aligned}
&E = 4\,000\exp\left(-\exp\frac{T_K - 339}{36.7}\right)\text{ МПа};\\
&E_{\infty 1} = \begin{cases} 2.4\cdot 10^6\dfrac{1}{T_K} - 6120\,\text{МПа для } T_K < 350\,K;\\ \quad 2.23T_K - 640\,\text{МПа для } T_K \geq 350\,K;\end{cases}\\
&E_{\infty 2} = 0.1E_{\infty 1};\\
&m_1^* = m_2^* = -0.0155T_K + 7.73\,\text{МПа};\\
&\eta_{01}^* = 36\,000\exp\left(\frac{9\,500}{T_K} - 20\right)\text{ МПа}\cdot\text{с};\\
&\eta_{02}^* = 36\,000\exp\left(\frac{35\,400}{T_K} - 90\right)\text{ МПа}\cdot\text{с};\\
&\nu = \text{const} = 0.37.
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.69) приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 — Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.69)

T, °C	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
E, МПа	3 218	3 006	2 749	2 445	2 095	1 711
$E_{\infty 1}$, МПа	2 361	2 071	1 801	1 548	1 310	1 087
$E_{\infty 2}$, МПа	236.1	207.1	180.1	154.8	131.0	108.7
$m_{1(2)}^*$, МПа	3.3435	3.1885	3.0335	2.8785	2.7235	2.5685
η_{01}^*, МПа·ч	7 814 486	2 485 025	852 323	313 020	122 314	50 570
η_{02}^*, МПа·ч	$1.73\cdot 10^{16}$	$2.42\cdot 10^{14}$	$4.49\cdot 10^{12}$	$1.08\cdot 10^{11}$	$3.24\cdot 10^{9}$	$1.21\cdot 10^{8}$
T, °C	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
E, МПа	1 311	924.8	584.6	320.1	145,1	51.36
$E_{\infty 1}$, МПа	877.1	678.9	491.6	314.3	214.1	236.4
$E_{\infty 2}$, МПа	87.71	67.89	49.16	31.43	21.41	23.64
$m_{1(2)}^*$, МПа	2.4135	2.2585	2.1035	1.9485	1.7935	1.6385
η_{01}^*, МПа·ч	22 013	10 044	4 786	2 373	1 220	649.1
η_{02}^*, МПа·ч	$5.44\cdot 10^{6}$	$2.92\cdot 10^{5}$	18 458	1351	113.4	10.79

Вместо формулы (2.69) профессором Р. А. Турусовым в работе [156] приводится несколько упрощённая её форма:

$$
\begin{aligned}
&E = -18.2T_K + 8\,200\,\text{МПа};\\
&E_{\infty 1} = \begin{cases} 2.4\cdot 10^6 \dfrac{1}{T_K} - 6120\,\text{МПа для } T_K < 370\,K;\\ 2.23T_K - 458.6\,\text{МПа для } T_K \geq 370\,K;\end{cases}\\
&E_{\infty 2} = 0.1E_{\infty 1};\\
&m_1^* = m_2^* = -0.0155T_K + 7.73\,\text{МПа};\\
&\eta_{01}^* = 36000\exp\left(\frac{9\,500}{T_K} - 21\right)\,\text{МПа}\cdot\text{с};\\
&\eta_{02}^* = 36000\exp\left(\frac{35\,400}{T_K} - 91.5\right)\,\text{МПа}\cdot\text{с};\\
&\nu = \text{const} = 0.37.
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.70) приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 — Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.70)

T, °C	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
E, МПа	3 049	2 867	2 685	2 503	2 321	2 139
$E_{\infty 1}$, МПа	2 361	2 071	1 801	1 548	1 310	1 087
$E_{\infty 2}$, МПа	236.1	207.1	180.1	154.8	131.0	108.7
$m_{1(2)}^*$, МПа	3.3435	3.1885	3.0335	2.8785	2.7235	2.5685
η_{01}^*, МПа·ч	$2.87\cdot 10^6$	914 190	313 552	115 154	44 997	18 604
η_{02}^*, МПа·ч	$3.87\cdot 10^{15}$	$5.41\cdot 10^{13}$	$1.00\cdot 10^{12}$	$2.40\cdot 10^{10}$	$7.24\cdot 10^{8}$	$2.69\cdot 10^{7}$
T, °C	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
E, МПа	1 957	1 775	1 593	1 411	1 229	1 047
$E_{\infty 1}$, МПа	877.1	678.9	491.6	314.3	395.5	417.8
$E_{\infty 2}$, МПа	87.71	67.89	49.16	31.43	39.55	41.78
$m_{1(2)}^*$, МПа	2.4135	2.2585	2.1035	1.9485	1.7935	1.6385
η_{01}^*, МПа·ч	8 098	3 695	1 761	872,8	448,9	238,8
η_{02}^*, МПа·ч	1 214 183	65 243	4 119	301.5	25.30	2.408

Профессор Р. А. Турусов [158] в своей диссертационной работе также приводится выражение для физико-механических параметров ЭДТ-10:

$$
\begin{aligned}
&E = -1.82T_K + 820\,\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2};\\
&E_{\infty 1} = 2.4\cdot 10^5 \frac{1}{T_K} - 612\,\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2};\\
&E_{\infty 2} = 0.1E_{\infty 1};\\
&m_1^* = m_2^* = -1.55\cdot 10^{-3}T_K + 0.773\,\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2};\\
&\eta_{01}^* = \exp\left(9.5\cdot 10^3 - 21\right)\,\frac{\text{кг}\cdot\text{ч}}{\text{мм}^2};\\
&\eta_{02}^* = \exp\left(3.54\cdot 10^4 - 91.5\right)\,\frac{\text{кг}\cdot\text{ч}}{\text{мм}^2}.
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.71) приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5 — Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.71)

T, °C	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
E, МПа	3 049	2 867	2 685	2 503	2 321	2 139
$E_{\infty 1}$, МПа	2 361	2 071	1 801	1 548	1 310	1 087
$E_{\infty 2}$, МПа	236.1	207.1	180.1	154.8	131.0	108.7
$m^*_{1(2)}$, МПа	3.344	3.189	3.034	2.879	2.724	2.569
η^*_{01}, МПа·ч	$2.87 \cdot 10^6$	914 190	313 552	115 154	44 997	18 604
η^*_{02}, МПа·ч	$3.87 \cdot 10^{15}$	$5.41 \cdot 10^{13}$	$1.00 \cdot 10^{12}$	$2.40 \cdot 10^{10}$	$7.24 \cdot 10^8$	$2.69 \cdot 10^7$
T, °C	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
E, МПа	1 957	1 775	1 593	1 411	1 229	1 047
$E_{\infty 1}$, МПа	877.1	678.9	491.6	314.3	146.3	-13.13
$E_{\infty 2}$, МПа	87.71	67.89	49.16	31.43	14.64	-1.313
$m^*_{1(2)}$, МПа	2.4135	2.2585	2.1035	1.9485	1.7935	1.6385
η^*_{01}, МПа·ч	8 098	3 695	1 761	872,8	448,9	238,8
η^*_{02}, МПа·ч	1 214 183	65 243	4 119	301.5	25.30	2.408

Также профессор Р. А. Турусов [158] в той же диссертационной работе приводит ещё более упрощённое выражение для физико-механических параметров ЭДТ-10, учитывающее только первый спектр времён релаксации полимера:

$$\begin{aligned} E &= -1.75T_C + 352.5\,\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2};\\ E_{\infty 1} &= -3T_C + 315\,\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2};\\ m_1^* &= -0.0011T_C + 0.475\,\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2};\\ \eta^*_{01} &= 10443\exp\left(-0.0275T_C\right)\,\frac{\text{кг}\cdot\text{ч}}{\text{мм}^2}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

В формулах (2.69)–(2.72) обозначены: T_K — температура тела в градусах Кельвина; T_C — температура тела в градусах Цельсия.

Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.71) приведены в таблице 2.5.

Анализ приведённых данных в таблицах 2.3–2.6 показывает, что физико-механические параметры для одного и того же материала сильно отличаются даже в рамках одного исследователя. Наибольшее отличие можно наблюдать как в модуле высокоэластичности E_∞ (в выражениях (2.71) и (2.72) он принимает отрицательное значение при температуре 120 °C), так и коэффициенте начальной релаксационной вязкости и при первой спектре времён релаксации η^*_{01}, и при втором η^*_{02}.

Таблица 2.6 — Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые согласно выражению (2.72)

T, °C	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
E, МПа	3 350	3 175	3 000	2 825	2 650	2 475
$E_{\infty 1}$, МПа	2 850	2 550	2 250	1 950	1 650	1 350
$m^*_{1(2)}$, МПа	4.64	4.53	4.42	4.31	4.2	4.09
η^*_{01}, МПа·ч	79 322	60 251	45 765	34 762	26 404	20 056
T, °C	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
E, МПа	2 300	2 125	1 950	1 775	1 600	1 425
$E_{\infty 1}$, МПа	1 050	750	450	150	-150	-450
$m^*_{1(2)}$, МПа	3.98	3.87	3.76	3.65	3.54	3.43
η^*_{01}, МПа·ч	15 234	11 571	8 789	6 676	5 071	3 852

2.2.4 Лабораторные испытания по определению физико-механических параметров полимера

Как было показано в параграфе 2.2.3, разброс физико-механических параметров полимера в различных источниках может быть весьма большим. Следовательно, возникает необходимость в определении искомых параметров для конкретного образца.

Стандартные лопатки, изготовленные из эпоксидной смолы ЭДТ-10 были испытаны в универсальной испытательной машине WP-300 с компьютерной системой сбора и обработки данных GUNT. Все испытания проводились при температуре 20 °C. Лопатки были закреплены таким образом, чтобы рабочая часть имела следующие габаритные размеры $50\times10\times4$ мм. Испытания проводились при пяти режимах нагружения, в каждом по 3 испытания, по результатам которых были построены графики релаксации напряжений в теле (рисунок 2.13, пунктирные линии). Общее время испытаний составило 2.75 ч, однако временной интервал между последними двумя снятиями показателей составил 2.5 ч.

На основе полученных опытных данных и методики определения физико-механических параметров, изложенной в параграфе 2.2, были получены упругие и высокоэластические параметры эпоксидной смолы для каждого из режимов, которые приведены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 — Физико-механические параметры ЭДТ-10, определённые в результате лабораторных испытаний; ε_0 — деформация образца при каждом режиме испытания

ε_0, **%**	E, МПа	E_∞, МПа	m^*, МПа	η^*_0, МПа · ч
3.5	2 114.30	3 473.50	17.71	3 638.90
2.7	2 407.40	4 870.80	16.05	6 167.10
1.9	2 842.10	8 526.30	17.36	7 814.30
1.2	3 083.30	13 214.00	14.80	6 396.50
0.8	3 102.50	20 407.00	7.71	42 075.00

Следующим этапом были построены теоретические кривые по определенным физико-механическим параметрам (таблица 2.7, сплошная линия).

Результаты наложения опытных и теоретических кривых говорят о достоверности методики определения параметров полимеров, в том числе ЭДТ-10.

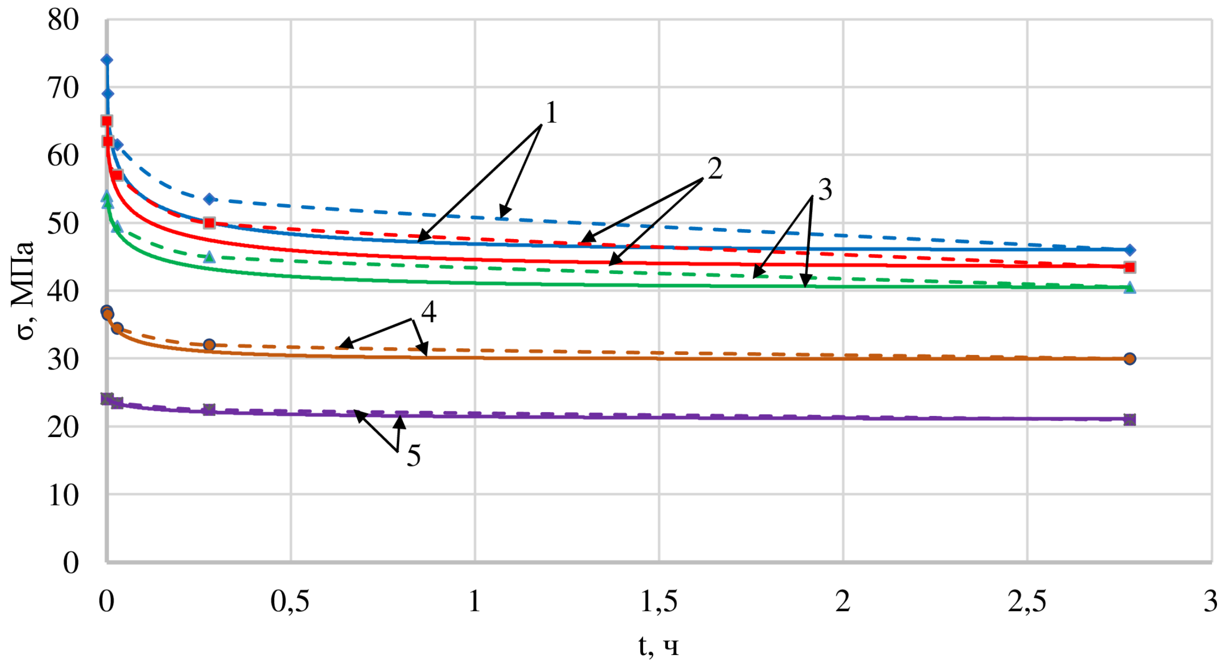


Рисунок 2.13 — Кривые релаксации эпоксидной смолы ЭДТ-10: пунктирная линия — лабораторные испытания; сплошная линия — результаты теоретической кривой, построенной на основе полученных физико-механических параметров полимера

Анализ данных таблицы 2.7 показывает, что наилучшее соответствие данным, приведённым в параграфе 2.2.3, дают определённые при минимальной начальной деформации образцов, соответствующей величине $\varepsilon = 0.8\,\%$. Объясняется это тем, что во время дополнительного растяжения образцов в них всё равно образуются высокоэластические деформации, неуловимые до начала снятия показаний.

2.2.5 Определение физико-механических свойств полимера как функции нескольких факторов

Проведён анализ ряда графиков релаксации напряжений эпокидиановой смолы термического отверждения ЭДТ-10, представленный в работе А. Л. Рабиновича [96]. Представленные экспериментальные диаграммы релаксации напряжений ЭДТ-10, полученные при различных температурах и деформациях, были обратно переведены в табличную форму представления и данных, которая в дальнейшем и позволила определить соответствующие физико-механические параметры полимера (см. табл. 2.8).

Сопоставление экспериментальных значений и теоретической кривой релаксации ЭДТ–10, полученной по определённым и представленным в табл. 2.8 физико–механическим параметрам полимера, приведены на рисунке 2.14.

Аппроксимация полученных данных в таблице 2.8 проведена при помощи полинома, имеющего 4-й порядок относительно полной начальной деформации ε и 3-й порядок относительно температуры T (рисунки 2.15–2.18):

Таблица 2.8 — Физико-механические параметры ЭДТ–10, определённые в результате лабораторных испытаний; ε_0 — деформация образца при каждом режиме испытания

№ кривой	ε_0	σ_0, МПа	E, МПа	E_∞, МПа	m^*, МПа	η_0^*, МПа · ч
			$T = 20\,^\circ$C			
1	0.0080	24.1320	3 016.5000	22 660.0000	5.4852	132 160.0000
2	0.0120	35.5460	2 962.2000	14 356.0000	9.3922	77 271.0000
3	0.0155	46.0970	2 974.0000	9 243.5000	11.0009	40 711.0000
4	0.0195	53.8970	2 763.9000	7 006.4000	11.8612	39 450.0000
5	0.0270	60.7950	2 251.7000	4 787.5000	16.6140	17 514.0000
6	0.0350	74.4990	2 128.5000	2 829.1000	16.4033	9 712.9000
			$T = 45\,^\circ$C			
7	0.009	25.0490	2 783.2000	4 925.4000	5.3970	31 723.0000
8	0.014	33.3350	2 381.1000	2 861.5000	8.8537	15 498.0000
9	0.021	42.7570	2 036.0000	2 195.5000	9.8992	12 797.0000
10	0.037	57.8470	1 563.4000	1 341.6000	12.3396	5 829.8000
			$T = 60\,^\circ$C			
11	0.0075	14.5410	1 938.8000	1 242.8000	7.9087	4 554.1000
12	0.01	20.9870	2 098.7000	1 726.3000	6.4316	7 620.2000
13	0.0155	31.1190	2 007.7000	1 160.8000	10.8807	4 308.5000
14	0.021	33.7080	1 605.1000	985.0317	15.0515	3 069.4000
15	0.031	49.0270	1 581.5000	639.7923	20.8475	1 603.4000
			$T = 80\,^\circ$C			
16	0.01	15.3480	1 534.8000	424.2910	5.4376	1 536.8000
17	0.018	24.8760	1 382.0000	215.5943	5.3007	2 264.8000
18	0.024	34.2340	1 426.4000	212.7894	6.7913	2 308.9000
19	0.034	36.0770	1 061.1000	278.9503	15.2686	180.5931

$$f(\varepsilon,T) = p_{00} + p_{10}\cdot\varepsilon + p_{01}\cdot T + p_{20}\cdot\varepsilon^2 + p_{11}\cdot\varepsilon\cdot T + p_{02}\cdot T^2 + p_{30}\cdot\varepsilon^3 + p_{21}\cdot\varepsilon^2\cdot T + \\ + p_{12}\cdot\varepsilon\cdot T^2 + p_{03}\cdot T^3 + p_{40}\cdot\varepsilon^4 + p_{31}\cdot\varepsilon^3\cdot T + p_{22}\cdot\varepsilon^2\cdot T^2 + p_{13}\cdot\varepsilon\cdot T^3. \quad (2.73)$$

Для модуля упругости $E(\varepsilon,T)$, коэффициенты уравнения (2.73) примут вид при коэффициенте достоверности $R = 0.9984$: $p_{00} = -88.64$; $p_{10} = 2.035\cdot10^5$; $p_{01} = 275.3$; $p_{20} = -2.43\cdot10^6$; $p_{11} = -1.696\cdot10^4$; $p_{02} = -5.948$; $p_{30} = -5.049\cdot10^{-5}$; $p_{21} = 1.362\cdot10^5$; $p_{12} = 307.3$; $p_{03} = 0.03424$; $p_{40} = 0.0005179$; $p_{31} = 8.064\cdot10^{-8}$; $p_{22} = -1456$; $p_{13} = -1.55$.

Для модуля высокоэластичности $E_\infty(\varepsilon,T)$, коэффициенты уравнения (2.73) примут вид при коэффициенте достоверности $R = 1$: $p_{00} = 8.321\cdot10^4$; $p_{10} = -5.052\cdot10^6$; $p_{01} = -2860$; $p_{20} = 8.093\cdot10^7$; $p_{11} = 1.652\cdot10^5$; $p_{02} = 31.21$; $p_{30} = -1.409\cdot10^{-6}$; $p_{21} = -2.457\cdot10^6$; $p_{12} = -1552$; $p_{03} = -0.1042$; $p_{40} = -8.552\cdot10^{-5}$; $p_{31} = 9.518\cdot10^{-8}$; $p_{22} = 1.824\cdot10^4$; $p_{13} = 3.346$.

Для модуля скорости $m^*(\varepsilon,T)$, коэффициенты уравнения (2.73) примут вид при коэффициенте достоверности $R = 0.9999$: $p_{00} = -11.16$; $p_{10} = 3219$; $p_{01} = 0.7507$; $p_{20} = -8238$;

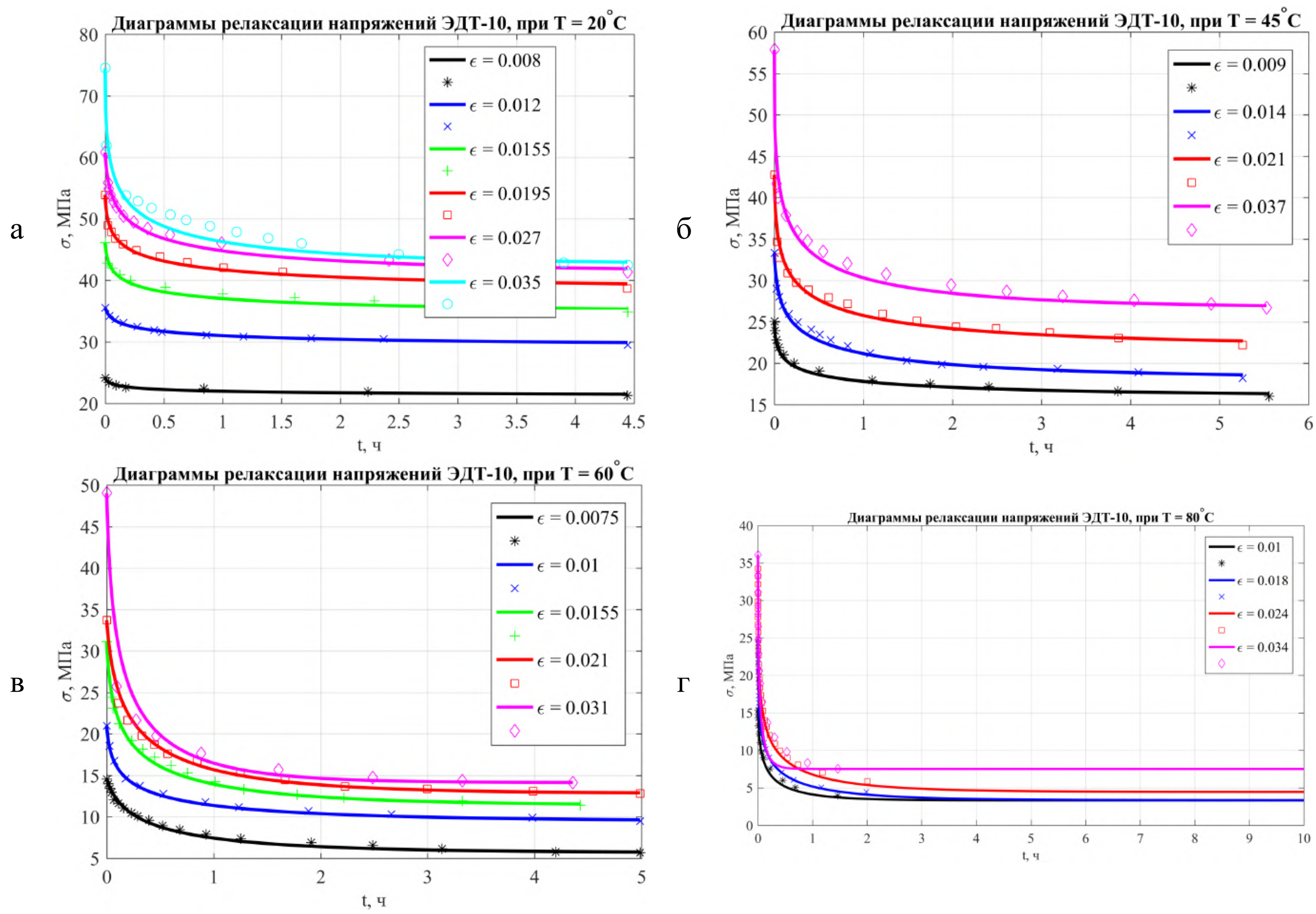


Рисунок 2.14 — Сопоставление экспериментальных значений и теоретической кривой релаксации ЭДТ–10, полученной по определённым и представленным в табл. 2.8 физико–механическим параметрам полимера при различных температурах: а — при $T = 20\,^\circ$C; б — при $T = 45\,^\circ$C; в — при $T = 60\,^\circ$C; г — при $T = 80\,^\circ$C

$p_{11} = -175.7$; $p_{02} = -0.01699$; $p_{30} = -2.132\cdot10^{-8}$; $p_{21} = -622.9$; $p_{12} = 4.004$; $p_{03} = 0.0001395$; $p_{40} = 2.492\cdot10^{-7}$; $p_{31} = -2.419\cdot10^{-10}$; $p_{22} = 13.7$; $p_{13} = -0.03063$.

Для коэффициента начальной релаксационной вязкости $\eta_0^*(\varepsilon, T)$, коэффициенты уравнения (2.73) примут вид при коэффициенте достоверности $R = 1$: $p_{00} = 4.464\cdot10^5$; $p_{10} = -3.016\cdot10^7$; $p_{01} = -1.297\cdot10^4$; $p_{20} = 5.056\cdot10^8$; $p_{11} = 9.049\cdot10^5$; $p_{02} = 98.28$; $p_{30} = 1.276\cdot10^{-5}$; $p_{21} = -1.475\cdot10^7$; $p_{12} = -7155$; $p_{03} = -0.0756$; $p_{40} = -0.0005269$; $p_{31} = 1.709\cdot10^{-7}$; $p_{22} = 1.04\cdot10^5$; $p_{13} = 7.648$.

В практических расчётах более удобно использовать функциональную зависимость только от одного переменного. Поэтому полином (2.73) удобно записать как функцию от постоянной деформации $\varepsilon = 0.008$ и от температуратуры $T, ^\circ$C:

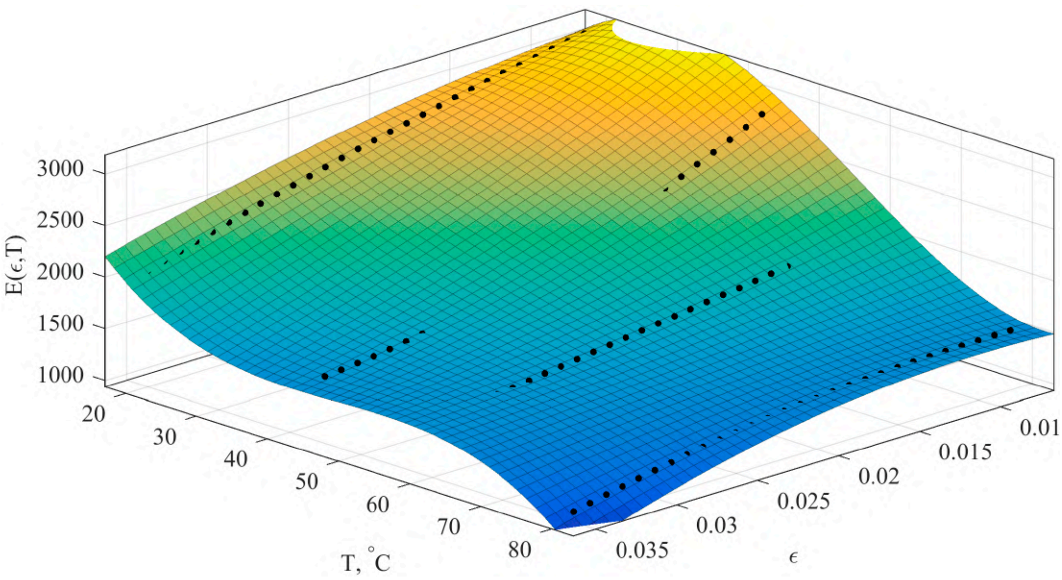


Рисунок 2.15 — Аппроксимация модуля упругости E смолы ЭДТ–10 от начальной деформации ε_0 и температуры T, °C полинома (2.73)

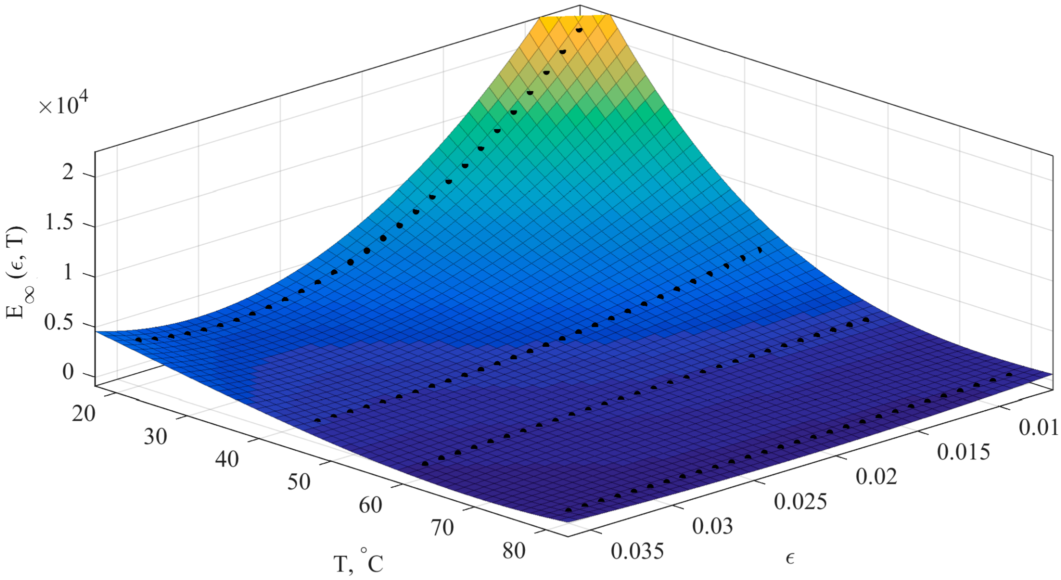


Рисунок 2.16 — Зависимость модуля высокоэластичности E_∞ смолы ЭДТ–10 от начальной деформации ε_0 и температуры T, °C полинома (2.73)

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon=0.008,T) &= 0.0218\cdot T^3-3.5828\cdot T^2+148.3368\cdot T+1383.8,\ \text{МПа};\\
E_\infty(\varepsilon=0.008,T) &= -0.0774\cdot T^3+19.9614\cdot T^2-1695.6\cdot T+47974,\ \text{МПа};\\
m^*(\varepsilon=0.008,T) &= -1.0554\cdot 10^{-4}\cdot T^3+0.0159\cdot T^2-0.6948\cdot T+14.0648,\ \text{МПа};\\
\eta_0^*(\varepsilon=0.008,T) &= -0.0144\cdot T^3+47.6960\cdot T^2-6674.8\cdot T+237480,\ \text{МПа}\cdot\text{ч}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Для оценки достоверности полученных физико–механических параметров, в таблице 2.9 приводятся значения, полученные при различных температурах.

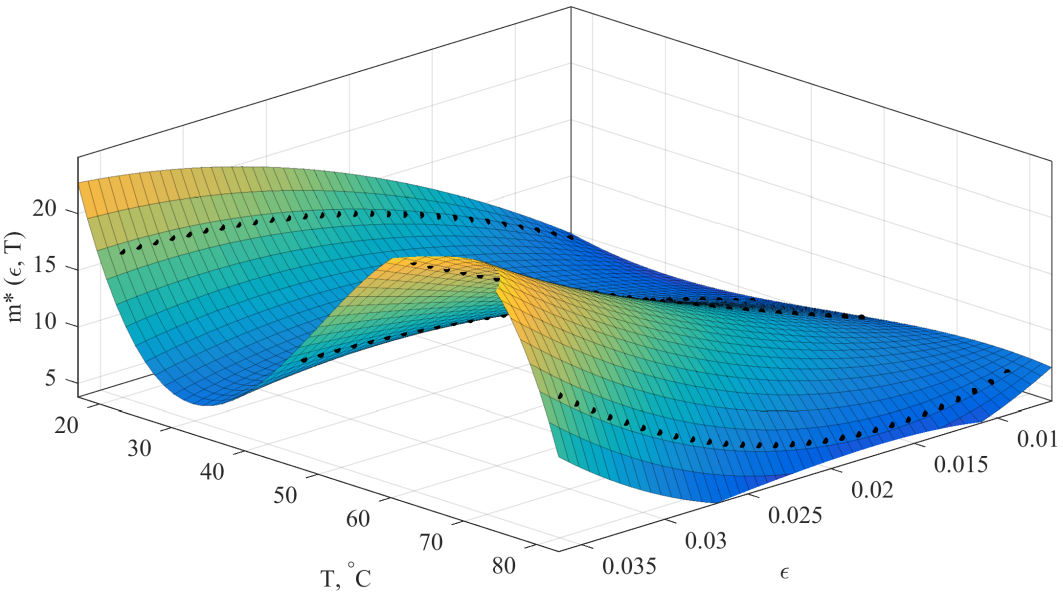


Рисунок 2.17 — Зависимостьмодуля скорости m^* смолы ЭДТ–10 от начальной деформации ε_0 и температуры T, °C полинома (2.73)

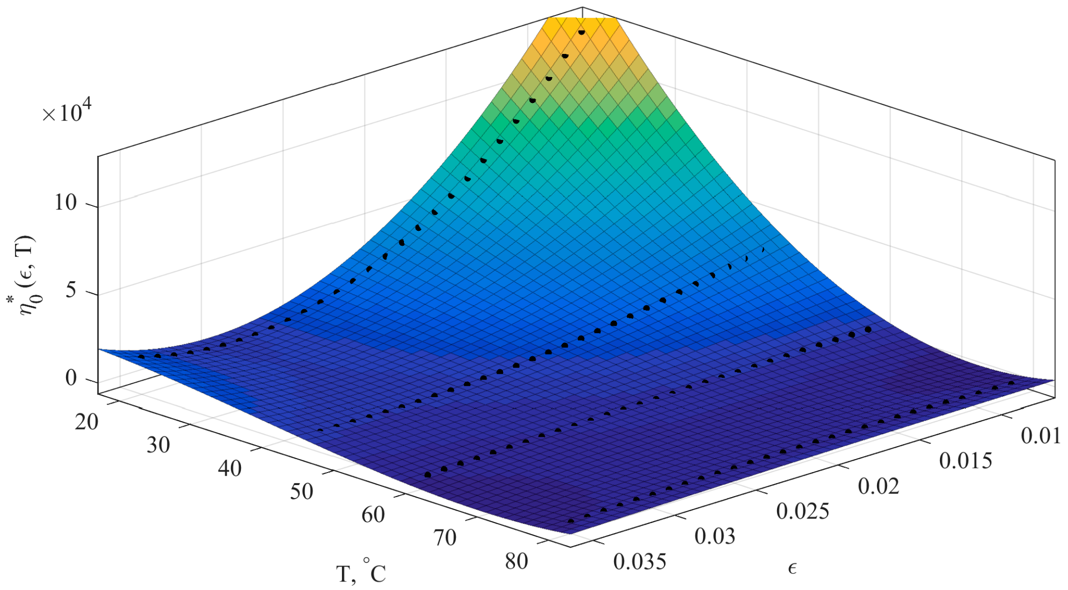


Рисунок 2.18 — Зависимость коэффициента начальной вязкости η_0^* смолы ЭДТ–10 от начальной деформации ε_0 и температуры T, °C полинома (2.73)

Таблица 2.9 — Физико-механические параметры ЭДТ–10, определённые согласно выражениям (2.74) при $\varepsilon = 0.008$ и различных температурах T

T, °C	E, МПа	E_∞, МПа	m^*, МПа	η_0^*, МПа · ч
20	3 091.8	21 427	5.6845	122 950
45	2 790.3	5 040.8	5.3790	32 386
60	2 094.7	1 380.6	6.8202	5 587.2
80	1 482.4	450.16	6.2043	1 377.6

2.3 Выводы по главе

1. Подробно рассмотрено уравнение связи Максвелла–Гуревича, используемое во всех задачах настоящей диссертационной работы.

2. Приведены константы уравнения Максвелла–Гуревича. Показано, что данные константы на самом деле являются значительной функцией от температуры.

3. Приводится альтернативная методика определения констант уравнения Максвелла–Гуревича, позволяющая найти их по анализу только графиков релаксации напряжений. Наличие нескольких графиков релаксации напряжений при разных температурах позволяет определить зависимость этих параметров от температуры.

4. Приводятся результаты определения физико–механических параметров полимера как функции от нескольких факторов.

Глава 3. Одномерные плоские задачи термовязкоупругости для неоднородных тел

Как было сказано ранее, связь между напряжением и деформациями в полимерных телах лучше всего описывается обобщённым нелинейным уравнением Максвелла-Гуревича. Отсутствие данного уравнения в современных программных комплексах заставляет исследователей самостоятельно разрабатывать и писать программные модули по определению напряжённо-деформированного состояния. Однако, это позволяет учесть при создании новых конечных элементов множество факторов, повышающих точность расчёта. Достигается это, в том числе, и непосредственным аналитическим интегрированием аппроксимирующих функций по конечному элементу вместо их численной аппроксимации.

В работе рассматриваются одномерные и двухмерные конечные элементы, матрица жёсткости и вектор нагрузок которых получены аналитическим интегрированием аппроксимирующих функций, учитывающих многие факторы: распределение температурного поля и наличие высокоэластических деформаций.

Оптимизированные конечные элементы позволяют снизить ошибки, накапливаемые при пошаговом определении напряженно-деформированного состояния полимерных тел.

Рассматривается цилиндр (рисунок 3.1), внутренний радиус которого R_a, внешний — R_b. В случае плоского деформированного состояния (ПДС) длина цилиндра l значительно преобладает над внешним радиусом R_b: $l \gg R_b$; в случае плоского напряжённого состояния (ПНС) длина цилиндра очень мала: $l \to 0$.

Исследуется цилиндрическое тело, граничные условия на внутренней и внешней поверхностях которого определяются параметрами: T_a, T_b — температура соответственно на внутренней и внешней поверхностях цилиндра; P_a, P_b — равномерно распределённое давление, приложенное соответственно к внутренней и внешней поверхностям цилиндра

3.1 Определение постоянного во времени температурного поля

В случае одномерной осесимметричной задачи и не изменяющегося во времени температурного поля, уравнение (1.11) (с. 22) записывается в виде однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0. \tag{3.1}$$

Аналитическое решение уравнения (3.1) может быть довольно просто получено с помощью метода замены переменной. Для этого вводим замену:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \vartheta \tag{3.2}$$

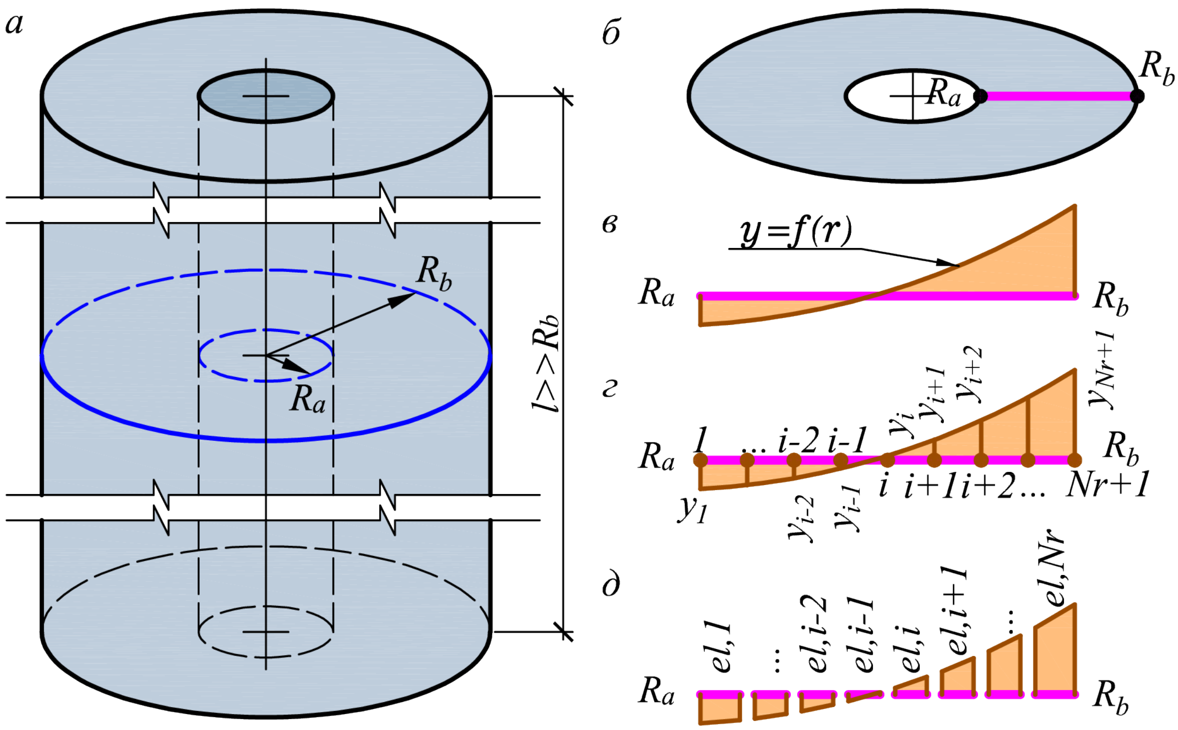


Рисунок 3.1 — Исходная схема осесимметричной задачи: *а* — исходный цилиндр; *б* — рассматриваемый участок цилиндра; *в* — непрерывная функция $y = f(x)$; *г* — аппроксимация функции конечными разностями; *д* — аппроксимация функции конечными элементами

и подставляем в выражение (3.1):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta = 0.$$

Группируя слагаемые и производя их перестановку

$$\frac{\partial\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\partial r}{r},$$

интегрируя левую и правую части, получаем:

$$\ln\vartheta = -\ln r + \ln C_1 = \ln\frac{C_1}{r}.$$

Следовательно,

$$\vartheta = \frac{C_1}{r}.$$

С учётом произведённой замены в выражении (3.2), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r};$$

$$\partial T = C_1\frac{\partial r}{r};$$

$$T = C_1 \ln r + C_2.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяем, решая систему уравнений с учётом граничных условий: $T = T_a$ при $r = R_a$ и $T = T_b$ при $r = R_b$:

$$\begin{cases} T_a = C_1 \ln R_a + C_2; \\ T_b = C_1 \ln R_b + C_2. \end{cases}$$

В результате окончательное решение для одномерного температурного поля имеет вид:

$$T(r) = \frac{T_a \ln\left(\dfrac{R_b}{r}\right) + T_b \ln\left(\dfrac{r}{R_a}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_b}{R_a}\right)}. \tag{3.3}$$

3.1.1 Решение с помощью метода конечных разностей

Аппроксимации методом конечных разностей подлежит уравнение (3.1). Для этого используем алгоритм, приведённый в параграфе 1.2.3.3. Вводим на интервале $[R_a, R_b]$ равномерную сетку

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i-1)h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

Аппроксимация производных происходит с помощью уравнений (1.25) и (1.26):

$$\frac{T_{i+1}}{h_r^2} - \frac{2T_i}{h_r^2} + \frac{T_{i-1}}{h_r^2} + \frac{T_{i+1}}{2rh_r} - \frac{T_{i-1}}{2rh_r} = 0.$$

Полученную разностную схему можно представить в виде системы сеточных уравнений:

$$a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1} = f_i; \quad (i = 2, 3, \ldots, N);$$

$$T_1 = T_a; \quad T_{N+1} = T_b;$$

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2rh_r}; \quad b_i = -\frac{2}{h_r^2}; \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & \\ & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & a_N & b_N & c_N \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ \dots \\ T_N \\ T_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

3.1.2 Решение с помощью метода конечных элементов

Для решения методом конечных элементов однородной задачи теплопроводности выражение (1.11) записываем так:

$$-\operatorname{div}(\varkappa \cdot \operatorname{grad} T) = 0. \tag{3.4}$$

Согласно (1.18) и (1.19) аппроксимацию температуры по радиусу конечного элемента можно записать так:

$$T = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} T_i + \frac{r - R_i}{R_j - R_i} T_j, \tag{3.5}$$

или в матричном виде

$$T = \left[N \right] \left\{ T \right\}, \tag{3.6}$$

где $\left[N\right] = \left[N_i \quad N_j\right]$; $\left\{T\right\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}$; $N_i = \dfrac{R_j - r}{R_j - R_i}$ и $N_j = \dfrac{r - R_i}{R_j - R_i}$.

В параграфе 1.2.2 приводится переход к функционалу, соответствующему поставленному эллиптическому уравнению. Тогда функционал уравнения (3.4) записывается:

$$\operatorname{Im}(T) = \int\limits_V \left[\varkappa (\operatorname{grad} T)^2 \right] \mathrm{d}V = \int\limits_V \left[\varkappa \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \right] \mathrm{d}V. \tag{3.7}$$

Рассмотрим конечный элемент, приведённый на рисунке 3.2. Его объём будет равен произведению высоты элемента h_z на площадь его основания $A_{\text{основ}}$, которая в свою очередь равна произведению ширины элемента dr на длину дуги, проходящей через центр тяжести основания, т. е.

$$\mathrm{d}V \approx A_{\text{основ}} h_z = \theta r h_z \mathrm{d}r = \theta r h_z \mathrm{d}r,$$

где для линейного конечного элемента в случае плоской осесимметричной задачи $h_z = 1$; $\theta = 1$; $\mathrm{d}r = R_j - R_i$. Тогда объём элемента можно записать как:

$$\mathrm{d}V \approx r\,\mathrm{d}r. \tag{3.8}$$

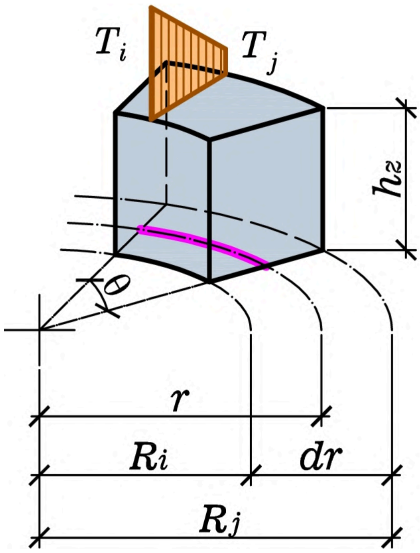


Рисунок 3.2 — Конечный цилиндрический элемент в осесимметричной постановке

С учётом выражения (3.8) для объёма конечного элемента и постоянства коэффициента $\varkappa$ по всем координатам, функционал (3.7) записывается в виде:

$$\mathrm{Im}\,(T) = \varkappa \int\limits_{R_i}^{R_j} r \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 \mathrm{d}r. \tag{3.9}$$

Далее, функционал минимизируется по температуре в узлах, т. е. $\partial\,\mathrm{Im}/\partial T$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}}{\partial T_i} = \dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_i - \dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_j = 0; \\ \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}}{\partial T_j} = -\dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_i + \dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_j = 0. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} & -\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} \\ -\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} & \frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

представляя через коэффициенты:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i^{(e)} \\ T_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

или в короткой форме:

$$\left[k^{(e)}\right]\left\{T^{(e)}\right\}=\left\{f^{(e)}\right\},$$

где $\left[k^{(e)}\right]$ — матрица теплопроводности (жёсткости) конечного элемента; $\left\{f^{(e)}\right\}$ — вектор нагрузок.

Глобальные матрица теплопроводности и вектор нагрузки

$$\left[K\right]\left\{T\right\}=\left\{F\right\}$$

определяются соотношениями

$$\left[K\right]=\sum_{e=1}^{E}\left[k^{(e)}\right]; \qquad \left\{F\right\}=\sum_{e=1}^{E}\left\{f^{(e)}\right\}.$$

Итоговая матрица с учётом граничных условий принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ & k_{21}^{(e-1)} & k_{22}^{(e-1)}+k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & & \\ & & k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)}+k_{11}^{(e+1)} & k_{12}^{(e+1)} & \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ \dots \\ T_i^{(e)} \\ T_j^{(e)} \\ \dots \\ T_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ \dots \\ f_2^{(e-1)}+f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)}+f_1^{(e+1)} \\ \dots \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

Здесь $T_j^{(e-1)}=T_i^{(e)}$ и $T_j^{(e)}=T_i^{(e+1)}$.

3.1.3 Сравнение результатов, полученных различными методами

Для сравнения результатов, полученных аналитическими и численными методами, рассмотрим задачу распределения температурного поля в цилиндре (см. рисунок 3.1, с. 71) при следующих исходных данных: $R_a=0.008$ м; $R_b=0.028$ м; $T_a=100\,^\circ$C; $T_b=28\,^\circ$C. Цилиндр по толщине «разбивался» на интервалы, в случае конечных разностей, количеством N штук; при методе конечных элементов количество элементов равнялось количеству интервалов в методе конечных разностей, а длина элемента — длине интервала.

Результат решения задачи при $N=2$ представлен на рисунке 3.3. Результаты решения задачи при различных N приведены в таблице 3.1. Решения с помощью метода конечных разностей и метода конечных элементов полностью совпали между собой, что говорит о достоверности результатов. Из таблицы 3.1 видно, что количества интервалов при $N=100$ более чем достаточно для получения точного решения.

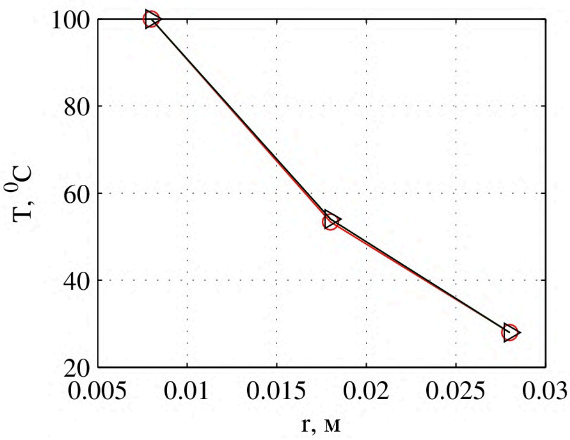


Рисунок 3.3 — Распределение температурного поля в цилиндре при двух интервалах по радиусу ($N = 2$): ◯ — аналитическое и △ — численное решения

Таблица 3.1 — Сравнение результатов определения температуры при различном количестве интервалов N в точке $r = 0.018$ м аналитическим решением (АР), методом конечных разностей (МКР) и методом конечных элементов (МКЭ)

N, **шт.**	**2**	**4**	**10**	**40**	**100**	**400**	**1000**
АР T, °C	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934
МКР T, °C	54.0000	53.5730	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ T, °C	54.0000	53.5730	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
δ, %	1.136	0.336	0.057	0.004	≈ 0	≈ 0	≈ 0

3.2 Определение переменного во времени температурного поля

В случае одномерной осесимметричной задачи и изменяющегося во времени температурного поля, уравнение (1.11) (с. 22) записывается в виде неоднородного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3.10}$$

Аналитическое решение уравнения (3.10) можно получить со значительными трудозатратами, поэтому решим его в дальнейшем с помощью численных методов: метода конечных разностей и метода конечных элементов. Трудности могут возникать при формировании произвольных граничных условий, описывающих теплообмен.

Общим для этих методов будет то, что для аппроксимации по времени вводится равномерная сетка

$$\omega_t = \left\{ t_\rho = (\rho - 1)h_t; \quad h_t = \frac{t_{max}}{N_t}; \quad \rho = 1, 2, \ldots, N_t + 1 \right\},$$

где t_{max} — предел времени, до которого продолжается расчёт; N_t — количество интервалов, на которые «разбивается» исследуемый участок времени.

В таком случае, согласно выражению для левых разностей (1.23), дифференциал температуры по времени

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_\rho - T_{\rho-1}}{h_t}.$$

Решение происходит поэтапно. В начале решается задача распределения температуры в точке времени $\rho = 1$. При этом правая часть системы уравнений равна нулю: $f_{1,i} = 0$. Затем — задача в точке времени $\rho = 2$, при этом температура в предыдущей точке времени $T_{\rho=1}$ является известной величиной, а в текущей точке времени $T_{\rho=1}$ — неизвестной. Процесс продолжается на всех временных точках, вплоть до $\rho = N_t + 1$.

3.2.1 Решение с помощью метода конечных разностей

Для аппроксимации по толщине цилиндра вводим на интервале $[R_a, R_b]$ равномерную сетку:

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i-1)h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N_r}; \quad = 1, 2, \ldots, N_r + 1 \right\}.$$

Так как процесс происходит во времени, то значения функции описываются двумя коэффициентами (ρ, i).

Аппроксимация производных происходит с помощью уравнений (1.25) и (1.26):

$$\frac{T_{\rho,i+1}}{h_r^2} - \frac{2T_{\rho,i}}{h_r^2} + \frac{T_{\rho,i-1}}{h_r^2} + \frac{T_{\rho,i+1}}{2rh_r} - \frac{T_{\rho,i-1}}{2rh_r} = \frac{1}{\varkappa} \frac{T_{\rho,i} - T_{\rho-1,i}}{h_t}.$$

Полученную разностную схему можно представить в виде системы сеточных уравнений:

$$a_i T_{\rho,i-1} + b_i T_{\rho,i} + c_i T_{\rho,i+1} = f_{\rho,i}; \quad (i = 2, 3, \ldots, N_r; \quad \rho = 1, 2, \ldots, N_t + 1);$$

$$T_{\rho,1} = T_{\rho,a}; \quad T_{\rho,N+1} = T_{\rho,b};$$

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2rh_r}; \quad b_i = \left(-\frac{2}{h_r^2} - \frac{1}{\varkappa \cdot h_t} \right); \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}; \quad f_{\rho,i} = -\frac{T_{\rho-1,i}}{\varkappa \cdot h_t}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & & \\ & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & & a_{N_r} & b_{N_r} & c_{N_r} \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{\rho,1} \\ T_{\rho,2} \\ \dots \\ T_{\rho,i-1} \\ T_{\rho,i} \\ T_{\rho,i+1} \\ \dots \\ T_{\rho,N_r} \\ T_{\rho,N_r+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ f_{\rho,2} \\ \dots \\ f_{\rho,i-1} \\ f_{\rho,i} \\ f_{\rho,i+1} \\ \dots \\ f_{\rho,N_r} \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

3.2.2 Решение с помощью метода конечных элементов

Можно выделить два подхода к решению задачи методом конечных элементов. В первом — производят аппроксимацию производной температуры по времени до составления выражения функционала и выделяют неизвестную (в текущем моменте времени) и известную части (в предыдущем моменте времени). Во втором — производную температуры по времени представляют в качестве функции, а аппроксимацию по времени производят после составления выражения функционала.

3.2.2.1 Аппроксимацию производной температуры по времени до составления выражения функционала

С учётом аппроксимации производной температуры по времени, уравнение теплопроводности Фурье записываем в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_\rho - T_{\rho-1}}{h_t}.$$

Перенесём искомую величину T_ρ влево, известную величину $T_{\rho-1}$ оставим в правой части:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{1}{h_t}T_\rho = -\frac{1}{h_t}T_{\rho-1}.$$

Преобразуем данное выражение к дивергентному виду:

$$-\operatorname{div}\left[\varkappa \operatorname{grad} T\right] + \frac{1}{h_t}T_\rho = f, \tag{3.11}$$

где $f = \dfrac{1}{h_t}T_{\rho-1}$.

Согласно (1.18) и (1.19) аппроксимация температуры по радиусу конечного элемента записывается:

$$T_\rho = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} T_{\rho,i} + \frac{r - R_i}{R_j - R_i} T_{\rho,j}; \quad T_{\rho-1} = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} T_{\rho-1,i} + \frac{r - R_i}{R_j - R_i} T_{\rho-1,j}$$

или в матричном виде

$$T_\rho = \left[N\right]\left\{T_\rho\right\}; \quad T_{\rho-1} = \left[N\right]\left\{T_{\rho-1}\right\},$$

где $\left[N\right] = \left[N_i \quad N_j\right]$; $\left\{T_\rho\right\} = \begin{Bmatrix} T_{\rho,i} \\ T_{\rho,j} \end{Bmatrix}$; $\left\{T_{\rho-1}\right\} = \begin{Bmatrix} T_{\rho-1,i} \\ T_{\rho-1,j} \end{Bmatrix}$; $N_i = \dfrac{R_j - r}{R_j - R_i}$ и $N_j = \dfrac{r - R_i}{R_j - R_i}$.

В параграфе 1.2.2 приводится переход к функционалу, соответствующему поставленному эллиптическому уравнению. Тогда функционал уравнения (3.11):

$$\mathrm{Im}\left(T_\rho\right) = \int\limits_V \left[\varkappa\left(\mathrm{grad}\, T_\rho\right)^2 + \frac{T_\rho^2}{h_t}\right] \mathrm{d}V - 2\int\limits_V \frac{1}{h_t} T_{\rho-1} T_\rho \, \mathrm{d}V =$$

$$= \int\limits_V \left[\varkappa\left(\mathrm{grad}\, T_\rho\right)^2 + \frac{T_\rho^2}{h_t} - 2\frac{T_{\rho-1} T_\rho}{h_t}\right] \mathrm{d}V. \quad (3.12)$$

Объём элемента определяется выражением (3.8). Тогда функционал (3.12):

$$\mathrm{Im}\left(T_\rho\right) = \int\limits_{R_i}^{R_j} r\left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\rho}{\partial r}\right)^2 + \frac{T_\rho^2}{h_t} - 2\frac{T_{\rho-1} T_\rho}{h_t}\right] \mathrm{d}r. \quad (3.13)$$

Далее, функционал минимизируется по температуре в узлах, т. е. $\partial\,\mathrm{Im}/\partial T_\rho$ и, для дальнейшего удобства работы, умножается на ϑ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}}{\partial T_{\rho,i}} = 0; \\ \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}}{\partial T_{\rho,j}} = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$\left[k^{(e)}\right]\left\{T^{(e)}\right\} = \left\{f^{(e)}\right\}, \quad (3.14)$$

где $\left[k^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}$; $\left\{T^{(e)}\right\} = \begin{Bmatrix} T_{\rho,i}^{(e)} \\ T_{\rho,j}^{(e)} \end{Bmatrix}$; $\left\{f^{(e)}\right\} \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$.

Коэффициенты системы уравнений (3.14) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
k_{11}^{(e)} &= \frac{R_j^2+2R_iR_j-3R_i^2}{6h_t}+\varkappa\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i};\\
k_{12}^{(e)}=k_{21}^{(e)} &= \frac{R_j^2-R_i^2}{6h_t}-\varkappa\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i};\\
k_{22}^{(e)} &= \frac{3R_j^2-2R_iR_j-R_i^2}{6h_t}+\varkappa\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i};\\
f_1^{(e)} &= \frac{R_j^2+2R_iR_j-3R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,\,i}+\frac{R_j^2-R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,\,j};\\
f_2^{(e)} &= \frac{R_j^2-R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,\,i}+\frac{3R_j^2-2R_iR_j-R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,\,j};
\end{aligned}
$$

3.2.2.2 *Аппроксимация производной температуры по времени после составления выражения функционала*

С учётом аппроксимации производной температуры по времени уравнение теплопроводности Фурье

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}.$$

В дивергентном виде данное выражение может мыть представлено как:

$$-\operatorname{div}\left[\varkappa \operatorname{grad} T\right]=f, \tag{3.15}$$

где $f=-\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Аппроксимация температуры по радиусу записывается так же, как и в предыдущем параграфе. Тогда функционал уравнения (3.15)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(T_\rho\right) &= \int\limits_V\left[\varkappa\left(\operatorname{grad} T_\rho\right)^2\right]\mathrm{d}V-2\int\limits_V fT_\rho\,\mathrm{d}V=\\
&= \int\limits_V\left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\rho}{\partial r}\right)^2+2\frac{\partial T_\rho}{\partial t}T_\rho\right]\mathrm{d}V=\\
&= \int\limits_V\left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\rho}{\partial r}\right)^2+2\frac{T_\rho^2}{h_t}-2\frac{T_\rho T_{\rho-1}}{h_t}\right]\mathrm{d}V.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Объём элемента определяется выражением (3.8). Тогда функционал (3.16) получим в виде

$$\operatorname{Im}\left(T_\rho\right)=\int\limits_{R_i}^{R_j} r\left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\rho}{\partial r}\right)^2+2\frac{T_\rho^2}{h_t}-2\frac{T_{\rho-1}T_\rho}{h_t}\right]\mathrm{d}r. \tag{3.17}$$

Далее порядок действий аналогичен предыдущему параграфу. Коэффициенты системы уравнений в этом случае имеют вид:

$$k_{11}^{(e)} = \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{3h_t} + \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i};$$

$$k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = \frac{R_j^2 - R_i^2}{3h_t} - \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i};$$

$$k_{22}^{(e)} = \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{3h_t} + \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i};$$

$$f_1^{(e)} = \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,i} + \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,j};$$

$$f_2^{(e)} = \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,i} + \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,j};$$

3.2.3 Сравнение результатов, полученных различными методами

Для сравнения результатов, полученных аналитическими и численными методами, рассмотрим задачу распределения температурного поля в цилиндре (см. рисунок 3.1, с. 71) при следующих исходных данных: $R_a = 0.008$ м; $R_b = 0.028$ м; $T_a = T_b = 28\,^\circ$C. Цилиндр по толщине «разбивался» на интервалы, в случае конечных разностей, количеством N_r штук; при методе конечных элементов количество элементов равнялось количеству интервалов в методе конечных разностей, а длина элемента — длине интервала. Далее температура на внутреннем торце росла до $T_a = 100\,^\circ$C в течение 1.2 ч. Процесс исследовали до времени 3.6 ч. Количество временных интервалов определяется переменной N_t.

Решение методом конечных элементов проводили по двум методикам: МКЭ1 — методике, приведённой в параграфе 3.2.2.1; МКЭ2 — методике, приведённой в параграфе 3.2.2.2.

Результаты решения задачи при различных N_r и N_t приведены в таблице 3.2, а также на рисунке 3.4 при $N_t = 20$ и $N_r = 20$.

Поскольку система уравнений метода конечных разностей имеет второй порядок точности, она выступает эталоном. Анализируя полученные данные делаем вывод, что верной является методика, при которой производная температуры по времени аппроксимируется до составления функционала (решение МКЭ1), т. к. решения МКР и МКЭ1 совпали полностью, а по методике МКЭ2 расхождение увеличилось при росте количества интервалов по времени N_t.

3.3 Определение напряжённо-деформированного состояния неоднородного полимерного цилиндра с учётом температурного нагружения и высокоэластических деформаций

При решении плоских задач исследуют следующие виды напряжённо–деформированного состояния:

Таблица 3.2 — Сравнение результатов определения температуры при различном количестве интервалов N_r в точке $r = 0.018$ м методом конечных разностей (МКР), методом конечных элементов с предварительной аппроксимацией температуры по времени (МКЭ1) и последующей (МКЭ2) неоднородной задачи в конце заданного интервала времени

N_r, шт.	**10**	**40**	**100**	**400**	**1000**
			$N_t = 10$		
МКР T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
			$N_t = 100$		
МКР T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, °C	53.4239	53.3952	53.3936	53.3933	53.3932
			$N_t = 1000$		
МКР T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, °C	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, °C	53.4222	53.3934	53.3918	53.3915	53.3915

— Плоское деформированное состояние (ПДС). Предполагается, что осевые деформации вдоль оси z равны нулю, а напряжения вдоль этих осей имеют некоторое значение σ_z: $\varepsilon_z = 0$; $\sigma_z \neq 0$. Считается, что имеет место ПДС, если длина цилиндра значительно превышает его внешний радиус ($l \gg r$);

— Плоское напряжённое состояние (ПНС). Предполагается, что осевые напряжения на торцах σ_z равны нулю за счёт наличия осевых деформаций вдоль оси z: $\varepsilon_z \neq 0$; $\sigma_z = 0$. Считается, что имеет место ПНС, если длина цилиндра значительно меньше его внешнего радиуса ($l \ll r$).

Практическим примером ПДС являются трубы различного назначения; ПНС в чистом виде встречается весьма редко и с практической точки зрения исследование ПНС оправдано при экспериментальных работах и изучении срезов цилиндрических тел [13, 128, 158, 159, 160, 161]. Таким образом, дальнейшие выкладки приводятся для ПДС.

Рассмотрим плоское деформированное состояние полого многослойного цилиндра. Материал каждого слоя обладает различными физико-механическими свойствами, которые являются непрерывной функцией от температуры, а следовательно, от координат r_j слоя: $E_j\left(T_j(r)\right) = E(r)$.

3.3.1 Решение в напряжениях с помощью метода конечных разностей

Для вывода основных разрешающих уравнений метода конечных элементов используют выражения из уравнений (1.1) и (1.3), с учётом, что для ПДС в осесимметричной постановке

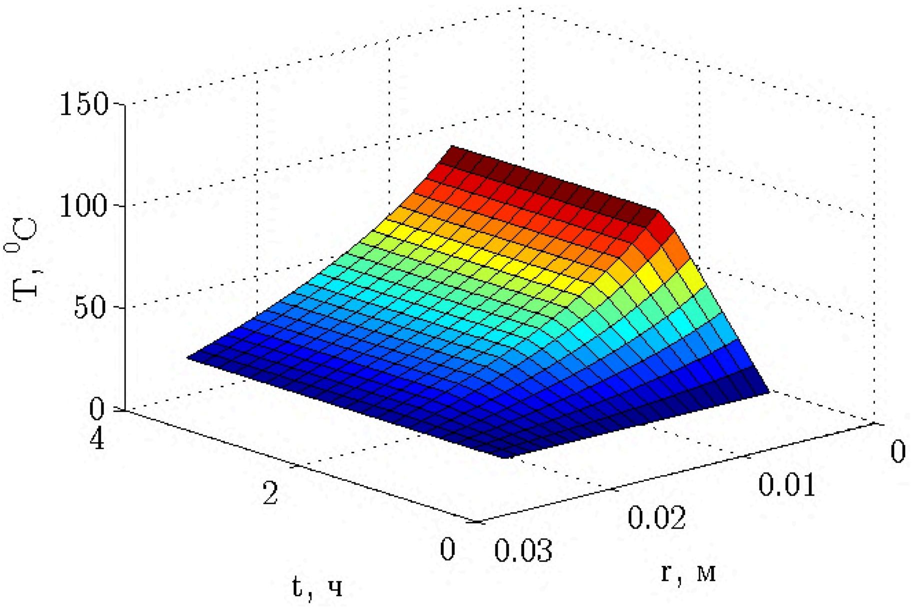


Рисунок 3.4 — Распределение температурного поля в течение 3.6 часов в толще цилиндра при росте температуры от 28 до 100°C в течение 1.2 часа; $N_t = 20$, $N_r = 20$

$\dfrac{\partial}{\partial\theta} = 0$:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0. \tag{3.19}$$

Рассмотрим первые три выражения закона Гука в прямой форме (1.4):

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,r}; \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\theta}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_r\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,z} = 0 \quad \text{— в случае ПДС.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Из последнего выражения (3.20) получаем выражение для σ_z:

$$\sigma_z = -E\left(\varepsilon_T + \varepsilon_{cr,z}\right) + \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right),$$

которое подставляем в первые два выражения (3.20):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu^2\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + \nu E\left(\varepsilon_T + \varepsilon_{cr,z}\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu^2\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + \nu E\left(\varepsilon_T + \varepsilon_{cr,z}\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\theta}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Далее из уравнения (3.18) выражается окружное напряжение σ_θ:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \tag{3.22}$$

и подставляется в уравнения (3.21):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_r(1-2\nu) - r\nu\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\right] + \varepsilon_T(1+\nu) + \varepsilon_{cr,r} + \nu\varepsilon_{cr,z};\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_r(1-2\nu) + r(1-\nu)\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\right] + \varepsilon_T(1+\nu) + \varepsilon_{cr,\theta} + \nu\varepsilon_{cr,z}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Выражение для ε_θ дифференцируется по радиусу r:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E^2}\frac{\partial E}{\partial r}\sigma_r + \\
+ \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1-\nu^2}{E}r\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} - r\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E^2}\frac{\partial E}{\partial r}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \\
+ \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial r}(1+\nu) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,\theta}}{\partial r} + \nu\frac{\partial \varepsilon_{cr,z}}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Далее, выражения (3.23) и (3.24) подставляем в выражение (3.19) и, проводя ряд упрощений, окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \varphi(r)\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \psi(r)\sigma_r = f(r), \tag{3.25}$$

где

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r};$$

$$\psi(r) = -\frac{1}{r}\frac{1-2\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r};$$

$$f(r) = -\frac{E\partial(\alpha\Delta T)}{\partial r}\frac{1}{r(1-\nu)} - \frac{1}{r}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{cr,\theta}}{\partial r} + \nu\frac{\partial \varepsilon_{cr,z}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{cr,\theta} - \varepsilon_{cr,r}}{r}\right).$$

Аппроксимации методом конечных разностей подлежит уравнение (3.25). Для аппроксимации используется алгоритм, приведённый в параграфе 1.2.3.3. Вводим на интервале $[R_a, R_b]$ равномерную сетку

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i-1)\cdot h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

Аппроксимация производных происходит с помощью уравнений (1.25) и (1.26):

$$\sigma''_{ri} + p_i\sigma'_{ri} + q_i\sigma_{ri} = f_i, \tag{3.26}$$

где двумя штрихами «$''$» представлена вторая производная по радиусу r;

$$p_i = \frac{3}{r_i} - \frac{1}{E_i}\frac{\partial E_i}{\partial r};$$

$$q_i = -\frac{1}{r_i}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{E_i}\frac{\partial E_i}{\partial r};$$

$$f_i = -\frac{E_i\partial\left(\alpha\Delta T_i\right)}{\partial r}\cdot\frac{1}{r_i\left(1-\nu\right)} - \frac{1}{r_i}\cdot\frac{E_i}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{cr,\theta i}}{\partial r} + \nu\frac{\partial\varepsilon_{cr,zi}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{cr,\theta i}-\varepsilon_{cr,ri}}{r_i}\right). \tag{3.27}$$

Аппроксимация производных на сеточном шаблоне происходила с применением формул (1.25) и (1.26):

$$\sigma_i'' = \frac{\sigma_{ri-1} - 2\sigma_{ri} + \sigma_{ri+1}}{h_r^2}; \qquad \sigma_r' = \frac{\sigma_{ri+1} - \sigma_{ri-1}}{2h_r}.$$

Тогда выражение (3.26) принимает вид:

$$a_i\sigma_{ri-1} + b_i\sigma_{ri} + c_i\sigma_{ri+1} = f_i, \tag{3.28}$$

где

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{p_i}{2h_r}; \quad b_i = q_i - \frac{2}{h_r^2}; \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{p_i}{2h_r}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & & \\
 & \dots & \dots & \dots & & & & & & & \\
 & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & & & \\
 & & & a_i & b_i & c_i & & & & & \\
 & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & & & \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & & & \\
 & & & & & & a_N & b_N & c_N & & \\
 & & & & & & & & 1 & &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \sigma_{r1} \\ \sigma_{r2} \\ \dots \\ \sigma_{ri-1} \\ \sigma_{ri} \\ \sigma_{ri+1} \\ \dots \\ \sigma_{rN} \\ \sigma_{rN-1} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -P_a \\ f_2 \\ \dots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \dots \\ f_N \\ -P_b \end{Bmatrix}.$$

Здесь уже заложены граничные условия: $\sigma_{r1} = -P_a$; $\sigma_{r(N+1)} = -P_a$.

Как видно из приведённых выкладок, нигде не учитывается, используется теория по которой полная деформация ползучести (ε_{cr}) равна нулю, или нет.

Если считать нагружение мгновенным [13], то в момент времени $t = 0$ будут справедливы начальные условия: $\varepsilon_{r,0}^* = \varepsilon_{\theta,0}^* = 0$. Таким образом, на нулевом этапе приходим к упругой задаче.

3.3.2 Решение в перемещениях с помощью метода конечных элементов

3.3.2.1 Физические соотношения плоской задачи

При решении плоской задачи, из шести компонент деформаций остаётся три: ε_r, ε_θ и ε_z. При этом, как говорилось ранее, в случае ПДС полная осевая деформация равна нулю:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,z},$$

откуда

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) - E\left(\varepsilon_T + \varepsilon_{cr,z}\right). \tag{3.29}$$

Подставим выражение (3.29) в оставшиеся выражения закона Гука:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(1-\nu^2\right)\sigma_r - \frac{1}{E}\left(\nu+\nu^2\right)\sigma_\theta + \varepsilon_T\left(1+\nu\right) + \varepsilon_{cr,z} + \nu\varepsilon_{cr,z};\\
\varepsilon_\theta &= -\frac{1}{E}\left(\nu+\nu^2\right)\sigma_r + \frac{1}{E}\left(1-\nu^2\right)\sigma_\theta + \varepsilon_T\left(1+\nu\right) + \varepsilon_{cr,\theta} + \nu\varepsilon_{cr,z},
\end{aligned}$$

которые, для дальнейшей работы, выгодно записать в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1-\nu^2 & -\nu\left(1+\nu\right)\\ -\nu\left(1+\nu\right) & 1-\nu^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} + \left(1+\nu\right)\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T + \begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}+\nu\varepsilon_{cr,z}\\ \varepsilon_{cr,\theta}+\nu\varepsilon_{cr,z}\end{Bmatrix}.$$

Выразим из данной формулы вектор напряжений:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1-\nu^2 & -\nu\left(1+\nu\right)\\ -\nu\left(1+\nu\right) & 1-\nu^2\end{bmatrix}\right)^{-1} \times \left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} - \left(1+\nu\right)\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T - \begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}+\nu\varepsilon_{cr,z}\\ \varepsilon_{cr,\theta}+\nu\varepsilon_{cr,z}\end{Bmatrix}\right).$$

Проведя операцию обращения матрицы, окончательно получим выражение для напряжений:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu\\ \nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T -&\\
- \begin{Bmatrix}\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r} - \begin{Bmatrix}\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\theta} -&\\
- \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,z}.&
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Введём замену

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu\\ \nu & 1-\nu\end{bmatrix},\tag{3.31}$$

тогда выражение (3.30) запишется

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}=[D]\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix}-\frac{E}{1-2\nu}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T-\begin{Bmatrix}\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}-\\ -\begin{Bmatrix}\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\theta}-\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,z}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Далее выражение (3.32) приводим к виду:

$$\{\sigma\}=[D]\cdot\Big(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_T\}-\{\varepsilon_{cr}\}\Big).$$

Дальнейшие выкладки зависят от теории, описывающий деформации ползучести:

1. Если полная деформация ползучести не равна нулю, т. е.

$$\theta_{cr}=\varepsilon_{cr,r}+\varepsilon_{cr,\theta}+\varepsilon_{cr,z}\neq 0,$$

выражение (3.32) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}=[D]\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix}-\frac{E}{1-2\nu}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T-\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}\\ \varepsilon_{cr,\theta}\\ \varepsilon_{cr,z}\end{Bmatrix},$$

окончательно

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}=[D]\left(\underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}-\underbrace{(1+\nu)\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}}-\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \nu\\ 0 & 1 & \nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}\\ \varepsilon_{cr,\theta}\\ \varepsilon_{cr,z}\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}}\right).\tag{3.33}$$

2. Если полная деформация ползучести равна нулю, т. е.

$$\theta_{cr}=\varepsilon_{cr,r}+\varepsilon_{cr,\theta}+\varepsilon_{cr,z}=0,$$

выражение (3.32) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \frac{E}{1+\nu} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,r} \\ \varepsilon_{cr,\theta} \end{Bmatrix},$$

окончательно

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = [D] \cdot \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} - \underbrace{(1+\nu) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,r} \\ \varepsilon_{cr,\theta} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}} \right). \qquad (3.34)$$

3.3.2.2 *Полная энергия системы*

Согласно (1.6), полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела Π и работой внешних сил A:

$$Э = \Pi - A,$$

где в случае ПДС энергия упругой деформации тела записывается как:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} \right) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma \right\}^T \cdot \left\{ \varepsilon_{el} \right\} \mathrm{d}V, \qquad (3.35)$$

где $\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\right)$; $\{\varepsilon_{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}$.

Полная деформация $\{\varepsilon\}$ определяется через выражения Коши (1.1):

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ u/r \end{Bmatrix}.$$

Аппроксимация перемещений u по элементу описывается выражением (1.19):

$$u = \left\{ N \right\} \left\{ U \right\} = \left\{ N_i \quad N_J \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} u_i + \frac{r - R_i}{R_j - R_i} u_j.$$

Тогда полная деформация будет описываться выражением:

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_j - R_i} & \dfrac{1}{R_j - R_i} \\ N_i/r & N_j/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \left[B \right] \left\{ U \right\}. \qquad (3.36)$$

В выражении (3.35) вектор напряжений подлежит операции транспонирования, значит, к дальнейшим операциям необходимо применить свойство матриц при транспонировании:

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T.$$

Так, вектор напряжений (в зависимости от выбранной теории, описывающей деформации (3.33) или (3.34)), примет вид:

$$\{\sigma\}^T = \Big[[D]\big(\{B\}\{U\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\big)\Big]^T = \big(\{U\}^T\{B\}^T - \{\varepsilon_T\}^T - \{\varepsilon_{cr}\}^T\big)\,[D]. \qquad (3.37)$$

После подстановки выражений для вектора напряжений (3.37) и вектора деформаций (3.36) в (3.35), выражение для энергии упругой деформации примет вид:

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\{U\}^T\{B\}^T[D] - \{\varepsilon_T\}^T[D] - \{\varepsilon_{cr}\}^T[D]\Big) \times \Big([B]\{U\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\Big)\,\mathrm{d}V = \\
= \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\{U\}^T[B]^T[D][B]\{U\} - \{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_T\} - \{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\} - \\
- \{\varepsilon_T\}^T[D][B]\{U\} + \{\varepsilon_T\}^T[D]\{\varepsilon_T\} + \{\varepsilon_T\}^T[D]\{\varepsilon_{cr}\} - \\
- \{\varepsilon_{cr}\}^T[D][B]\{U\} + \{\varepsilon_{cr}\}^T[D]\{\varepsilon_T\} + \{\varepsilon_{cr}\}^T[D]\{\varepsilon_{cr}\}\Big)\,\mathrm{d}V. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

3.3.2.3 Получение матрицы жёсткости и вектора нагрузок КЭ

Согласно вариационному принципу Лагранжа, из всех кинематически возможных напряженно-деформированных состояний твердого деформируемого тела для действительного деформированного состояния полная энергия деформаций достигает минимального значения. Таким образом, следующим действием необходимо найти минимум энергии по перемещениям, т. е.

$$\frac{\partial Э}{\partial\{U\}} = 0.$$

В последующей процедуре минимизации используют правила дифференцирования (А.6) и (А.7).

При решении плоской задачи внешнюю нагрузку применяют для задания граничных условий, поэтому при минимизации энергии фактически дифференцирование происходит только по потенциальной энергии упругой деформации:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \frac{1}{2} \int\limits_V \Big(2[B]^T [D][B]\{U\} - [B]^T [D]\{\varepsilon_T\} - [B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\} -$$

$$- [B]^T [D]\{\varepsilon_T\} - [B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\}\Big) \, \mathrm{d}V =$$

$$= \int\limits_V \Big([B]^T [D][B]\{U\} - [B]^T [D]\{\varepsilon_T\} - [B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\}\Big) \, \mathrm{d}V. \quad (3.39)$$

Объём конечного элемента приводится в выражении (3.8):

$$\mathrm{d}V \approx r \, \mathrm{d}r \approx r \left(R_j - R_i\right),$$

где r = расстояние до центра тяжести сечения конечного элемента, в случае плоской задачи допускается принимать

$$r \approx \frac{R_j + R_i}{2}. \quad (3.40)$$

В дальнейшем выражение (3.39) с учётом (3.8) приводим к виду:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ — глобальная матрица жёсткости; $\{U\}$ — глобальный вектор нагрузки, которые определяют соотношениями

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} [k^{(e)}]; \qquad \{F\} = \sum_{e=1}^{E} \{f^{(e)}\}.$$

Здесь

$$\left[k^{(e)}\right] = [B]^T [D][B]\{U\} r \left(R_j - R_i\right);$$

$$\{f^{(e)}\} = \left([B]^T [D]\{\varepsilon_T\} + [B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\}\right) r (R_j - R_i),$$

где $\{\varepsilon_T\}$ и $\{\varepsilon_{cr}\}$ определяются согласно принятым теориям ползучести в выражениях (3.33) и (3.34).

3.3.2.4 Граничные условия задачи

Граничные условия для ПДС имеют вид:

$$\sigma_r(r_a) = -P_a; \qquad \sigma_r(r_b) = -P_b,$$

где P_a и P_b — соответственно давление на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

Однако решение задачи происходит с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Тогда для сопоставления давления на поверхностях цилиндра в перемещениях соответствующих узлов можно воспользоваться первым выражением закона Гука в обратной форме (1.5):

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_r - 3K\varepsilon_T - 2\mu\varepsilon_{cr,r} - \lambda\theta_{cr},$$

где

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$
$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)};$$
$$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z}.$$

После математических преобразований и упрощений получаем:

$$\varepsilon_r(1-\nu) + \nu\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_r}{E}(1+\nu)(1-2\nu) + (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\varepsilon_{cr,r} + \nu\theta_{cr}. \tag{3.41}$$

Деформации ε_r и ε_θ аппроксимируются по конечному элементу с помощью выражения (3.36). Окончательно граничное условия для крайних конечных элементов принимает вид:

$$u_i\left(\frac{-1+\nu\frac{R_j}{r}}{R_j - R_i}\right) + u_j\left(\frac{1-\nu\frac{R_i}{r}}{R_j - R_i}\right) = \frac{\sigma_r}{E}(1+\nu)(1-2\nu) + (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\varepsilon_{cr,r} + \nu\theta_{cr} \tag{3.42}$$

или

$$u_i\left(\frac{-1+\nu\frac{R_j}{r}}{R_j - R_i}\right) + u_j\left(\frac{1-\nu\frac{R_i}{r}}{R_j - R_i}\right) = \frac{\sigma_r}{E}(1+\nu)(1-2\nu) + (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\varepsilon_{cr,r}, \tag{3.43}$$

если в расчёте используется теория, по которой сумма всех деформаций ползучести равна нулю, т. е. $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z} = 0$.

В выражениях (3.42) и (3.43) вместо σ_r подставляют напряжения на внутренней и внешних поверхностях цилиндра соответственно для внутреннего и внешнего конечных элементов.

3.3.3 Решение типовых задач

Рассматривается определение напряжённо-деформированного состояния цилиндрического тела из эпоксидной смолы ЭДТ-10. Физико-механические, реологические и теплофизические характеристики полимера приведены в работе [162]:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 0.17\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}};\\
\rho &= 1250\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\\
c &= 0.35\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{град}};\\
\nu &= 0.3;\\
E &= -17.5T + 3525\ \text{МПа};\\
E_\infty &= -30T + 3150\ \text{МПа};\\
m^* &= -0.011T + 4.75\ \text{МПа};\\
\eta_0^* &= 104430\exp(-0.0275T)\ \text{МПа}\cdot\text{ч},
\end{aligned}
$$

где λ — коэффициент теплопроводности; ρ — плотность материала; c — удельная теплоёмкость материала; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; E_∞ — модуль высокоэластичности; m^* — модуль скорости; η_0^* — коэффициент начальной релаксационной вязкости.

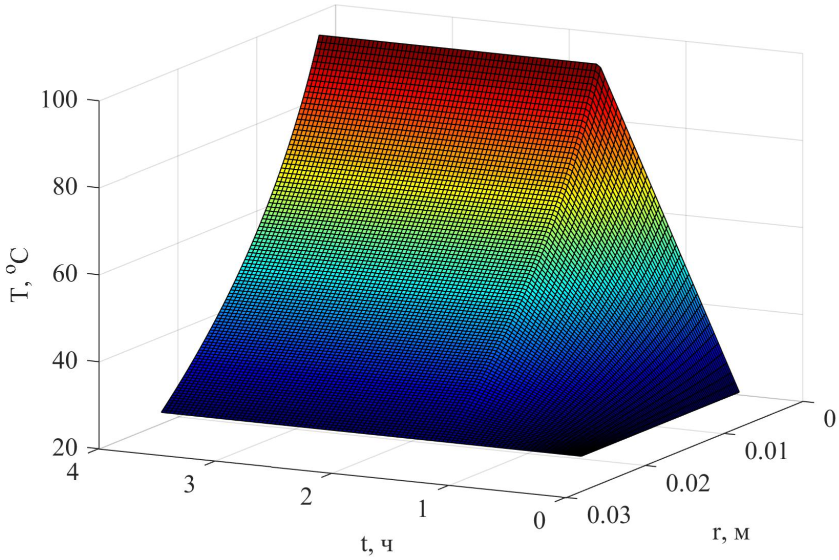
Геометрические параметры и граничные условия: $r_a = 8$ мм; $r_a = 28$ мм; $P_a = 0$ МПа; $P_b = 0$ МПа; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 100 шт.; время, в течение которого происходит расчёт НДС 3.6 ч; температура на внешней поверхности цилиндра ($r = r_b$) 28°C; начальная температура на внутренней поверхности цилиндра ($r = r_a$) 28°C; конечная температура на внутренней поверхности цилиндра ($r = r_a$) 100°C; время роста температуры на внутренней поверхности цилиндра от своего начального значения до конечного 1.2 ч.

Методика решения задач в учётом ползучести материала приводится в главе 2.2.2 на с. 59, код программы — в приложении Б.1.

Результаты расчёта поставленной задачи даны на рисунках 3.5–3.10 (стр. 93–98).

На рисунке 3.7 показано распределение напряжения в толще цилиндра во времени. При изменении температурного поля происходит и изменение физико-механических и реологических параметров полимера, таким образом имеет место косвенная (наведённая) неоднородность. Темной сеткой приводится решение, полученное с помощью метода конечных разностей, светлой — с помощью метода конечных элементов. Результаты, полученные разными методами, совпали между собой с разностью, на несколько порядком ниже полученных величин, что позволяет говорить о *достоверности результатов*. Также, для оценки достоверности, приводится рисунок 3.11, на котором дана полная деформация (ε_z) вдоль оси z (для ПДС $\varepsilon_z = 0$) и полная деформация ползучести $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z} = 0$ при расчёте по соответствующей теории. Как видно из этих графиков, оба условия выполняются полностью в пределах точности ЭВМ.

а



б

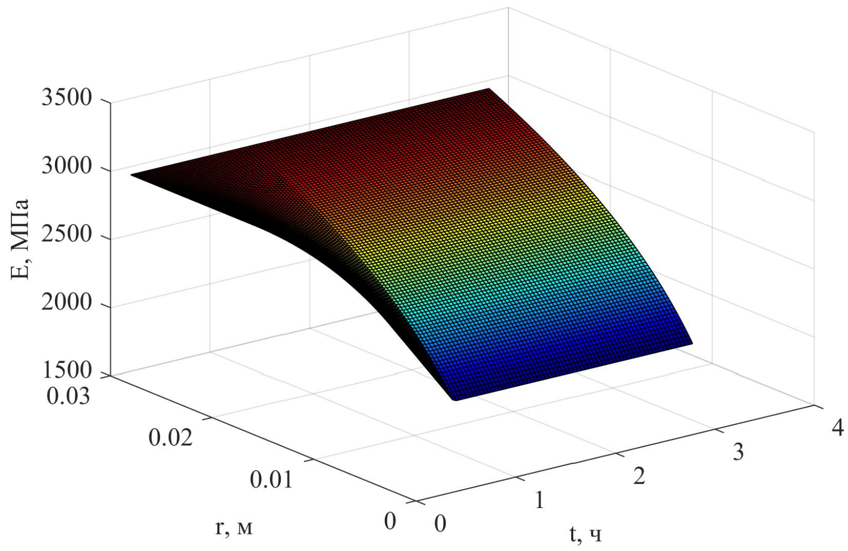


Рисунок 3.5 — Изменение температуры в цилиндре с течением времени (а) и изменение модуля упругости под влиянием температурного градиента (б)

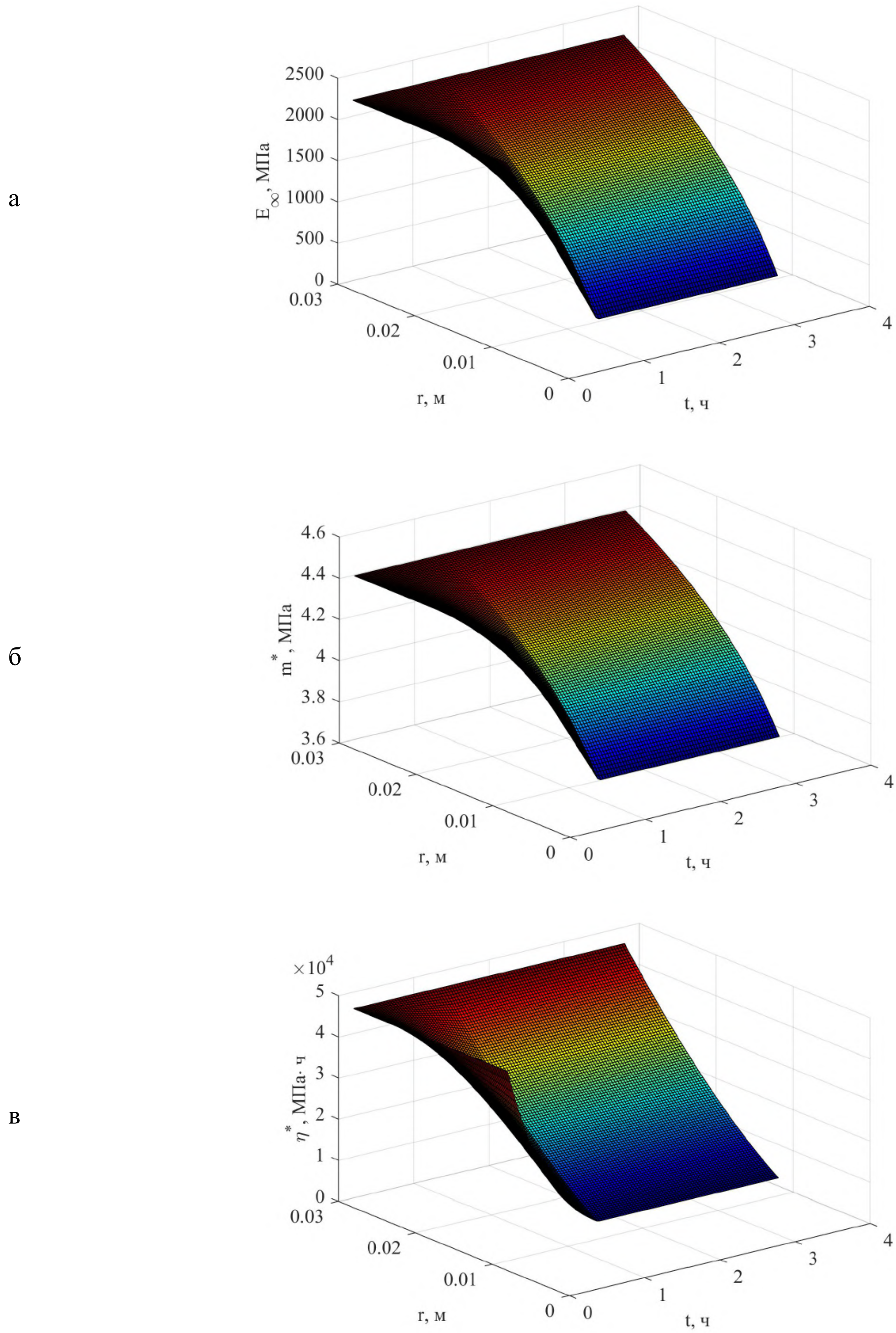


Рисунок 3.6 — Изменение реологических параметров материала под действием температурного поля с течением времени: а — модуль высокоэластичности ε_∞; б — модуль скорости m^*; в — коэффициент начальной релаксационной вязкости η^*

а

б

в

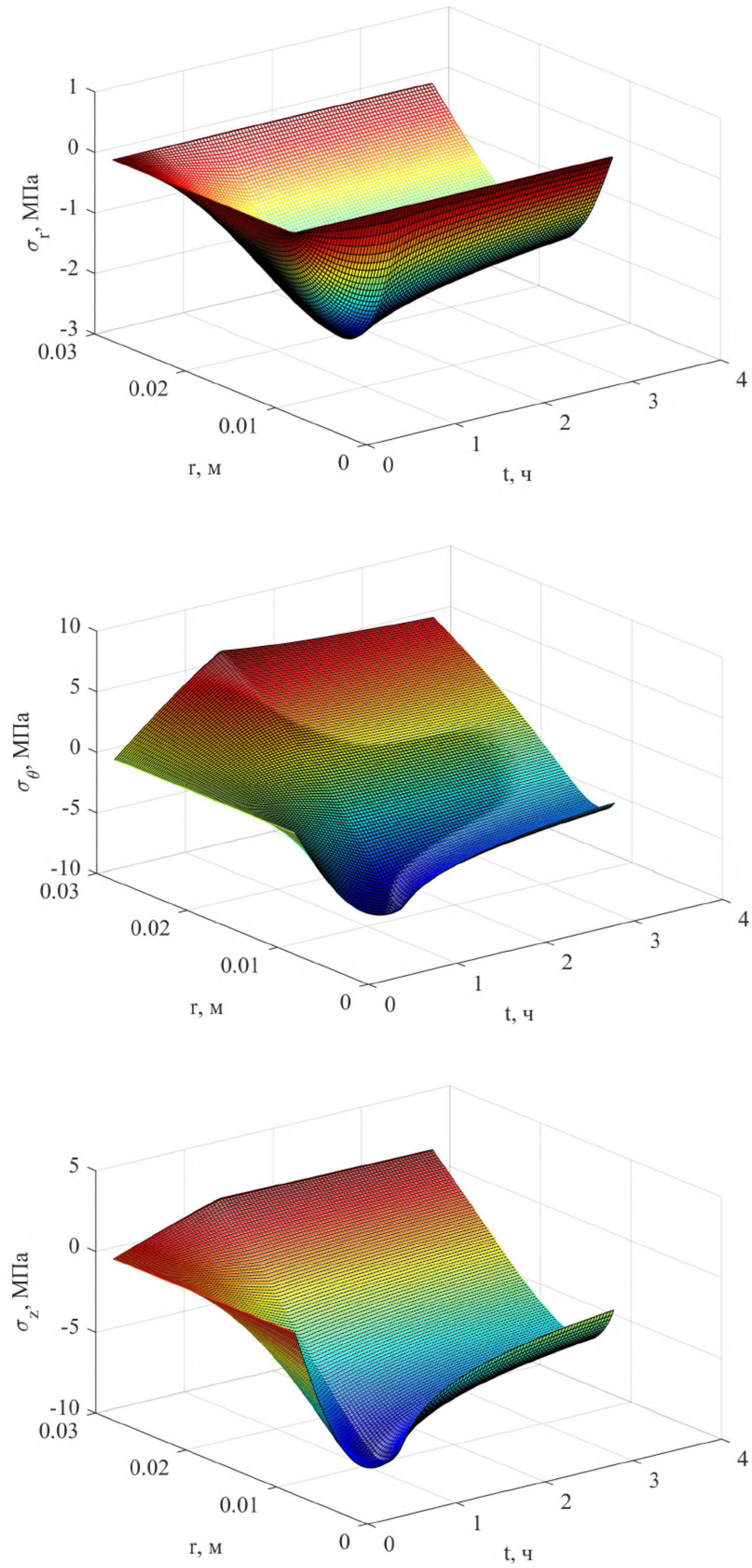


Рисунок 3.7 — Изменение напряжений во времени: а — радиальных σ_r; б — окружных σ_θ; в — осевых σ_z

а

б

в

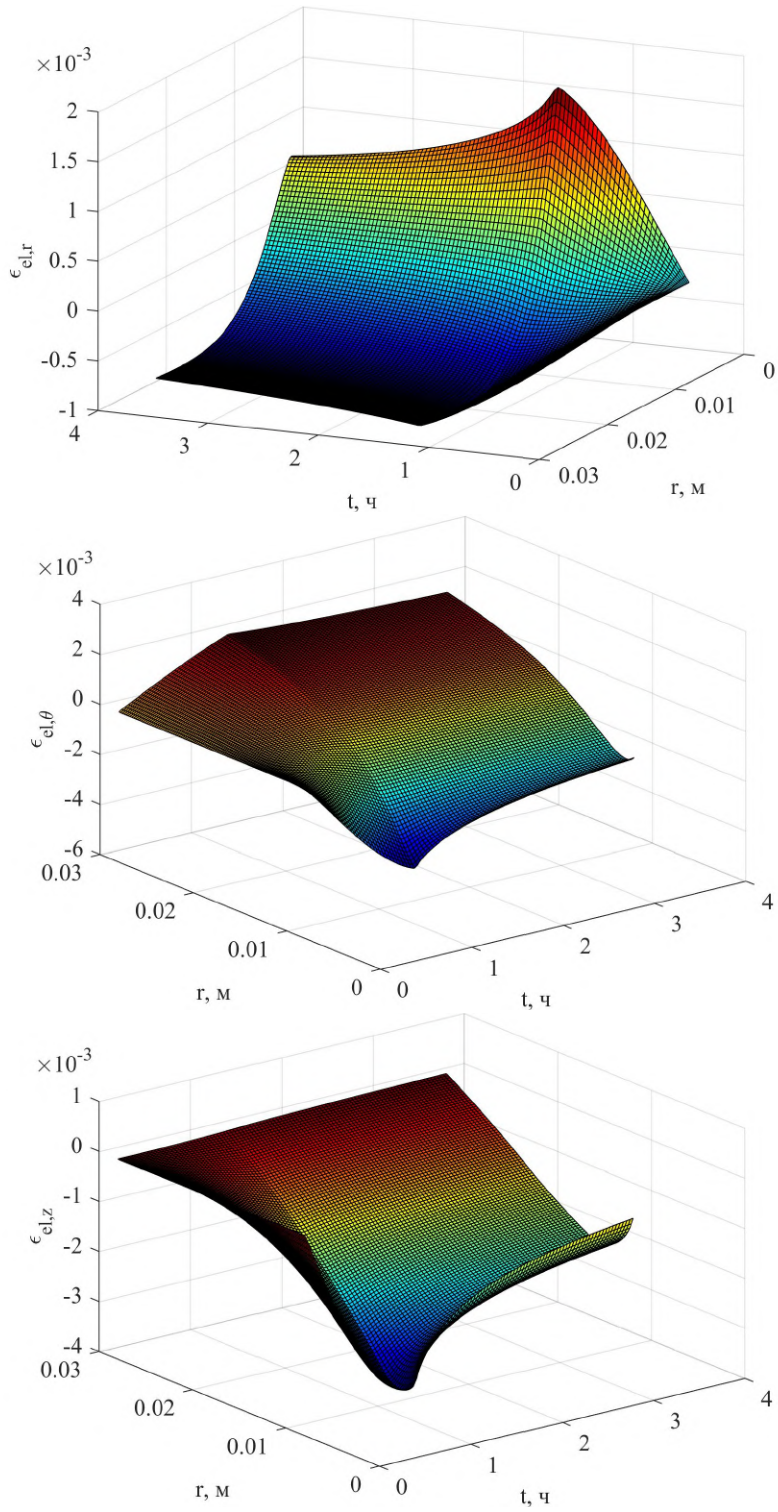


Рисунок 3.8 — Изменение упругих деформаций во времени: а — вдоль оси r; б — вдоль оси θ; в — вдоль оси z

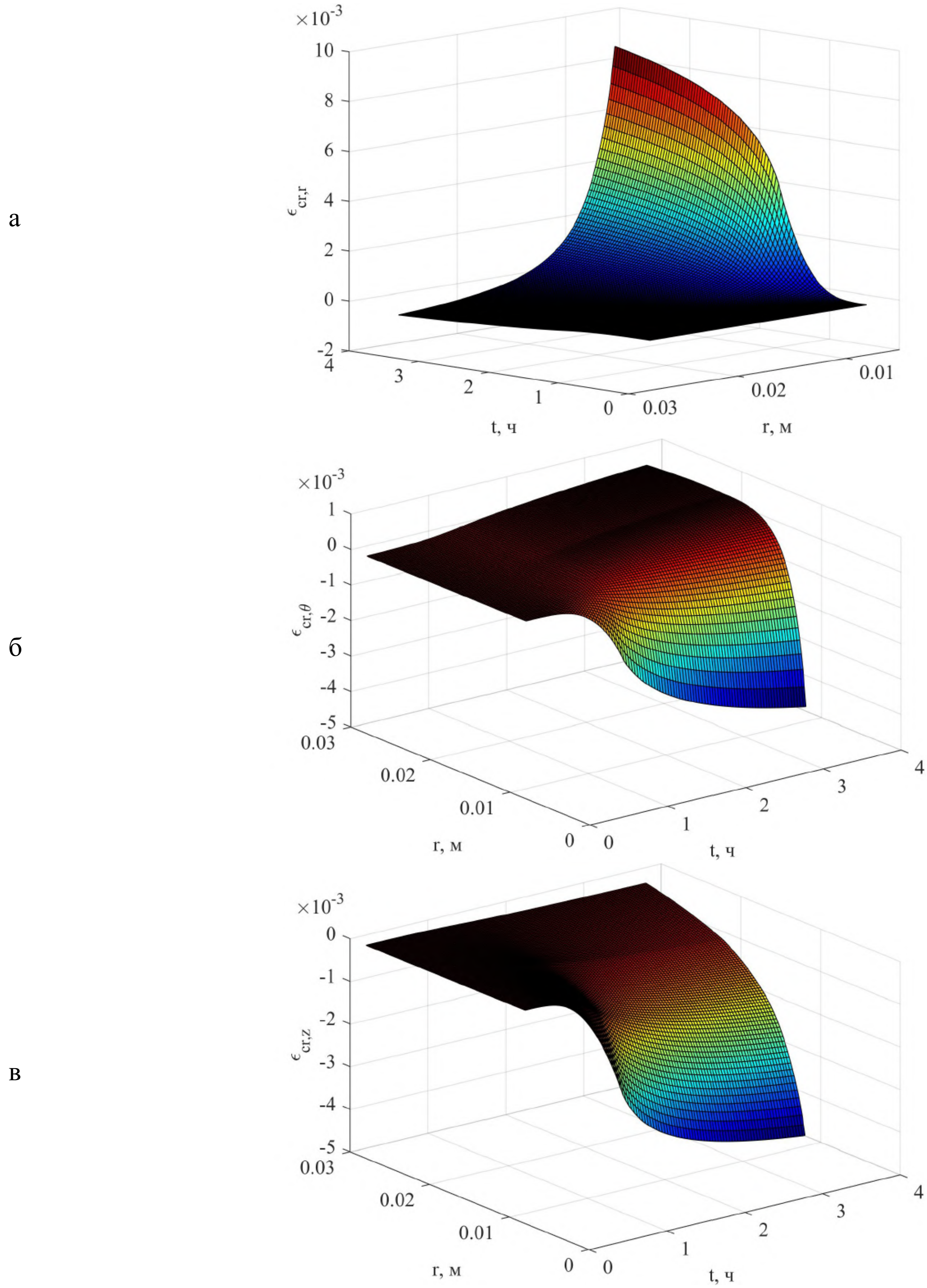
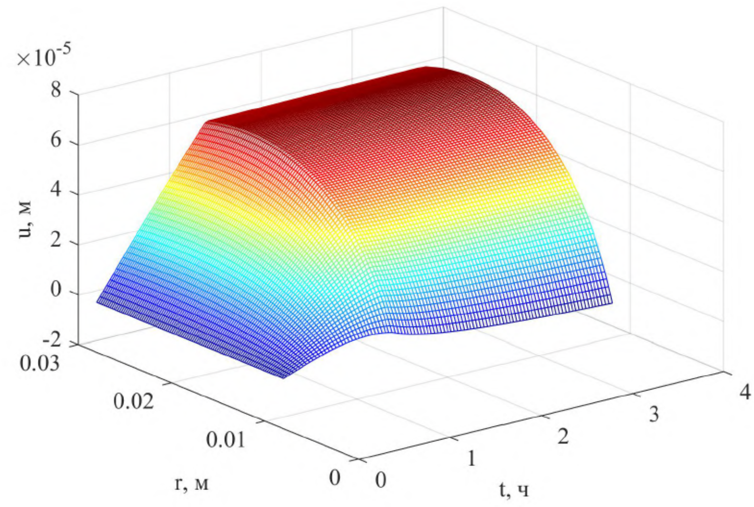
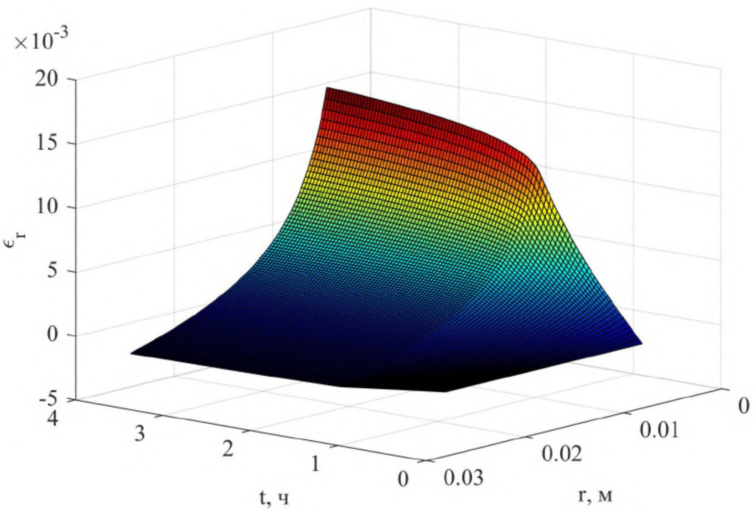


Рисунок 3.9 — Изменение деформаций ползучести во времени: а — вдоль оси r; б — вдоль оси θ; в — вдоль оси z

а



б



в

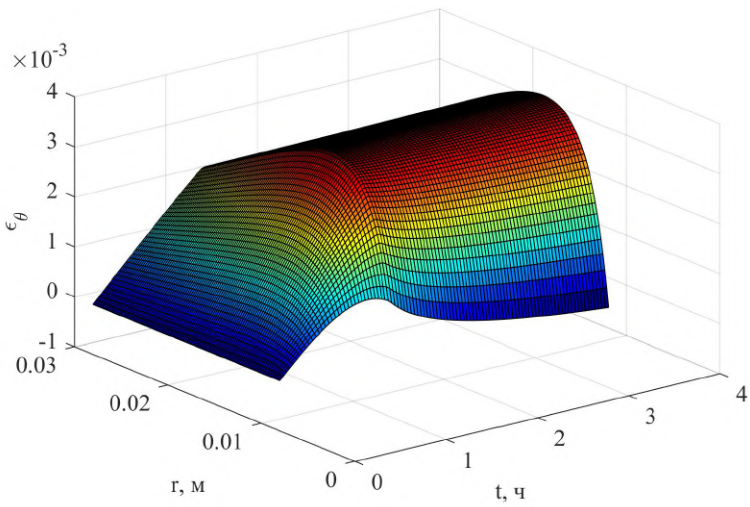
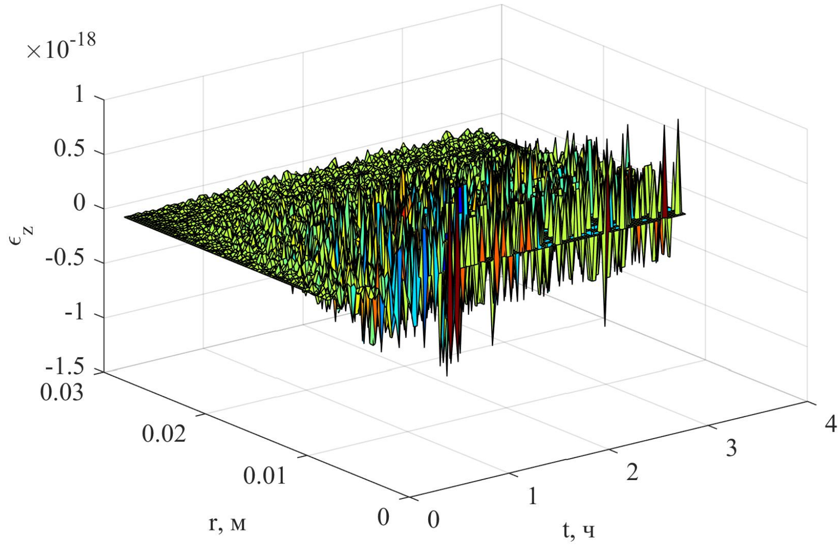


Рисунок 3.10 — Перемещения вдоль оси *r* (а) и изменение деформаций ползучести во времени: б — вдоль оси *r*; в — вдоль оси θ

а



б

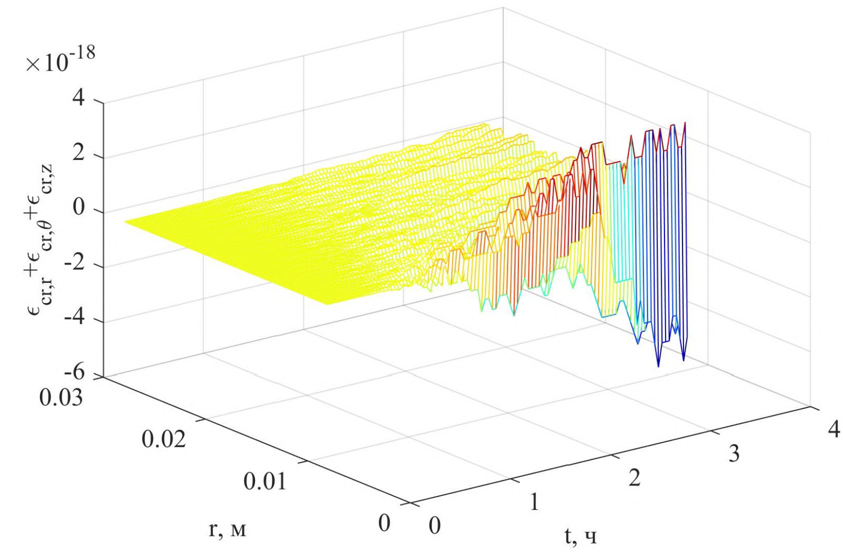


Рисунок 3.11 — Оценка достоверности полученных данных: а — полная деформация ($\varepsilon_z \approx 0$) вдоль оси z; б — полная деформация ползучести $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z} \approx 0$ вдоль оси z

В связи с тем, что расчёт полимерных тел во времени проводится пошагово, при этом количество шагов может измеряться сотнями и тысячами, необходимо оптимизировать методику расчёта. Для оценки достоверности полученных данных, приводится сравнение решение задачи, полученной в параграфе 3.3 (с. 81) с решениями, к которым была применена оптимизация.

3.4 Оптимизация процесса решения задач

3.4.1 Оптимизация интервала времени

Как говорилось ранее, при расчёте ползучести используют пошаговый метод, при котором высокоэластические деформации на следующем этапе времени определяют как сумму высокоэластических деформаций на текущем этапе времени с прибавлением произведения скорости деформаций на шаг аппроксимации по времени, т. е.

$$\varepsilon_{cr,S}(t+1) = \varepsilon_{cr,S}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,S}(t)}{\partial t}\Delta t.$$

Как видно из представленной формулы, точность зависит от размера выбранного шага по времени, уменьшая точность вычислений с ростом этого интервала. Если используется постоянное количество интервалов при аппроксимации времени, то точность падает с увеличением интервала времени, на котором производится весь расчёт. Частично решить данную проблему можно, увеличив количество аппроксимирующих интервалов по времени, однако, это порождает две другие проблемы:

1. рост машинного времени, требуемого на решение поставленной задачи в связи с увеличением количества шагов по времени;
2. накопление ошибки на каждом временном интервале в связи с ограничениями, накладываемыми разрядностью используемой электронно-вычислительной машины.

Основной рост деформаций ползучести происходит в самом начале, поэтому выходом из сложившейся ситуации может быть использование переменных аппроксимирующих временных интервалов, более коротких в самом начале расчёта и увеличивающихся к концу (рисунок 3.12). Для этого можно принять распределение аппроксимирующих интервалов по времени как в соответствии с логарифмическим законом, так и основанным на геометрической прогрессии.

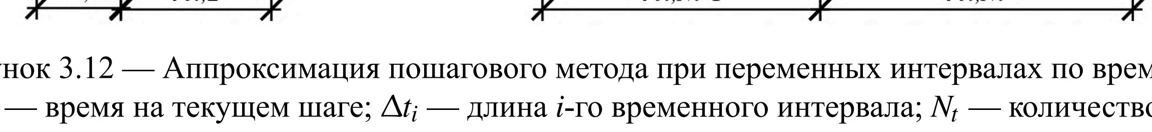


Рисунок 3.12 — Аппроксимация пошагового метода при переменных интервалах по времени: t — время на текущем шаге; Δt_i — длина i-го временного интервала; N_t — количество аппроксимирующих интервалов по времени

Распределение по логарифмическому закону можно производить в соответствии с выражением [13]:

$$t(i) = \exp\left(\frac{\log(t_{N_t+1})}{N_t(i-1)}\right) - 1, \qquad i = 1\ldots N_t + 1.$$

Как будет показано дальше, логарифмическое распределение не всегда оптимально.

Альтернативой логарифмического распределения является распределение по закону геометрической прогрессии. В этом случае необходимо задать общее количество интервалов во времени N_t и отношение величины последнего интервала $h_{t,Nt}$ к величине первого интервала $h_{t,1}$.

$$k = \frac{h_{t,Nt}}{h_{t,1}}.$$

Согласно [163] любой член геометрической прогрессии определяется по формуле

$$h_{t,n} = h_{t,1} q^{(n-1)}, \tag{3.44}$$

где $h_{t,1}$ — первый член; q — знаменатель прогрессии; n — номер искомого члена.

Весь период расчёта t_{Nt+1} фактически представляет собой сумму S_n первых n членов

$$S_N = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = t_{Nt+1}. \tag{3.45}$$

Из формулы (3.44) определяем знаменатель прогрессии:

$$q = k^{\left(\dfrac{1}{n-1}\right)}$$

и, подставляя в выражение (3.45), окончательно первый член определяем как:

$$h_{t,1} = t_{Nt+1}\frac{1-q}{1-q^n}.$$

3.4.2 Оптимизация определения центральной точки конечного элемента

В выражении матрицы жёсткости, а также вектора нагрузок, входит параметр r (см. рисунок 3.2, с. 74), т. е. координата некоторой точки, находящейся внутри конечного элемента. Обычно параметр r принимают в середине элемента, как в выражении (3.40), с. 90. Однако, это может быть справедливо при решении задач в декартовой системе координат, когда этот параметр соответствует положению центра тяжести конечного элемента. Иное дело, если имеет место осесимметричная постановка, или решение задачи производится в сферических координатах, в этом случае предлагается иной подход.

Определим такое положение точки r, при котором внутренний объём конечного элемента (основание r–R_i) был бы равен внешнему объёму конечного элемента (основание R_j–r).

Для удобства вычисления рассмотрим конечный элемент при θ от 0 до 360 градусов. Тогда площадь внутреннего основания элемента должна быть равна площади внешнего основания элемента:

$$\pi\left(r^2 - R_i^2\right) = \pi\left(R_j^2 - r^2\right).$$

Отсюда положение центра тяжести конечного элемента при равенстве объёма его внешней и внутренней частей определяется выражением:

$$r = \sqrt{\frac{R_j^2 + R_i^2}{2}}. \tag{3.46}$$

3.5 Решение задач и анализ полученных данных

Полученные данные анализируют в случае постоянного шага, двумя методами: конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР). В данной главе вопрос оптимизации положения центральной точки не рассматривается, так как основной упор делается именно на оптимизацию по времени. Анализ оптимизации центральной точки будет проводится в главе, посвящённой решению двумерных задач.

Проводится анализ задачи, подробно рассмотренной в параграфе 3.3.3, на с. 91. В таблицах 3.3 и 3.4 приведены результаты расчёта плоской осесимметричной задачи методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) при равномерном, логарифмическом шагах по времени и при шагах по времени в соответствии с геометрической прогрессией. Варьируемые параметры: количество конечных элементов N_r по радиусу (МКЭ) или количество узлов (МКР) и количество интервалов по времени N_t.

В качестве искомого параметра приводится окружное напряжение σ_θ. Связано это с тем, что окружное напряжение зависит дифференциально от перемещений в методе конечных элементов и дифференциально от радиальных напряжений в методе конечных разностей. Таким образом, стремление значения окружного напряжения к некоторому конечному значению позволяет говорить и о сходимости решения.

Анализ результатов решения показывает, что при максимальном количестве интервалов (узлов) по радиусу и времени результаты расчёта по всем методикам разбиения временного интервала стремятся к некоторому конечному значению $\sigma_{\theta,i=1} = -3.80\,$МПа на внутренней поверхности и $\sigma_{\theta,i=Nr} = 5.40\,$МПа на внешней поверхности цилиндра.

Кроме того, с первого взгляда может показаться, что поведение изменения напряжения в случае постоянного количества интервалов более стабильно по отношение к величине в конце расчётного периода. Однако это ощущение ложное и связано с развитием неустановившейся ползучести и образованием «черпаков», отчётливо наблюдаемых изменений напряжений во времени (рисунок 3.7), изменения упругих деформаций во времени (рисунок 3.8) и изменения деформаций ползучести во времени (рисунок 3.9). На приведенных рисунках процесс неустановившейся ползучести занимает значительное время, поэтому равномерное разбиение по времени даёт приемлемый результат. В случае же рассмотрения весьма длительных процессов (месяцы и годы) равномерное распределение по времени не способно даже отразить хоть какой-то этап неустановившейся ползучести (данная ситуация будет рассмотрена в главе 6 при исследовании длительной прочности адгезионного соединения).

Таким образом, максимально достоверным является результат с применением разбиения временных интервалов в соответствии с геометрической прогрессией.

3.6 Выводы по главе

1. Доказана необходимость аппроксимации производной температуры по времени до составления функционала температурного поля. Данное обстоятельство не учитывается в многочисленной литературе по методу конечных элементов.

2. Доказана работоспособность предложенных методик расчёта путём модельного решения задачи вязкоупругости цилиндрического тела с учётом изменения температурного режима. Все физико-механические параметры полимера являются функцией температуры.

3. На основании решения поставленной задачи доказана сходимость полученных результатов двумя независимыми методами: МКЭ и МКР. Сумма составляющих высокоэластических деформаций стремится к нулю, что полностью соответствует принятой теории связи Максвелла–Гуревича.

4. Проведён ряд оптимизационных подходов к повышению точности результатов: использование непостоянных интервалов по времени, а также применены координаты центра тяжести сечения вместо координаты срединной точки.

5. Показано, что в случае длительных временных процессов необходимо использовать разбиение времени в соответствии с геометрической прогрессией для возможности учёта неустановившейся ползучести; равномерный шаг по времени более точен при описание кратковременных процессов.

Таблица 3.3 — Результаты расчёта плоской осесимметричной задачи методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) при *равномерном* и *логарифмическом* шагах по времени: N_r — количество конечных элементов по радиусу (МКЭ) или количество узлов (МКР); N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_t, шт.	Напряжение	МКЭ $i=1$	МКЭ $i=N_r$	МКР $i=1$	МКР $i=N_r$
Равномерный шаг по времени						
21	20	σ_θ	−4.0727	5.2225	−3.7680	4.9653
51			−3.8759	5.3313	−3.7033	5.2242
101			−3.7911	5.3684	−3.6962	5.3141
501			−3.7151	5.3983	−3.6949	5.3874
21	50	σ_θ	−4.1307	5.2295	−3.8316	4.9729
51			−3.9378	5.3384	−3.7684	5.5316
101			−3.8545	5.3756	−3.7612	5.3215
501			−3.7798	5.4056	−3.7599	5.3946
21	100	σ_θ	−4.1490	5.2317	−3.8518	4.9753
51			−3.9574	5.3407	−3.7890	5.2340
101			−3.8746	5.3779	−3.7818	5.3238
501			−3.8003	5.4079	−3.7805	5.3969
21	500	σ_θ	−4.1635	5.2335	−3.8678	4.9773
51			−3.9728	5.3424	−3.8052	5.2358
101			−3.8904	5.3797	−3.7981	5.3256
501			−3.8164	5.4097	−3.7967	5.3988
Логарифмический шаг по времени						
21	20	σ_θ	−4.0362	5.2036	−3.7287	4.9467
51			−3.8377	5.3120	−3.6639	5.2051
101			−3.7524	5.3491	−3.6568	5.2949
501			−3.6758	5.3789	−3.6555	5.3679
21	50	σ_θ	−4.1147	5.2220	−3.8139	4.9655
51			−3.9209	5.3307	−3.7508	5.2240
101			−3.8373	5.3679	−3.7437	5.3138
501			−3.7623	5.3978	−3.7423	5.3869
21	100	σ_θ	−4.1414	5.2281	−3.8434	4.9718
51			−3.9493	5.3370	−3.7806	5.2303
101			−3.8664	5.3742	−3.7734	5.3201
501			−3.7919	5.4041	−3.7721	5.3932
21	500	σ_θ	−4.1619	5.2328	−3.8661	4.9765
51			−3.9712	5.3417	−3.8035	5.2351
101			−3.8888	5.3789	−3.7964	5.3249
501			−3.8147	5.4090	−3.7950	5.3980

Таблица 3.4 — Результаты расчёта плоской осесимметричной задачи методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) при шагах по времени в соответствии с *геометрической прогрессией*: N_r — количество конечных элементов по радиусу (МКЭ) или количество узлов (МКР); N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_t, шт.	Напряжение	МКЭ $i=1$	МКЭ $i=N_r$	МКР $i=1$	МКР $i=N_r$
Степенной шаг по времени $k_g = 10^2$						
21	20	σ_θ	−3.8580	5.1470	−3.5378	4.8898
51			−3.6495	5.2545	−3.4677	5.1474
101			−3.5603	5.2912	−3.4604	5.2369
501			−3.4803	5.3207	−3.4591	5.3097
21	50	σ_θ	−4.0527	5.2027	−3.7462	4.9461
51			−3.8553	5.3111	−3.6823	5.2044
101			−3.7704	5.3481	−3.6752	5.2940
501			−3.6941	5.3780	−3.6738	5.3670
21	100	σ_θ	−4.1106	5.2186	−3.8094	4.9623
51			−3.9166	5.3273	−3.7463	5.2207
101			−3.8330	5.3645	−3.7392	5.3104
501			−3.7579	5.3944	−3.7379	5.3835
21	500	σ_θ	−4.1560	5.2310	−3.8596	4.9747
51			−3.9649	5.3399	−3.7969	5.2333
101			−3.8823	5.3771	−3.7898	5.3230
501			−3.8081	5.4071	−3.7884	5.3961
Степенной шаг по времени $k_g = 10^4$						
21	20	σ_θ	−2.8545	4.9797	−2.3110	4.7092
51			−2.6265	5.0819	−2.4145	4.9702
101			−2.5267	5.1162	−2.4136	5.0596
501			−2.4354	5.1437	−2.4109	5.1323
21	50	σ_θ	−3.9306	5.1669	−3.6128	4.9099
51			−3.7262	5.2747	−3.5474	5.1678
101			−3.6387	5.3115	−3.5406	5.2573
501			−3.5602	5.3411	−3.5393	5.3302
21	100	σ_θ	−4.0541	5.2027	−3.7475	4.9462
51			−3.8567	5.3112	−3.6837	5.2044
101			−3.7718	5.3482	−3.6766	5.2941
501			−3.6956	5.3781	−3.6753	5.3671
21	500	σ_θ	−4.1453	5.2280	−3.8478	4.9718
51			−3.9535	5.3369	−3.7850	5.2303
101			−3.8707	5.3741	−3.7779	5.3200
501			−3.7963	5.4041	−3.7765	5.3931

Глава 4. Моделирование напряжённо–деформированного состояния тел под воздействием физических полей

4.1 Влияние на напряжённо–деформированное состояние полимера ионизирующего излучения и добавок

Полиэтилен высокой плотности (ПЭВП) является одним из самых часто используемых полимеров в медицине. При этом низкий модуль упругости, его вязкоупругое поведение и низкая биологическая активность — накладывают ограничение на его применимость. Выходом может служить введение частиц гидроксиапатита (ГА) для улучшения свойств ПВП, в результате чего полученный композит может выступать альтернативой использованию металлических изделий для заменителей костей и ортопедических имплантов.

На примере результатов экспериментальных данных работы [164] определили и провели анализ изменения упругих и реологических параметров ПЭВП с учётом добавок из ПЭВП и облучением материала до 70 кГр (сила облучения увеличивалась на 5 кГр каждый час).

Экспериментальные изыскания по релаксации напряжений чистого ПЭВП и его нанокомпозитных образцов проводили при постоянной температуре $T = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$ и постоянной деформации стержня $\varepsilon = 3\,\%$, при этом наблюдали снижение уровня напряжения в течение 3 часов.

Результаты определения экспериментальных данных релаксации напряжений облучённого и необлучённого ПЭВП и его нанокомпозитов, содержащих 30 % ГА приведены на рисунке 4.1. Анализируя полученные кривые, установили, что релаксация нанокомпозитов с ГА и облученных образцов оказывается боле выраженной, чем образцы из чистого ПЭВП. Также уровень начального напряжения и напряжения в конце процесса релаксации имеют более высокие значения по сравнению с необлучёнными образцами. Рост напряжения в начальный момент времени ($t = 0$) объясняется присутствием наночастиц ГА в полимерной матрице ПЭВП и, как следствие, изменением жёсткости. На основании анализа рисунка 4.1делаем вывод, что релаксация напряжения ПЭВП с добавками ГА и облучением через 3 часа проведения испытания составила 37 % от его значения в начальный момент времени, при этом снижение напряжения для ПЭВП без добавок и облучения снизились всего на 24 % от начального значения. Нанокомпозит ПЭВП с ГА способен больше уменьшать напряжения в заменителях кости со временем, что положительно сказывается на его работе совместно с организмом при протезировании.

4.1.1 Определение упругих и реологических постоянных ПЭВП

Дальнейшие выкладки основаны на методике, приведённой в параграфе 2.2 (стр. 48), при этом будут использоваться некоторые отличия в методике определения скорости изменения напряжения от времени. Материалы данного параграфа отражены автором в научной публикации [44].

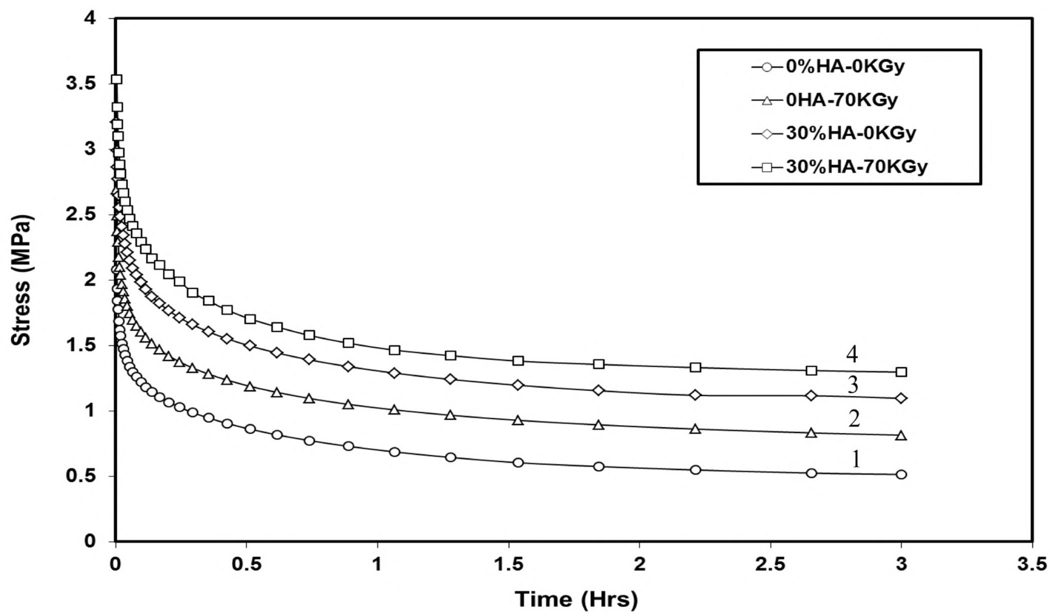


Рисунок 4.1 — Результаты релаксации напряжений ПЭВП: 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

За основу анализа и последующего определения упругих и реологических параметров ПЭВП и его нанокомпозита был использован график 4.1 из работы [164].

В связи с большим количеством точек на графиках напряжения–деформации (σ–ε), их данные в табличной форме в параграфе не приводятся.

Изначально все выкладки из параграфа 2.2 повторяются вплоть до формулы (2.60) включительно.

Следующим этапом предстоит определение скорости изменения функции напряжений во времени. Однако вместо метода неопределённых коэффициентов будет использован другой подход с применением функции **polyfit** из программного комплекса Matlab, которая имеет вид

p = polyfit(x, y, n)

и находит коэффициенты полинома $p(x)$ степени n, который аппроксимирует функцию $y(x)$ с применением метода наименьших квадратов. Выходом является строка p длины $n+1$, содержащая коэффициенты аппроксимирующего полинома:

$$p(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \cdots + p_n x + p_{n+1}.$$

Происходит подбор коэффициентов аппроксимирующего полинома по трём точкам (квадратный полином или полином 2-й степени), который имеет вид с учётом вида исходных функций

$$\sigma_i = p_1 t^2 + p_2 t + p_3. \tag{4.1}$$

Для определения искомой производной функции в каждой точке, произведём дифференцирование выражения (4.1) по времени:

$$\sigma_i' = 2p_1 t + p_2. \tag{4.2}$$

Напомним, что штрихом «$'$» обозначаем производную по времени.

Таким образом, использование функции polyfit позволяет достаточно быстро и удобно получить необходимые коэффициенты p_1 и p_2, затем при помощи выражения (4.2) — определить скорость роста функции напряжения во времени.

Следующий ход действий не отличается от приведённого в параграфе 2.2. Результаты определения упругих и реологических параметров нелинейного уравнения Максвелла–Гуревича приведены в таблице 4.1

Таблица 4.1 — Упругие и релаксационные параметры ПЭВП

ПЭВП	E, МПа	E_∞, МПа	m^*, МПа	η_0^*, МПа·ч
0 % ГА, 0 кГр	693.9890	228.8515	5.5445	1113.0
0 % ГА, 70 кГр	897.5469	388.1827	6.4429	1734.4
30 % ГА, 0 кГр	1069.3	556.7567	8.0948	1832.5
30 % ГА, 70 кГр	1178.4	684.5894	10.1390	1768.4

Так как в результате определения получаем 4 значения каждого переменного в зависимости от доли ГА (GA, доля изменяется от 0 до 0.3) и уровня облучения полимера Φ, кГр. Для определения переменных при промежуточных значения доли ГА и уровня облучения, произведём интерполяцию при помощи полинома, имеющего вид:

$$f(x,y) = a + bx + cy + dxy. \tag{4.3}$$

Тогда выражение модуля упругости в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график изменения модуля упругости представлен на рисунке 4.2, стр. 111):

$$E(\text{ГА}, \Phi) = 694 + 1251 \cdot \text{ГА} + 2.908 \cdot \Phi - 4.498 \cdot \text{ГА} \cdot \Phi \text{ [МПа]}. \tag{4.4}$$

Выражение модуля высокоэластичности в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график изменения модуля высокоэластичности представлен на рисунке 4.3, стр. 111):

$$E_\infty(\text{ГА}, \Phi) = 228.9 + 1093 \cdot \text{ГА} + 2.276 \cdot \Phi - 1.5 \cdot \text{ГА} \cdot \Phi \text{ [МПа]}. \tag{4.5}$$

Выражение модуля скорости в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график изменения модуля скорости представлен на рисунке 4.4, стр. 112):

$$m^*(\text{ГА}, \Phi) = 5.545 + 8.501 \cdot \text{ГА} + 0.01283 \cdot \Phi + 0.05456 \cdot \text{ГА} \cdot \Phi \text{ [МПа]}. \tag{4.6}$$

Выражение коэффициента начальной релаксационной вязкости в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график коэффициента начальной релаксационной вязкости представлен на рисунке 4.5, стр. 112):

$$\eta_0^*(\text{ГА}, \Phi) = 1113 + 2398 \cdot \text{ГА} + 8.877 \cdot \Phi - 32.64 \cdot \text{ГА} \cdot \Phi \ [\text{МПа} \cdot \text{ч}]. \tag{4.7}$$

Проанализировав выражения (4.4)–(4.7) и графики 4.2–4.5 (стр. 111–112), делаем вывод, что с ростом доли ГА и уровня излучения все упругие и реологические параметры увеличиваются, некоторое исключение составляет коэффициент начальной релаксационной вязкости, который при одновременном введении ГА и облучением материала имеет величину примерно такую же, как только при введении ГА, или только облучением ПЭВП.

4.1.2 Задача релаксации напряжений

Для оценки достоверности полученных упругих и реологических параметров уравнения Максвелла–Гуревича, получим теоретические кривые релаксации напряжений с использованием полученных зависимостей изменения параметров (4.4)–(4.7) и сравним их с опытными кривыми, по которым они были определены.

Полная деформация испытываемого стержня складывается из упругой и высокоэластической, и равна некоторой постоянной величине (так как в этом случае наблюдается одноосное напряжённое состояние, в дальнейших выкладках индекс оси стержня x писать не будем):

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{cr} = \text{const} = 0.03\,\text{мм}.$$

Из этого выражения можно определить напряжение в любой момент времени

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_{cr}\right). \tag{4.8}$$

Напряжение в начальный момент времени может быть определено умножением модуля упругости материала на начальную деформацию, постоянную в течение всего времени проведения опыта

$$\sigma(0) = E\varepsilon.$$

В самом начале эксперимента высокоэластическая деформация равна нулю, таким образом можно определить деформацию ползучести на следующем временном этапе

$$\varepsilon_{cr}(t+1) = \varepsilon_{cr}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr}(t)}{\partial t}\Delta t;$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}(t)}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}; \qquad f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr}; \qquad \eta^* = \eta_0^* \exp\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right).$$

Как говорилось ранее, на начальном этапе высокоэластическая деформация равна нулю ($\varepsilon_{cr} = 0$), тогда на начальном этапе времени $t = 0$ функция напряжений f^* определяется выражением

$$f^* = \sigma - E_\infty \underbrace{\varepsilon_{cr}}_{=0} = \sigma.$$

Таким образом, определяем высокоэластические деформации на следующем этапе времени $\varepsilon_{cr}(t+1)$; теперь возможно найти напряжения на следующем этапе времени $\sigma(t+1)$ при помощи выражения (4.8). Далее процесс повторяется до достижения последней точки времени проведения эксперимента.

Для оценки достоверности полученных уравнений (4.4)–(4.7), на рисунке 4.6 (стр. 113) приводится сопоставление опытных графиков (пунктирные линии) релаксации напряжений с теоретическими (сплошные линии) на основании выражений (4.4)–(4.7). Совпадение опытных и кривых линии очень хорошее, а небольшие расхождения объясняются неточностью обработки данных, полученных из анализа рисунков кривых релаксации напряжений.

Таким образом, появляется возможность предположить поведение кривых релаксации напряжений при промежуточных значениях долей ГА и уровня облучения. Построим кривые релаксации полиэтилена при следующих значениях ГА и облучения:

$$\text{ГА} = 15\,\% = 0.15; \qquad \Phi = 35\,\text{кГр}.$$

Тогда упругие и реологические параметры для данных уровней ГА и Ф примут следующие значения:

$$\begin{aligned} E(0.15, 35) &= 959.8155\,\text{МПа};\\ E_\infty(0.15, 35) &= 464.6350\,\text{МПа};\\ m^*(0.15, 35) &= 7.5556\,\text{МПа};\\ \eta_0^*(0.15, 35) &= 1.6120 \cdot 10^3\,\text{МПа} \cdot \text{ч}. \end{aligned}$$

Результат расчёта релаксации напряжений облучённого полиэтилена приведен на рисунке 4.7 (стр. 113). Анализ кривых показывает, что по сравнению с полиэтиленом без добавок, но подвергшегося облучению, полимер с половинной дозой добавок и половинной дозой облучения даёт лучшие свойства, но хуже по сравнению с необлучённым полимером, но с полной порцией добавки ГА.

Таким образом появляется возможность при анализе опытных данных релаксации напряжений прогнозировать свойства полимерных материалов при промежуточных значениях параметров. Несомненно, данная возможность ведёт к значительной экономии материальных ресурсов и человеко-часов на проведение эксперимента и его последующего анализа.

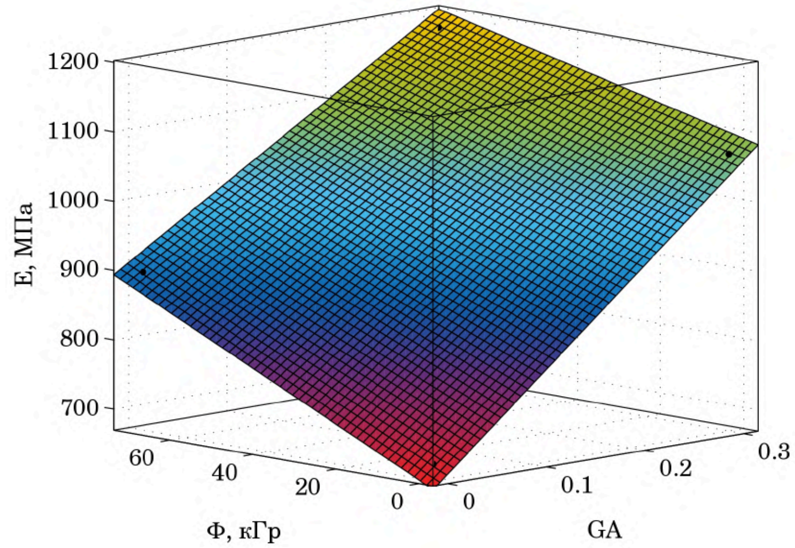


Рисунок 4.2 — Зависимость модуля упругости $E(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Ф

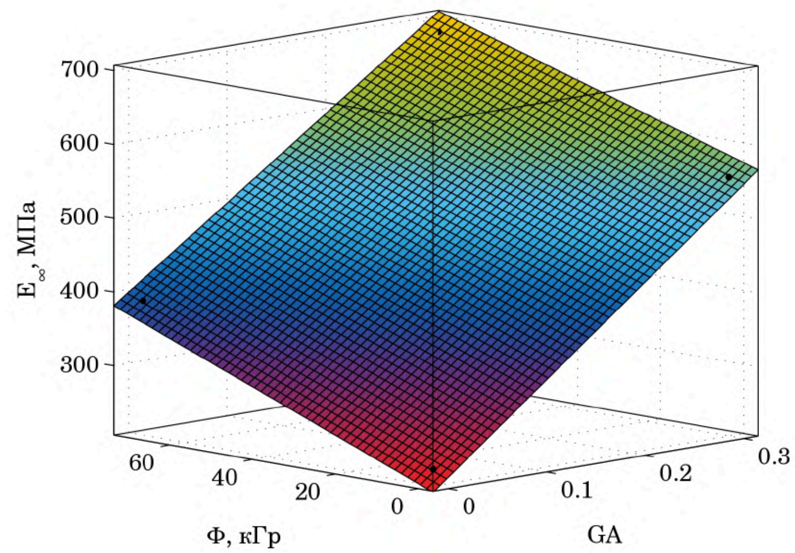


Рисунок 4.3 — Зависимость модуля высокоэластичности $E_\infty(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Ф

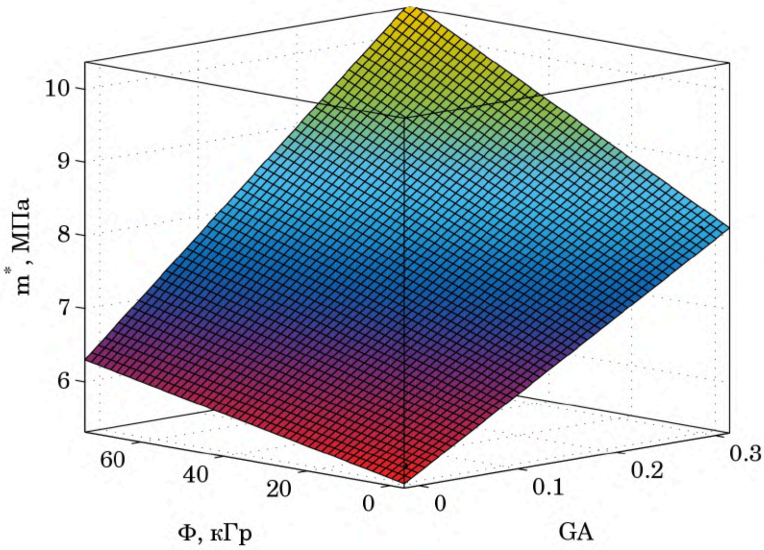


Рисунок 4.4 — Зависимость модуля скорости $m^*(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Ф

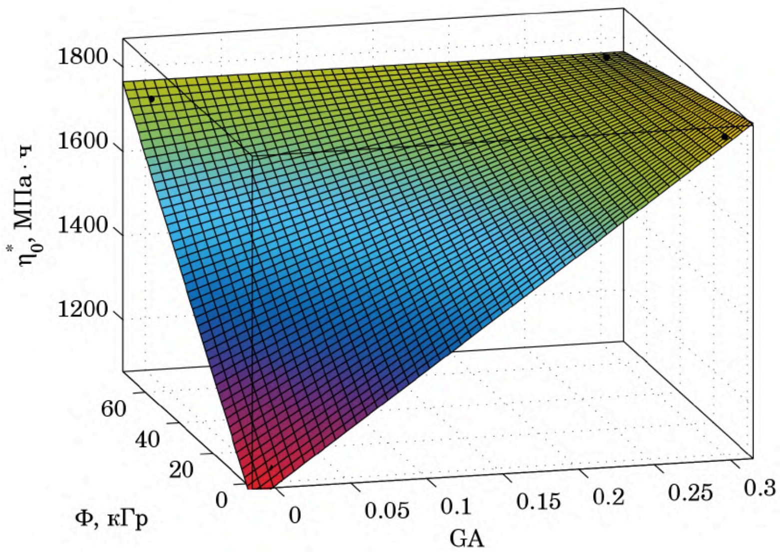


Рисунок 4.5 — Зависимость коэффициента начальной релаксационной вязкости $\eta_0^*(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Ф

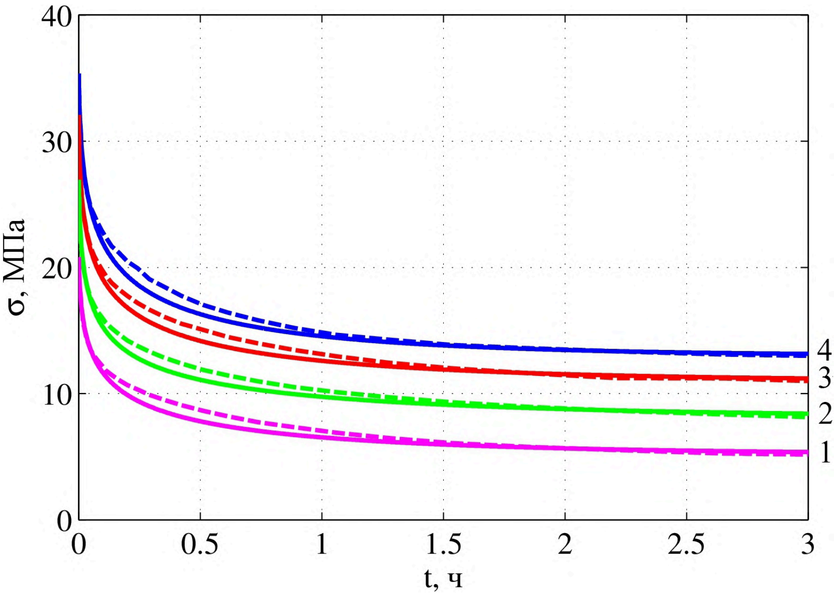


Рисунок 4.6 — Результаты сопоставления экспериментальных кривых (пунктирная линия) с теоретическими (сплошная линия, на основании определённых упругих и реологических параметров): 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

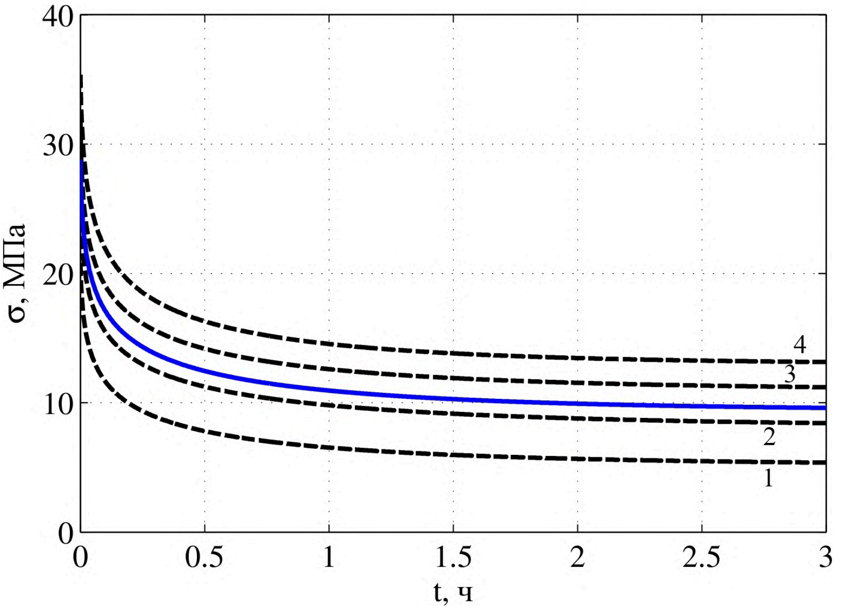


Рисунок 4.7 — Сплошная синяя линия — ГА = 15 %, Ф = 35 кГр; пунктирные линии: 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

4.2 Оптимизация толстостенных полимерных цилиндров путем искусственного создания неоднородности

4.2.1 Постановка задачи

Из решения задачи Ламе известно, что для однородного толстостенного цилиндра при действии только внутреннего давления максимальные окружные напряжения возникают у внутренней поверхности. Таким образом, в данном случае прочностной ресурс материала используется не полностью.

Для максимального использования прочностного ресурса материала необходимо, чтобы предельное состояние наступало одновременно во всех точках. Такие конструкции называются *равнопрочными*. Если в точках с большими напряжениями снизить модуль упругости, то напряжения в них снизятся, и наоборот. Таким образом, при изменении модуля упругости материала в толще конструкции по определенному закону, можно добиться, чтобы эквивалентное напряжение по какой-либо теории прочности было постоянно. В этом случае конструкция будет *равнонапряжённой*. Равнонапряжённая конструкция может быть равнопрочной, если при изменении модуля упругости материала его прочность не меняется.

На описанной идее основан разработанный профессором В. И. Андреевым обратный метод оптимизации конструкций, сущность которого состоит в отыскании таких законов изменения характеристик материалов, при которых напряжённо-деформированное состоянии конструкции будет заданным.

В работах профессора В. И. Андреева и его учеников [128, 159, 165] приводится решение задачи нахождения закона изменения модуля упругости материала, при котором толстостенный цилиндр, подверженный действию внутреннего давления, будет равнонапряжённым по второй или четвертой теории прочности. Аналогичная задача на основе первой и третьей теории прочности решена в кандидатской диссертации профессора Б. М. Языева [160]. В работе доцент А. С. Чепурненко [166] приводится решение указанной задачи на основе теории прочности Мора и показывается, что данное решение включает в себя как частный случай первую, вторую и третью теории прочности.

Все перечисленные выше решения выполнены аналитически, что накладывает ограничение на используемую теорию. Нами предлагается численный алгоритм оптимизации конструкций, основанный на последовательном решении прямых задач для неоднородного тела.

Суть предлагаемого алгоритма состоит в следующем:

1. На первом этапе численно, методом конечных разностей или методом конечных элементов, рассчитывается однородная конструкция при $E = \text{const}$, определяются эквивалентные напряжения по заданной теории прочности.

2. В каждой точке модуль упругости корректируется по формуле:

$$E_i = E_i \frac{1 + \sigma_{\text{экв,i}}/\sigma_0}{2}, \tag{4.9}$$

где $\sigma_{\text{экв,i}}$ — эквивалентное напряжение в i-й точке, σ_0 — эквивалентное напряжение на внутренней поверхности при $r = a$.

Модуль упругости у внутренней поверхности при этом будет оставаться постоянным.

Выполняется расчет с откорректированными значениями модуля упругости, и так же определяются эквивалентные напряжения.

3. Пункты 2–3 повторяются до тех пор, пока разница между значениями модуля упругости у внешней поверхности на предыдущем и последующем шаге не станет меньше заранее заданной погрешности.

В случае использования МКР для определения напряженно-деформированного состояния неоднородного цилиндра можно пользоваться уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma_r}{\mathrm{d}r^2} + \varphi(r)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} + \psi(r)\sigma_r = 0, \tag{4.10}$$

где

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}; \qquad \psi(r) = -\frac{1}{r}\left[\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right].$$

4.2.2 Решение модельных задач

Как было показано ранее, при введении в полиэтилен высокой плотности 30 % гидроксиапатита модуль упругости может повышаться до 1.5 раз. Рассмотрим цилиндр из ПЭВП и найдём, каким должно быть распределение модуля упругости в толще, чтобы он был равнонапряжённым по 4 классическим теориям прочности. Расчет будем выполнять при следующих исходных данных: $a = 15$ см, $b = 22$ см, $\nu = 0.3$, $p = 1$ МПа. Начальное значение модуля упругости ПЭВП без добавок $E_0 = 694$ МПа.

На рисунке 4.8 (стр. 119) представлены графики изменения модуля упругости по радиусу для равнонапряжённого цилиндра в случае использования с первой по четвертую теорию прочности.

Для всех полученных кривых выполнялось сравнение с аналитическими решениями профессора В. И. Андреева и профессора Б. М. Языева [161, 167]. Расхождение результатов незначительное. Из представленных графиков видно, что наибольшая разница между модулями упругости на внутренней и внешней поверхности требуется по третьей теории прочности, а наименьшая — по первой. Третья и четвертая теория дают достаточно близкие результаты.

Зная, как меняется модуль упругости в зависимости от содержания гидроксиапатита (4.4), можно найти содержание гидроксиапатита по формуле:

$$\text{ГА}, \% = \frac{E - 694\,\text{МПа}}{1251\,\text{МПа}} \cdot 100\,\%.$$

На рисунке 4.9 (стр. 119) приведены графики изменения содержания гидроксиапатита, соответствующие четырем теориям прочности. Из представленных графиков видно, что за исключением первой теории прочности, в остальных случаях содержание гидроксиапатита выходит за пределы имеющихся у нас экспериментальных данных (превышает 30 % на внешней поверхности).

При меньшей толщине оболочки потребуется меньшая разница между модулем упругости на внутренней и внешней поверхности, но и эффект от создания искусственной неоднородности окажется меньше.

Практическая реализация равнонапряженного цилиндра может быть выполнена по методике, предложенной профессором Б. М. Языевым [161]. Полимерная масса смешивается с тонкодисперсным минеральным наполнителем. Далее композиционный материал помещается в цилиндрическую форму, которая вращается в процессе отверждения полимера. При этом твердая фаза смещается к периферии под действием сил инерции, неравномерно распределяясь по радиусу цилиндра, в результате чего происходит изменение модуля упругости. Изменяя тип наполнителя и его процентный состав, а также скорость вращения центрифуги, можно приблизить функцию изменения модуля упругости к необходимой.

В результате создания искусственной неоднородности происходит заметное снижение максимальных напряжений. На рисунке 4.10 (стр. 120) приведены графики распределения по радиусу напряжений σ_θ для однородного и равнонапряженного по 1-й теории прочности цилиндра. Максимальные напряжения снизились с 2.73 до 2.14 МПа, т. е. в 1.28 раза.

Ранее не исследовался вопрос, как будет вести себя равнонапряженный цилиндр в процессе ползучести.

В однородном цилиндре при действии только статической нагрузки в процессе ползучести напряжения σ_θ сначала релаксируют, а потом происходит возврат к упругому решению (рисунок 4.11, стр. 120). Этому есть следующее объяснение. В работе [151] показывается, что для получения решения в конце процесса ползучести при использовании одночленного варианта уравнения Максвелла-Гуревича достаточно заменить в упругом решении мгновенные постоянные E и ν на длительные $\tilde{E}$ и $\tilde{\nu}$, определяемые по формулам:

$$\tilde{E} = \frac{E \cdot E_\infty}{E + E_\infty}; \qquad \tilde{\nu} = \nu \frac{1 + \dfrac{E}{2\nu E_\infty}}{1 + \dfrac{E}{E_\infty}}. \tag{4.11}$$

Поскольку в решении Ламе распределение напряжений не зависит от упругих постоянных, то в конце процесса ползучести оно будет таким же, как и в начале.

В результате расчета цилиндра, содержание гидроксиапатита в котором меняется в соответствии с рисунком 4.11 (теория 1), нами было установлено, что равнонапряжённый в начальный момент времени цилиндр перестает быть равнонапряжённым в процессе ползучести. Графики распределения по радиусу напряжений σ_θ в начале и в конце процесса ползучести приведены на рисунке 4.12 (стр. 121). У внутренней поверхности с течением времени напряжения убывают, а у внешней возрастают, что показано на рисунке 4.13 (стр. 121). Объясняется это тем, что модуль упругости (4.4) и модуль высокоэластичности (4.5) неодинаково зависят от содержания гидроксиапатита.

Поставим задачу оптимизации следующим образом: требуется найти такое распределение содержания наполнителя в толще конструкции, чтобы она была равнонапряжённой в конце процесса ползучести. Алгоритм оптимизации похож на изложенный выше, но имеются отличия. Вместо величин E и ν следует оперировать длительными постоянными $\tilde{E}$ и $\tilde{\nu}$. На первом этапе так же рассчитывается однородная конструкция при $\tilde{E} = \text{const}$, $\tilde{\nu} = \text{const}$. Далее длительный модуль $\tilde{E}$ корректируется по формуле (4.9). По откорректированным значениям $\tilde{E}$ определяется требуемое содержание гидроксиапатита. На основе формул (4.4) и (4.5), а также (4.11):

$$\tilde{E} = \frac{E \cdot E_\infty}{E + E_\infty} = \frac{(694 + 1251 \cdot \text{ГА})(228.9 + 1093 \cdot \text{ГА})}{922.9 + 2344 \cdot \text{ГА}}.$$

При известном значении $\tilde{E}$ данное равенство представляет квадратное уравнение относительно величины ГА, из которого нетрудно найти содержание гидроксиапатита.

Далее корректируется модуль высокоэластичности и модуль упругости по формуле:

$$E = 694 + 1251 \cdot \text{ГА}\,[\text{МПа}];$$
$$E_\infty = 228.9 + 1093 \cdot \text{ГА}\,[\text{МПа}].$$

Затем по известным значениям E и E_∞ определяется длительный коэффициент Пуассона в каждой точке по второй формуле в (4.11).

Таким образом, на втором и последующих шагах оптимизации переменным по радиусу оказывается не только длительный модуль упругости, но и длительный коэффициент Пуассона. Для определения НДС можно так же использовать уравнение (4.10), но функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ следует вычислять по формулам:

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} - \frac{2\nu\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}}{1-\nu^2};$$
$$\psi(r) = -\frac{1}{r}\left[\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} + \frac{(1+4\nu)}{1-\nu^2}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}\right].$$

Также для расчета НДС неоднородного цилиндра можно воспользоваться МКЭ.

На рисунке 4.14 (стр. 122) представлен график изменения содержания гидроксиапатита по радиусу для равнонапряженного по 1-й теории прочности в конце процесса ползучести цилиндра. Из данного графика видно, что в отличие от рисунка 4.9, максимальное содержание наполнителя заметно меньше.

Распределение напряжений σ_θ по радиусу в начале и в конце процесса ползучести показано на рисунке 4.15 (стр. 122). Рисунок 4.16 (стр. 123) показывает графики изменения во времени окружных напряжений у внутренней и внешней поверхности. Из указанных графиков видно, что в начальный момент времени напряжения у внутренней поверхности выше, чем у внешней, а в процессе ползучести при $r = a$ напряжения убывают, при $r = b$ — возрастают, и наступает равнонапряжённое состояние.

Покажем также, как будут выглядеть графики изменения содержания гидроксиапатита для равнонапряжённых в конце процесса ползучести цилиндров при использовании второй, третьей и четвертой теории прочности (рисунок 4.17, стр. 123).

Из данного графика видно, что равнонапряжённые в конце процесса ползучести цилиндры по всем теориям прочности можно создать, практически не превышая 30 % содержание гидроксиапатита. По 3-й и 4-й теории результаты отличаются незначительно, это можно объяснить тем, что длительный коэффициент Пуассона близок к 0.5, а при $\nu = 0.5$ указанные теории в случае ПДС дают одинаковый результат.

Отметим, что предложенные модели равнонапряжённых конструкций вообще говоря не являются равнопрочными, поскольку при введении добавок прочность получаемого композита меняется. Однако, разработанный нами алгоритм после небольшой доработки позволяет моделировать и равнопрочные конструкции, но для этого необходимо знать, как зависит прочность от содержания наполнителя; подобная задача в рамках настоящей работы не ставилась.

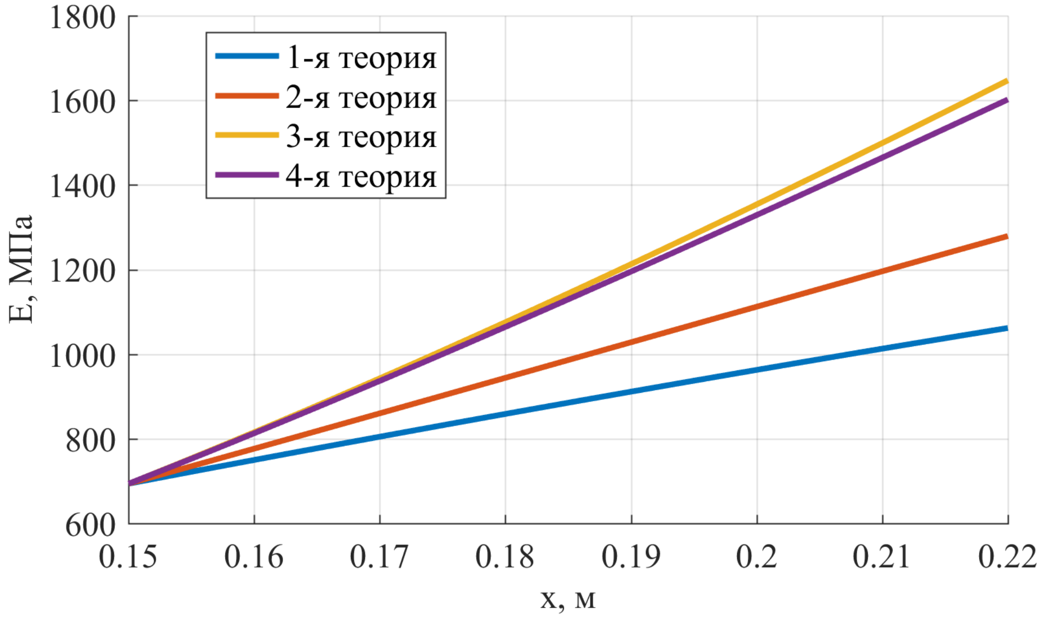


Рисунок 4.8 — Изменение модуля упругости по радиусу для равнонапряжённого цилиндра при использовании различных теорий прочности

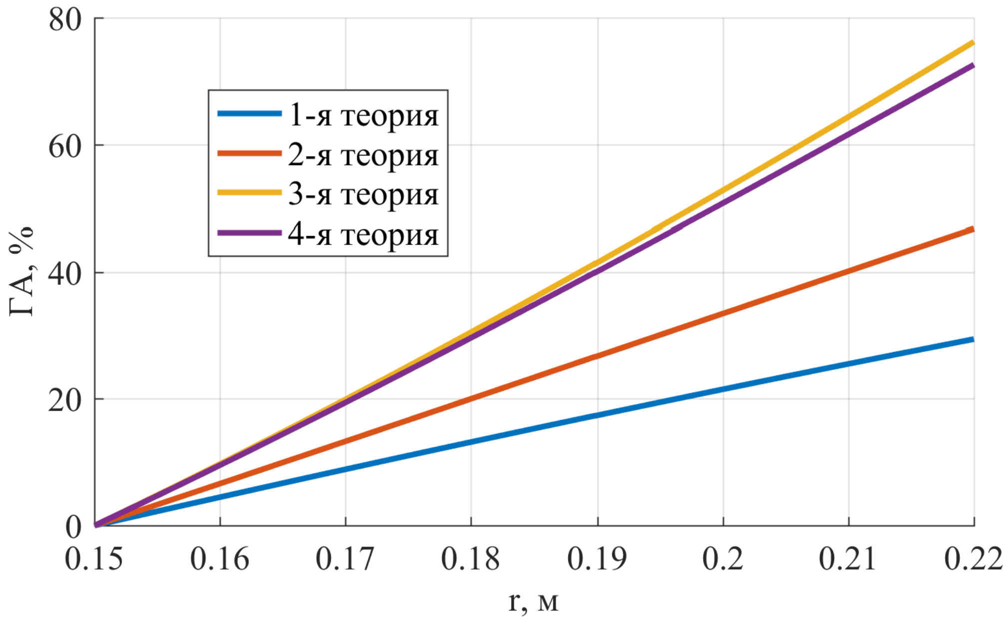


Рисунок 4.9 — Содержание гидроксиапатита в зависимости от радиуса для равнонапряжённых по различным теориям прочности цилиндров

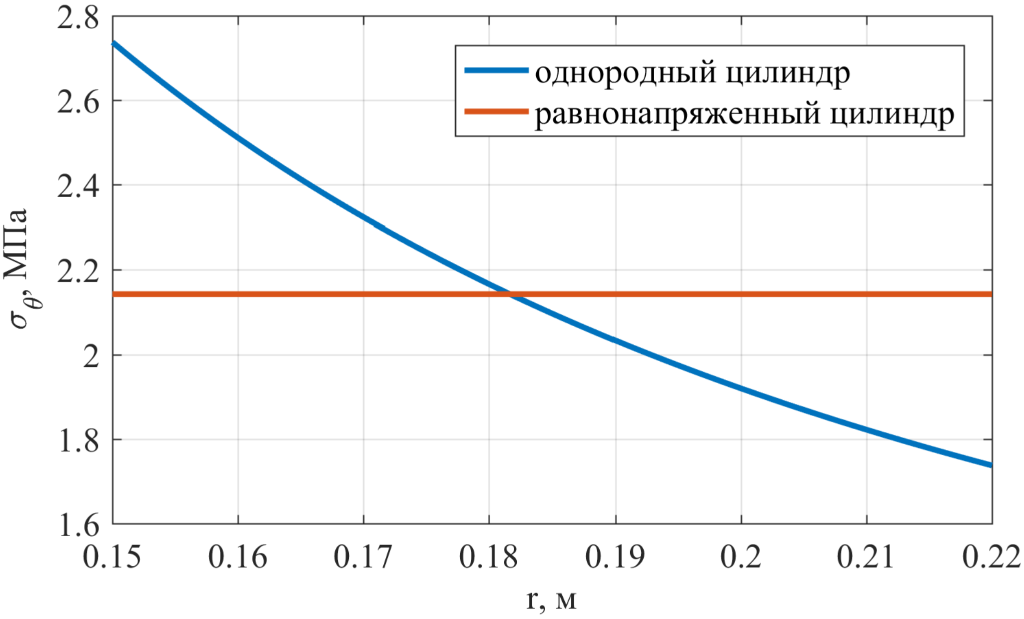


Рисунок 4.10 — Распределение напряжений σ_θ по радиусу для однородного и равнонапряжённого цилиндра

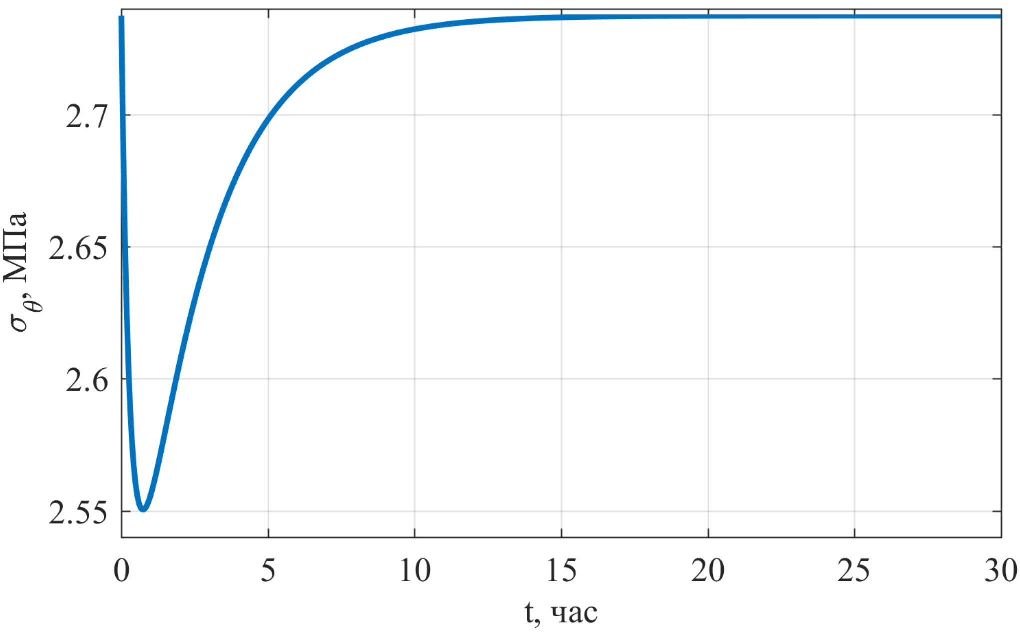


Рисунок 4.11 — Изменение во времени напряжений σ_θ у внутренней поверхности однородного цилиндра

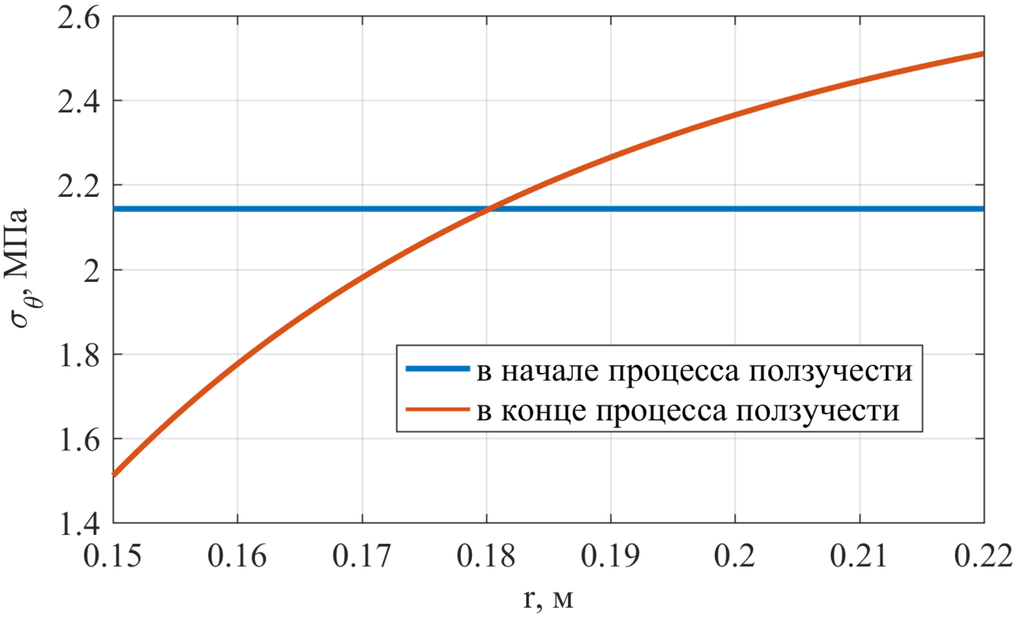


Рисунок 4.12 — Изменение напряжений σ_θ по радиусу в начале и в конце процесса ползучести для равнонапряжённого в начальный момент времени цилиндра

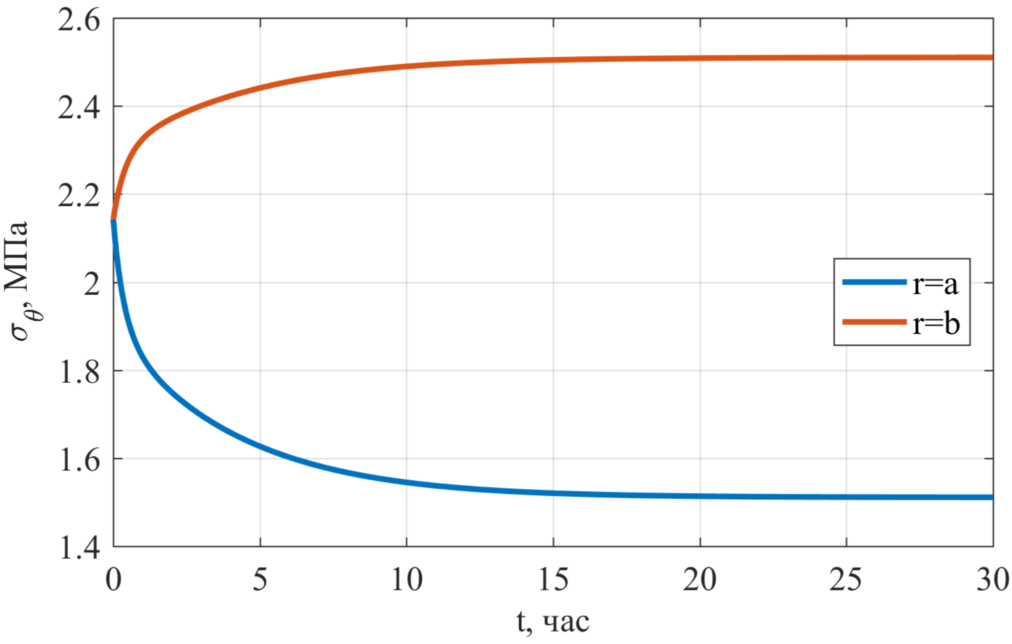


Рисунок 4.13 — Изменение во времени напряжений σ_θ у внутренней и внешней поверхности равнонапряжённого в начальный момент времени цилиндра

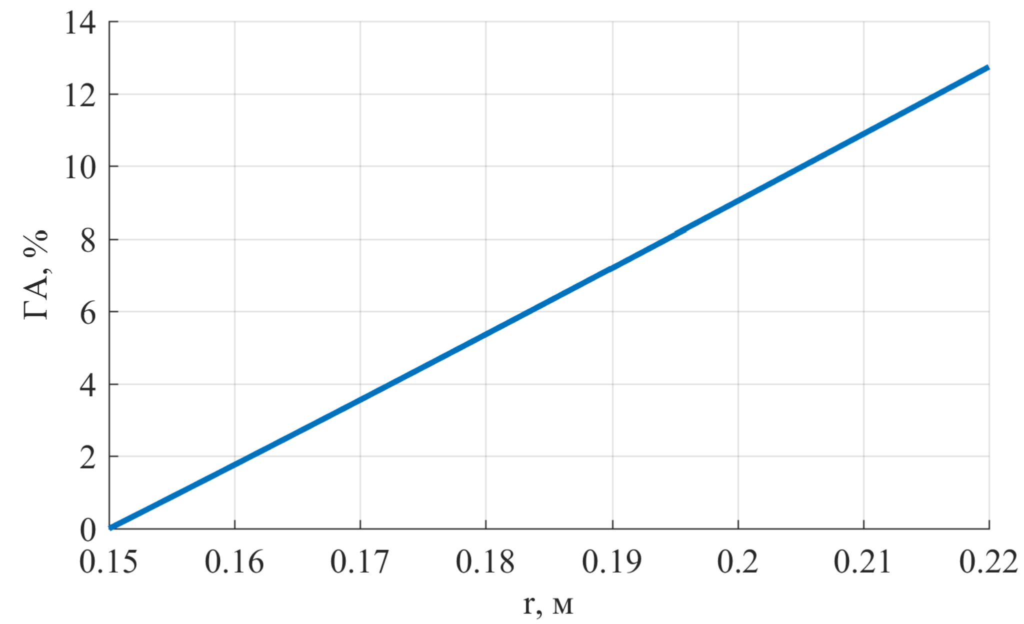


Рисунок 4.14 — Изменение содержания гидроксиапатита по радиусу для равнонапряжённого в конце процесса ползучести по первой теории цилиндра

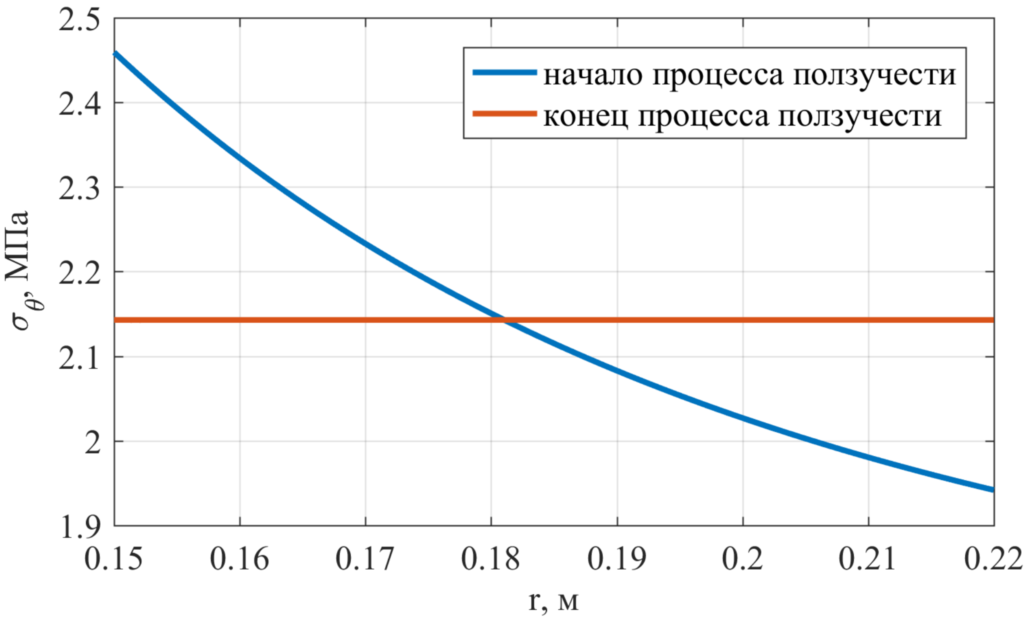


Рисунок 4.15 — Распределение напряжений σ_θ по радиусу для равнонапряжённого в конце процесса ползучести по первой теории цилиндра

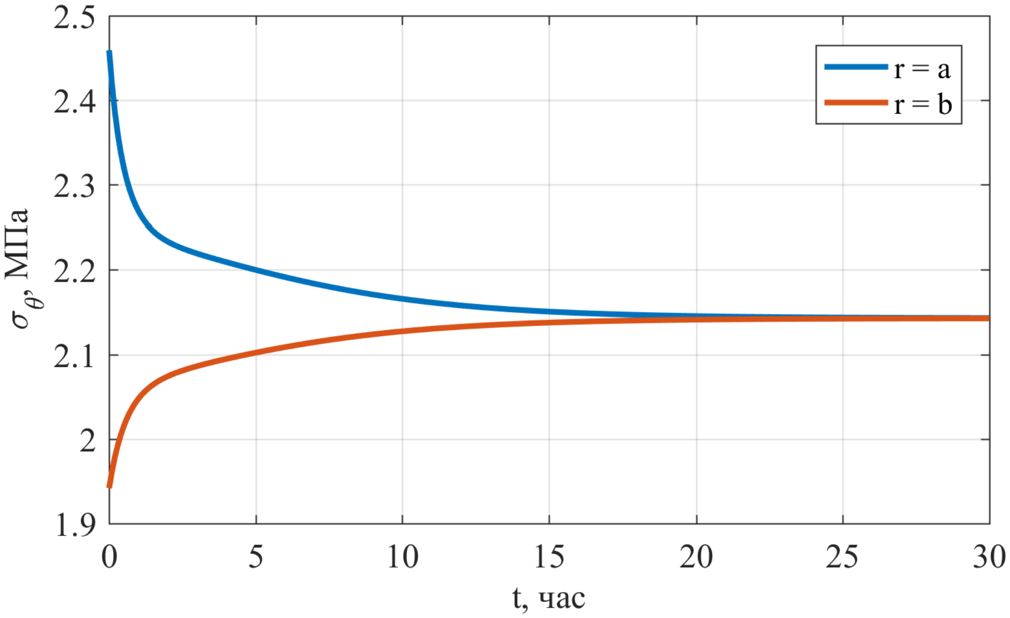


Рисунок 4.16 — Изменение во времени напряжений σ_θ для равнонапряженного в конце процесса ползучести по первой теории цилиндра

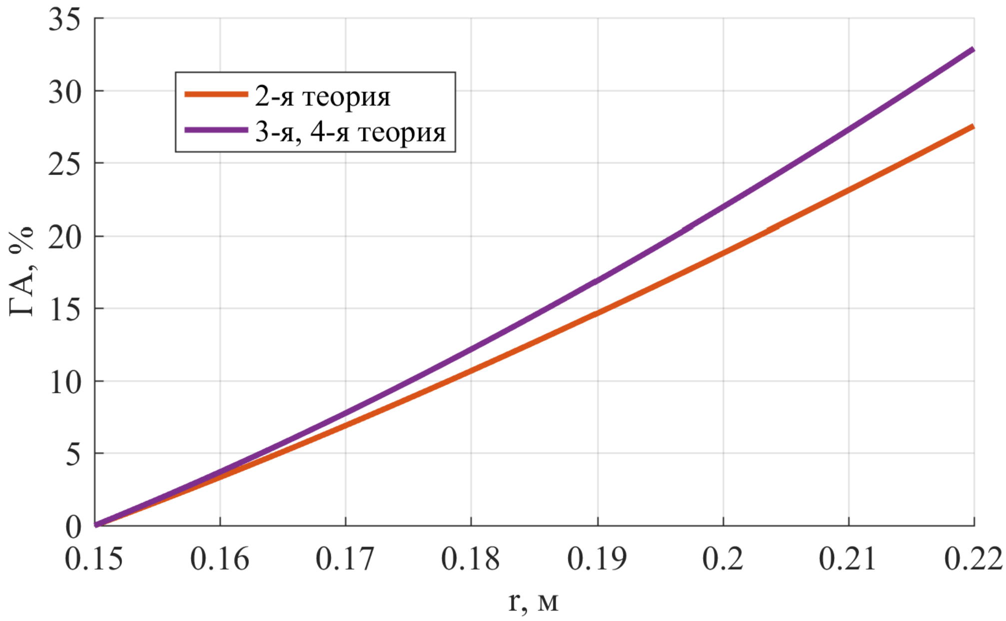


Рисунок 4.17 — Содержание гидроксиапатита в зависимости от радиуса для равнонапряжённых в конце процесса ползучести по различным теориям прочности цилиндров

4.3 Практический расчёт определения напряжённо–деформированного состояния изделия с учётом ионизирующего излучения и добавок

Для оценки влияния на напряжённо-деформированное состояние полимерного тела различных сочетаний добавок и ионизирующего излучения, рассматриваем задачу расчёта цилиндрического тела, претерпевающего сжатие (постановка задачи и расчётная схема приводятся на рисунке 4.18).

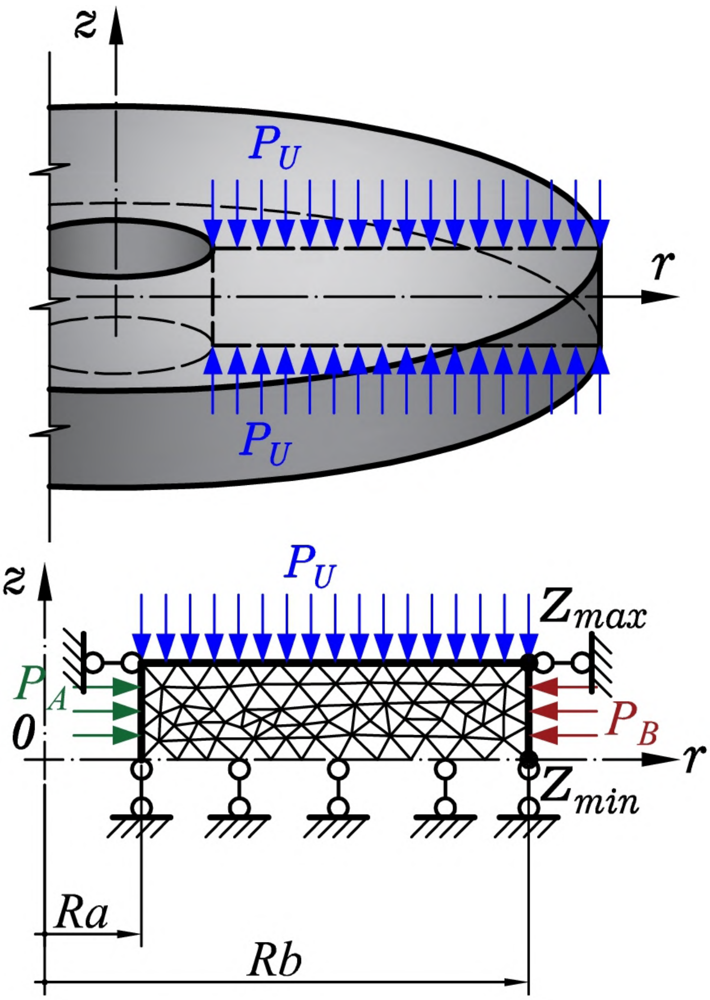


Рисунок 4.18 — Цилиндрическое сжимаемое тело конечной длины: постановка задачи и расчётная схема

Высота тела $h = 1\,\text{см} = 0.010\,\text{м}$. Вследствие того, что тело симметрично относительно горизонтальной оси, достаточно рассмотреть только его половину, в результате чего исходные данные принимают следующий вид: давление на внутренней грани цилиндра $P_A = 0\,\text{МПа}$; давление на внешней грани цилиндра $P_B = 0\,\text{МПа}$; давление на верхнем торце цилиндра $P_U = -10\,\text{МПа}$ (минус — сжатие); внутренний радиус $R_a = 0.010\,\text{м}$; внешний радиус $R_b = 0.050\,\text{м}$; координата нижней точки $Z_{min} = 0\,\text{м}$; координата верхней точки $Z_{max} = \dfrac{h}{2} = 0.005\,\text{м}$; число интервалов разбиения по времени $qnIntT = 20\,\text{шт}$; предел времени, до которого происходит расчёт $limTime = 10$ ч. Результаты расчёта задачи представлены на рисунках 4.19–4.26 (стр. 126–133).

На рисунках 4.19–4.24 на первом графике показано решение задачи в самом начале, когда отсутствуют упругие деформации и задача сводится к упругому решению. При решение показано при $GA = 0$, $\phi = 0\,kGr$ — при иных процентах введения GA и наличии ионизирующего излучения решение в начальный момент времени зрительно не отличается, поэтому иные варианты не приводятся.

Если же проводить анализ изменения напряжений σ_r, σ_θ, σ_z и τ_{rz} в конце расчётного периода с начальным, то их максимальный и минимальный уровни увеличиваются в 2–2.5 раз. Однако в любом теле можно выделить элементарный объём таким образом, когда на гранях этого объёма нормальные напряжения будут достигать своих максимальных значений, а касательные — равны нулю (рисунок 4.27). Было принято решение провести дополнительно анализ изменения главных напряжений максимального σ_1 и минимального σ_3.

Из рисунков 4.19–4.24 выделены максимальные и минимальные значения напряжений, затем построены графики изменения этих параметров во времени (рисунки 4.25 и 4.26. Здесь отчётливо видно изменение уровня напряжений с течением времени в 2–2.5 раз. Исключение составляют главные напряжения, которые имеют значительные величины в начальный момент времени и повышаются не более, чем в 1.5 раза к концу расчётного периода.

Отличие между базовыми напряжениями (радиальным, окружным, осевым и касательным) от главных заключается и в разнице проявления реологических процессов. Так, при отсутствии добавок и наличии ионизирующего излучения, базовые напряжения стабилизировались через 7 часов с момента приложения нагрузки, а если проводить анализ изменения главных напряжений, они не стабилизировались и к 10 часам, т. е. к концу расчётного периода. В случае наличия максимальных добавок GA в полимере и облучением его ионизирующим излучением, уровень и базовых, и главных напряжений уменьшается на $\approx 10\,\%$ по сравнению с чистым образцом полимера. Кроме того, стабилизация базовых напряжений наблюдается примерно через 4 часа от начала расчёта, главных — через 6. Образец, в который был добавлен GA и облучённый в половинной дозе, показывал примерно средние свойства между «чистым» и образцом, с полным добавлением GA и полным уровнем ионизирующего излучения.

Результаты приведенного в данной главе исследования опубликованы в работах [18, 45].

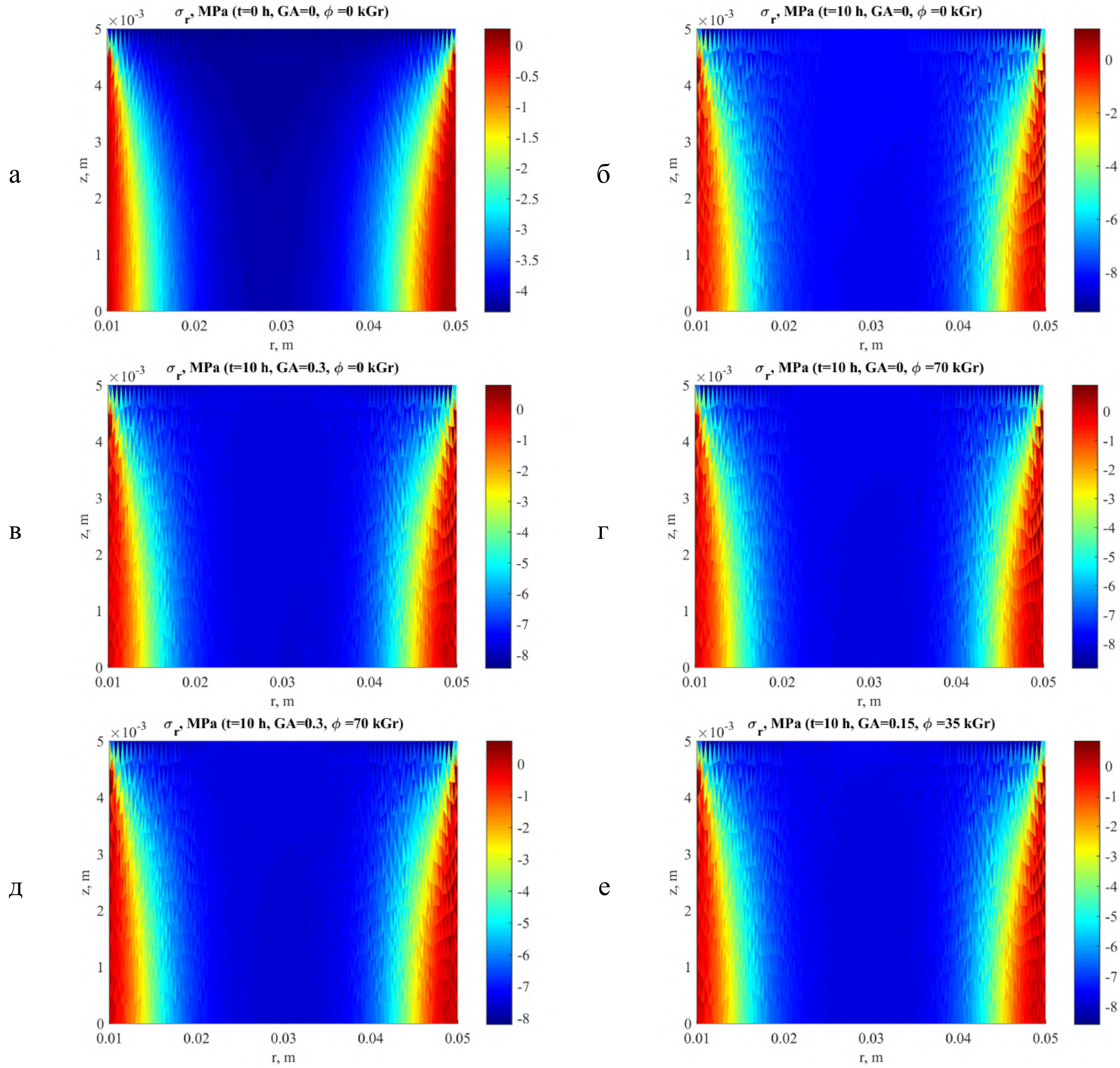


Рисунок 4.19 — Распределение радиальных напряжений σ_r в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр

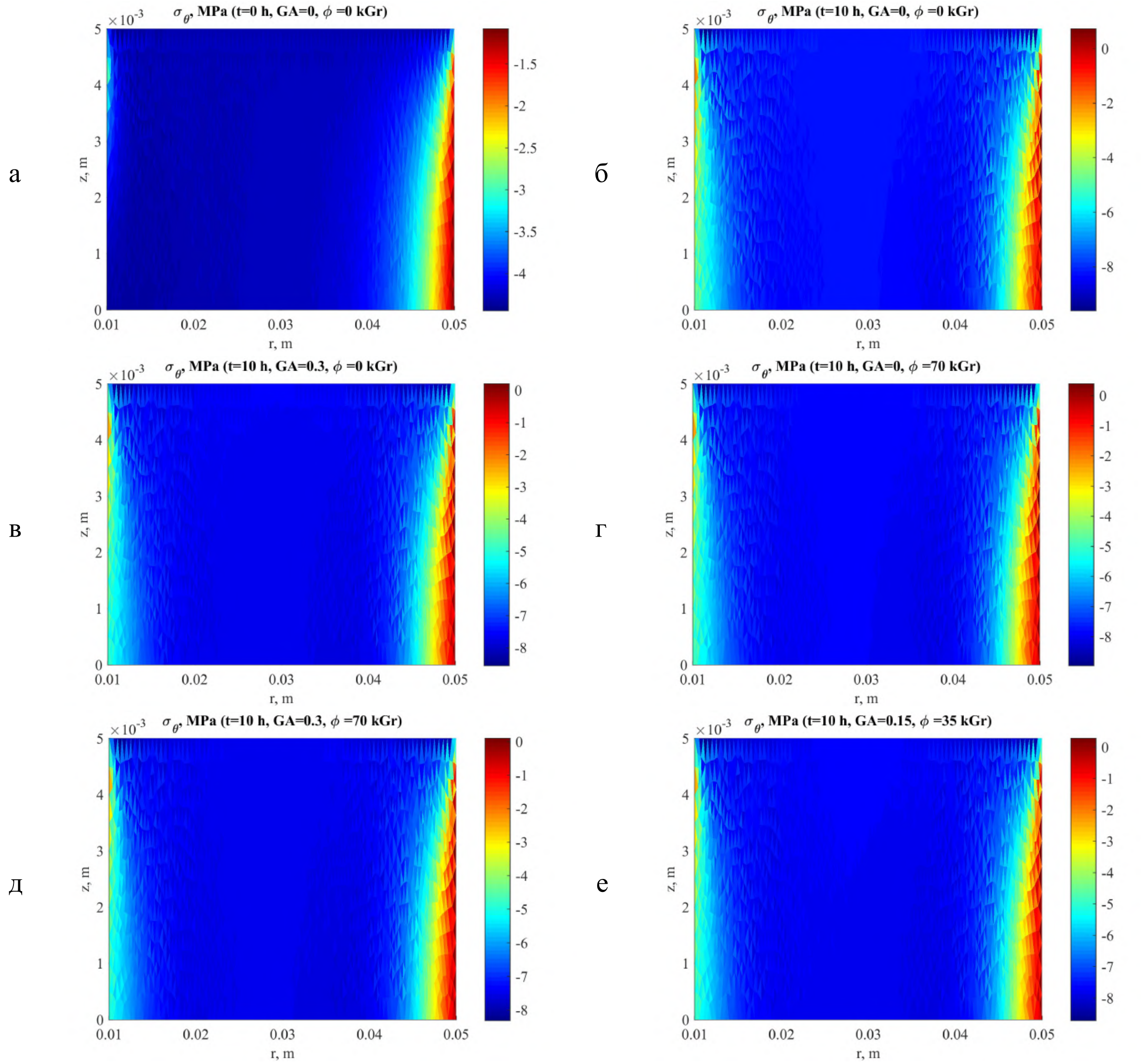


Рисунок 4.20 — Распределение окружных напряжений σ_θ в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0$ %, Ф $= 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, Ф $= 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, Ф $= 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, Ф $= 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, Ф $= 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15$ %, Ф $= 35$ кГр

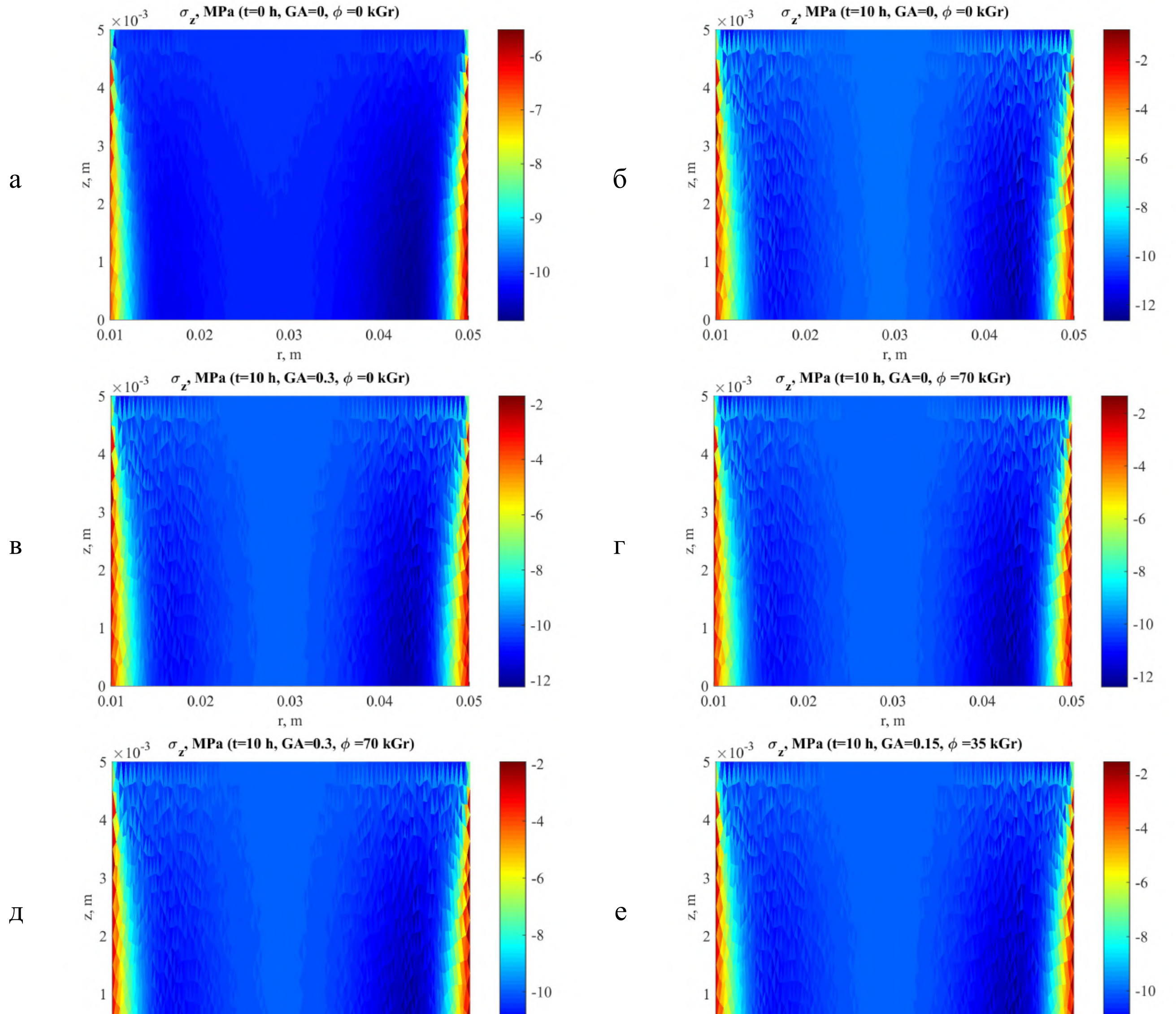


Рисунок 4.21 — Распределение осевых напряжений σ_z в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15$ %, $\Phi = 35$ кГр

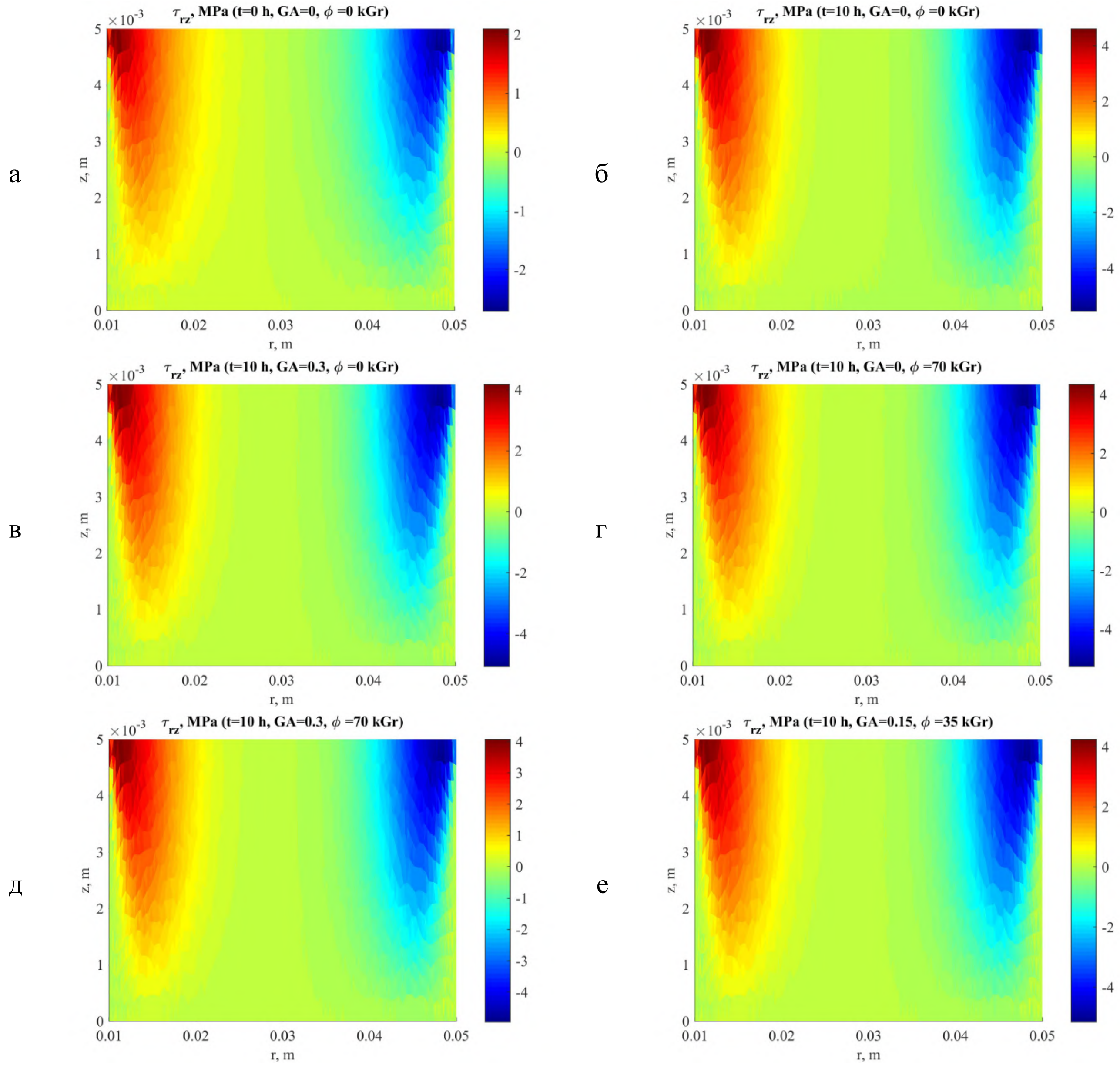


Рисунок 4.22 — Распределение касательных напряжений τ_{rz} в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр

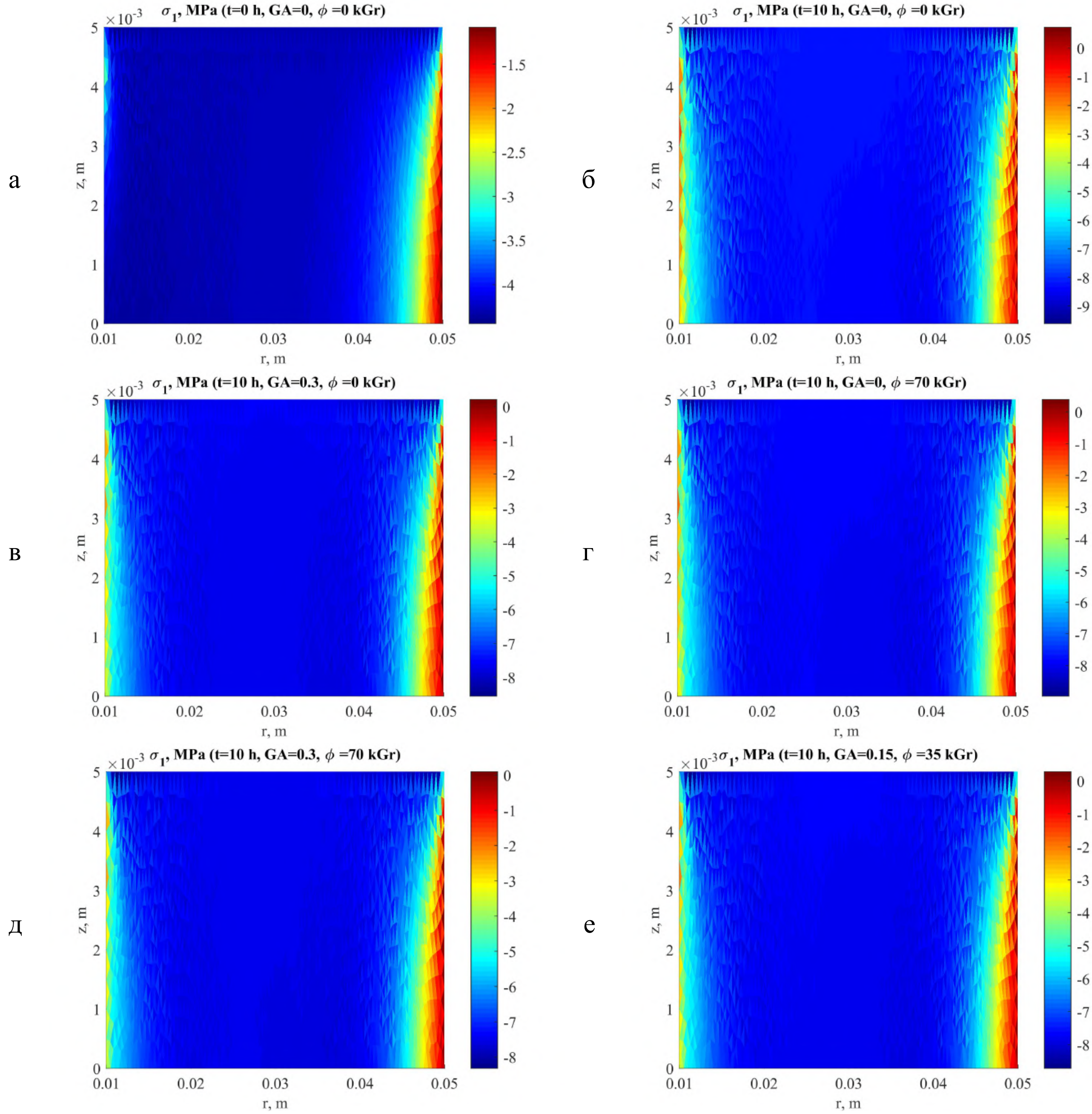


Рисунок 4.23 — Распределение главных наибольших по значению напряжений σ_1 в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр

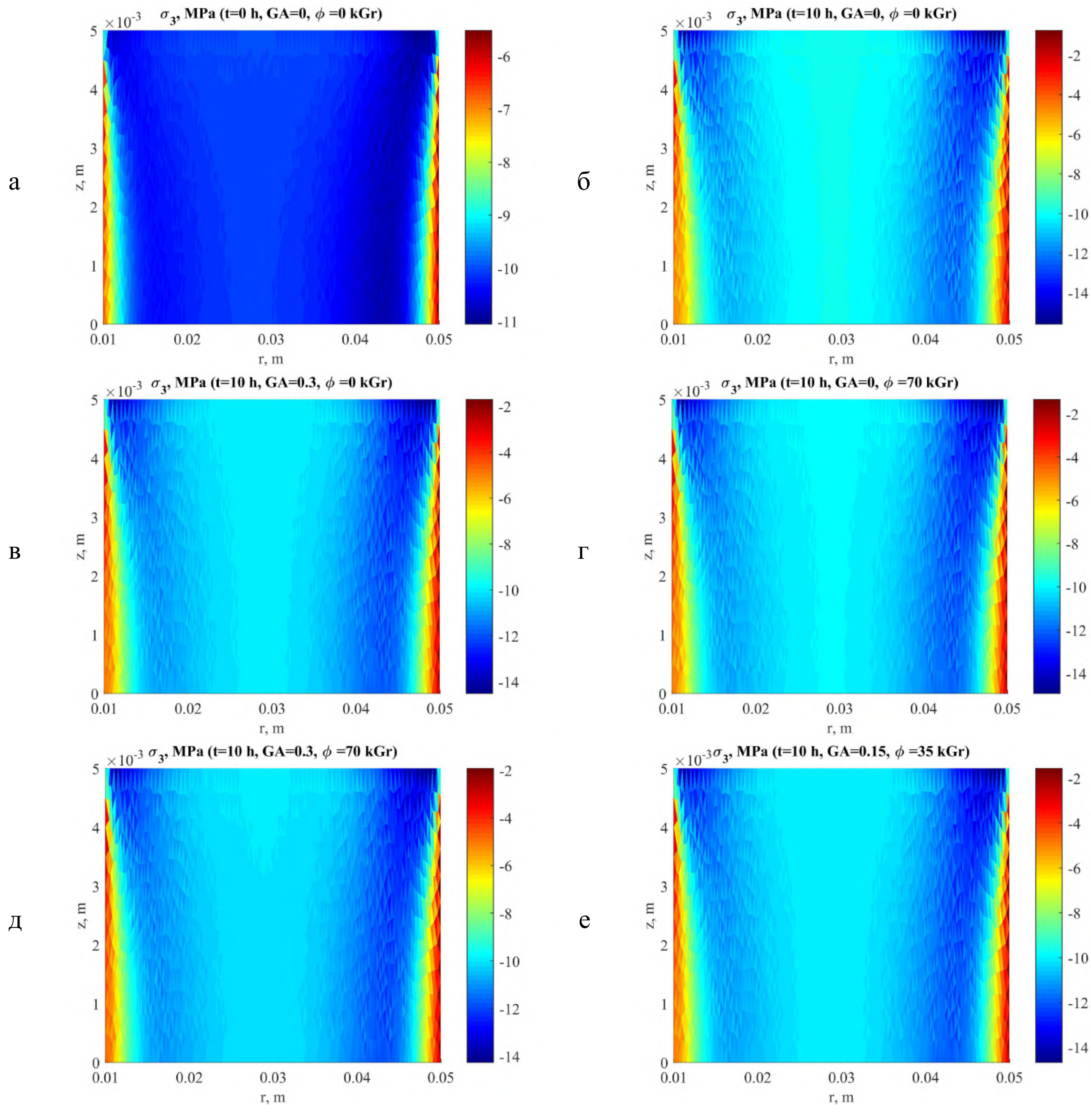


Рисунок 4.24 — Распределение наименьших по значению главных напряжений σ_3 в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА = 0 %, Ф = 0 кГр; б — $t = 10$ ч, ГА = 0 %, Ф = 0 кГр; в — $t = 10$ ч, ГА = 30 %, Ф = 0 кГр; г — $t = 10$ ч, ГА = 0 %, Ф = 70 кГр; д — $t = 10$ ч, ГА = 30 %, Ф = 70 кГр; е — $t = 10$ ч, ГА = 15 %, Ф = 35 кГр

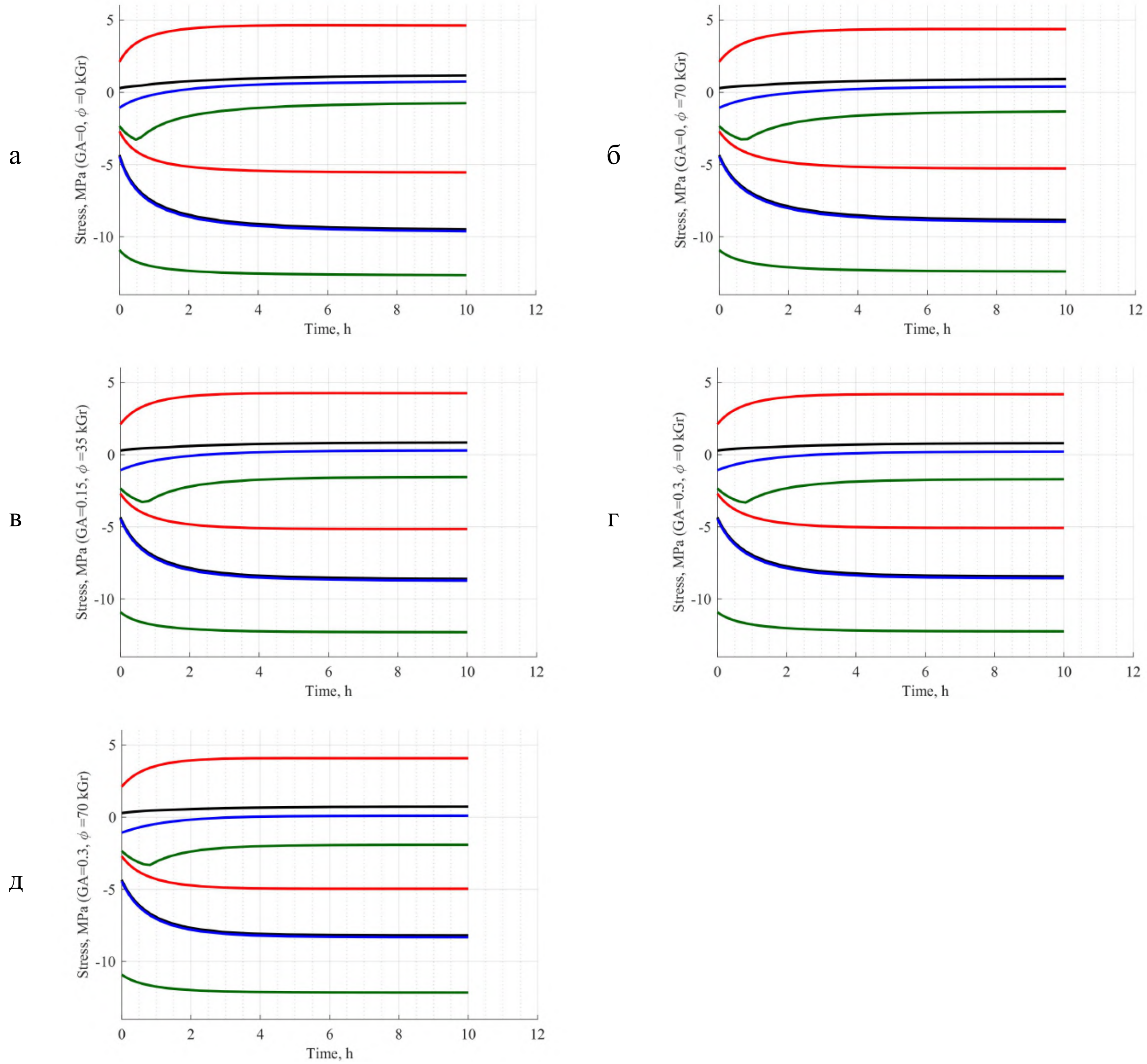


Рисунок 4.25 — Распределение максимальных и минимальных значений радиальных, окружных, осевых и касательных напряжений во времени: а — ГА = 0 %, Ф = 0 кГр; б — ГА = 0 %, Ф = 70 кГр; в — ГА = 15 %, Ф = 35 кГр; г — ГА = 30 %, Ф = 0 кГр; д — ГА = 30 %, Ф = 70 кГр; чёрная линия — σ_r; синяя — σ_θ; зелёная — σ_z; красная — τ_{rz}

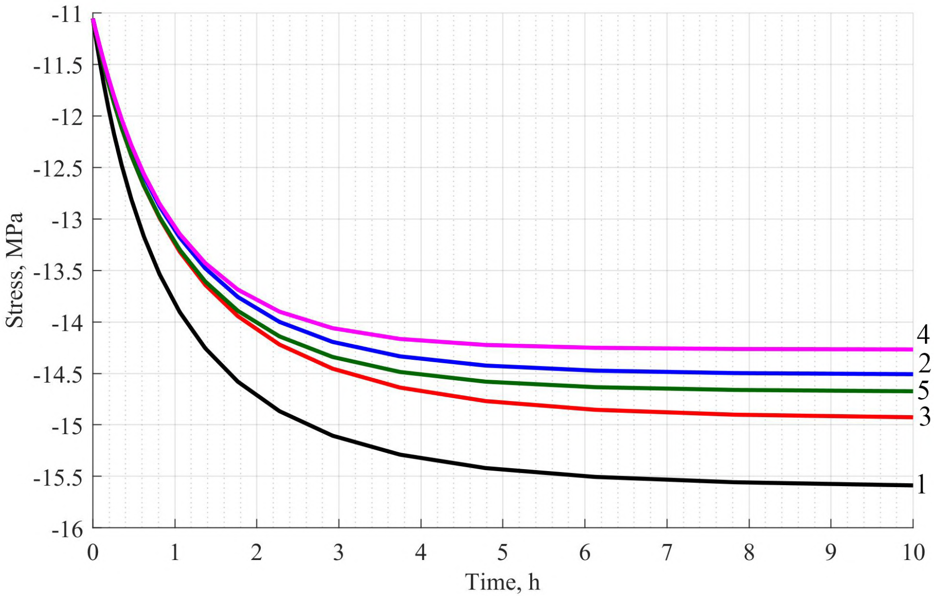


Рисунок 4.26 — Изменение во времени наименьших главных (сжимающих) напряжений σ_3 в теле с течением времени: 1 — ГА = 0 %, Ф = 0 кГр; 2 — ГА = 30 %, Ф = 0 кГр; 3 — ГА = 0 %, Ф = 70 кГр; 4 — ГА = 30 %, Ф = 70 кГр; 5 — ГА = 15 %, Ф = 35 кГр

а

б

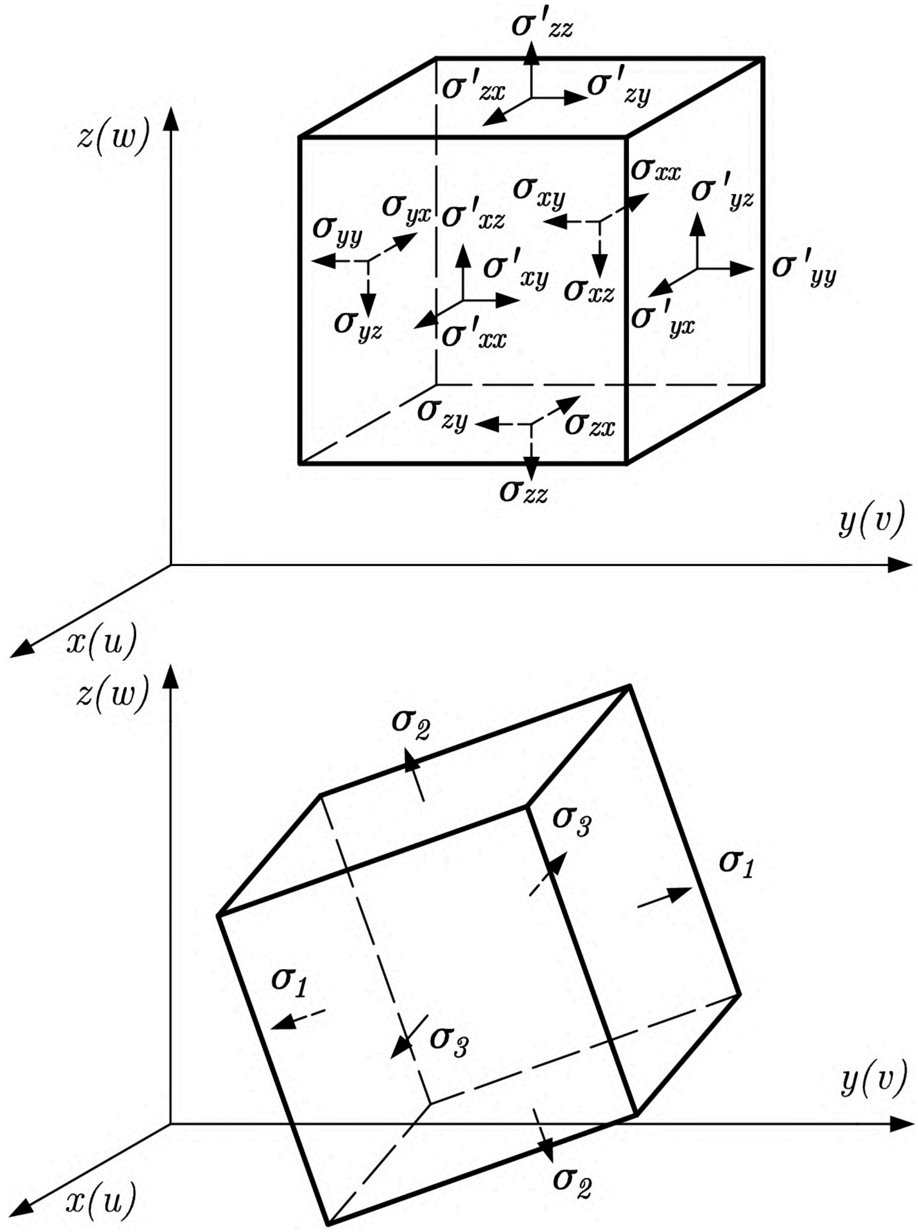


Рисунок 4.27 — Демонстрация напряженного состояния на элементарном кубике (а) и положение главных площадок с главными напряжениями (б)

4.4 Построение модели равнопрочного толстостенного полимерного цилиндра при силовых и температурных воздействиях

Толстостенные цилиндры в настоящее время находят очень широкое применение в конструкциях радиационных и тепловых экранов ядерных реакторов, биологических защит и т. д. В случае если конструкция выполнена из однородного материала, распределение напряжений в ней, как правило, носит неравномерный характер. Исчерпание несущей способности возможно лишь в какой–то точке или в небольшой области. Таким образом, материал в однородных конструкциях часто используется нерационально.

Одним из способов увеличения несущей способности является создание искусственной неоднородности. Идея этого метода принадлежит профессору В. И. Андрееву [128, 168, 169, 170]. Суть её заключается в том, что если в какой–то области уменьшить модуль упругости, то и напряжения в данной области снизятся. Таким образом, можно добиться, чтобы расчетное напряжение по заданной теории прочности во всех точках конструкции было одинаково. Но для многих материалов, в том числе бетонов и полимербетонов, с изменением модуля упругости меняется и прочность, т. е. $R = f(E)$. Таким образом, равнонапряженная конструкция не будет равнопрочной.

Некоторые задачи оптимизации толстостенных цилиндров и сфер приводятся в работах [128, 166, 169, 170, 171, 172, 173]. Методика создания равнонапряженного цилиндра, испытывающего температурные и силовые воздействия, изложена в работе [169]. В настоящей работе впервые приводится задача построения равнопрочного цилиндра с учетом неравномерного распределения температуры в толще. Решение задачи выполняется численно.

Рассматривается толстостенный цилиндр, нагруженный внешним давлением p_b и внутренним давлением p_a (рисунок 4.28). Температурное поле считаем стационарным. Температура на внутренней поверхности — T_a, на внешней — $T_b = 0\,^\circ$C.

Распределение температуры при таких граничных условиях определяется выражением [128]:

$$T = T_a \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}. \tag{4.12}$$

Цилиндр находится в условиях плоской осесимметричной задачи теории упругости. Будем считать, что длина цилиндра достаточно большая, и имеет место плоское деформированное состояние (ПДС). При этом основное разрешающее уравнение для неоднородного цилиндра в напряжениях примет вид [128]:

$$\sigma_r'' + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E}\right) \cdot \sigma_r' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{E'}{rE}\sigma_r = -\frac{E\alpha_T T'}{r(1-\nu)}. \tag{4.13}$$

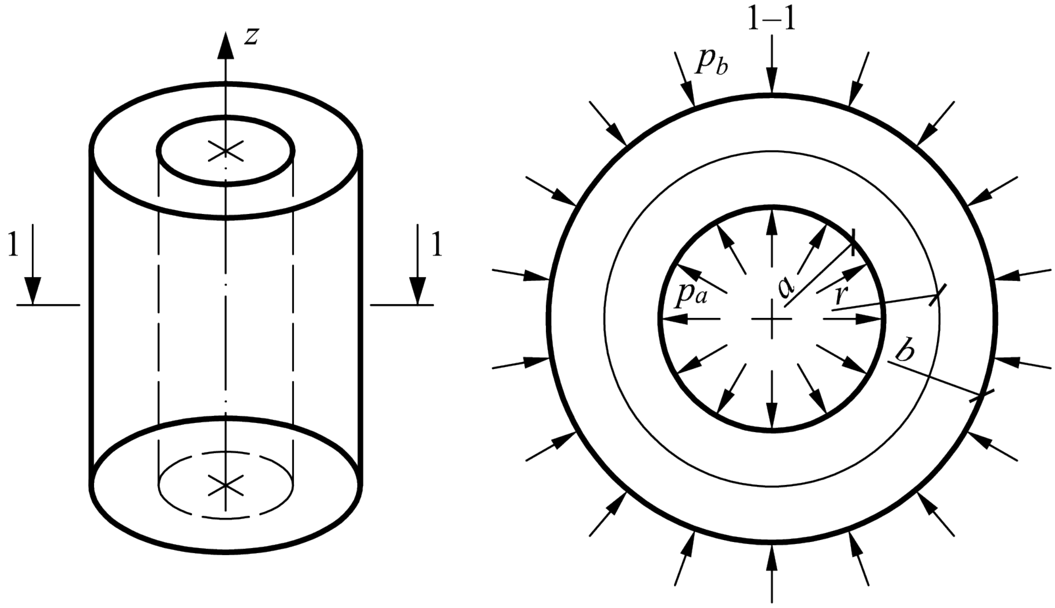


Рисунок 4.28 — Расчетная схема цилиндра

Штрихом в уравнении (4.13) обозначена производная по r. Граничные условия для уравнения (4.13) записываются в виде:

$$\sigma_r(a) = -p_a; \qquad \sigma_r(b) = -p_b. \tag{4.14}$$

Уравнение (4.13) удобно решать методом конечных разностей.

Изложим основы алгоритма оптимизации толстостенных конструкций:

1. Решение выполняется методом последовательных приближений. В первом приближении определяем напряжения для однородной конструкции ($E = \text{const}$).

2. Во втором приближении корректируем модуль упругости в каждой точке по формуле:

$$E^*(r) = E(r) \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{расч}}(r)} \cdot \frac{R(r)}{R_0},$$

где R_0 и σ_0 — соответственно расчетное сопротивление материала и эквивалентное напряжение при $r = a$, $R(r)$ и $\sigma_{\text{расч}}(r)$ — расчетное сопротивление и эквивалентное напряжение в заданной точке. Рассчитывается неоднородная конструкция с учетом откорректированных значенийE. Далее пункт 2 повторяется.

3. Итерационный процесс завершается, когда модуль упругости на внешней поверхности $E(b)$ в предыдущем и последующем приближении отличается не более чем на 1 %.

Задача оптимизации была решена при следующих исходных данных: $p_a = 0$; $p_b = 100$ МПа; $a = 2$ м; $b = 2.5$ м; $\alpha_T = 10^{-5}$ 1/°C; $\nu = 0.2$; $T_a = 100$ °C. В качестве материала был взят полимербетон на основе фурфуролацетоновой смолы (ФАМ), для которого справедлива следующая зависимость $R(E)$ [168]:

$$R = \rho + \omega E, \tag{4.15}$$

где $\rho = 126.736$ МПа и $\omega = 4.612 \cdot 10^{-4}$.

Для полимербетона хорошо согласуется с экспериментальными данными критерий П. П. Баландина, который в случае трехосного напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = R_b R_{bt}, \tag{4.16}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения; R_b и R_{bt} — соответственно расчетные сопротивления бетона на сжатие и растяжение.

В случае действия на цилиндр внешнего давления при ПДС главные напряжения определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \sigma_1 = \sigma_r; \qquad \sigma_2 = \sigma_z; \qquad \sigma_3 = \sigma_\theta; \\ \sigma_\theta = r\sigma_r' + \sigma_r; \qquad \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E(r)\alpha_T \Delta T. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Считая, что прочность бетона на растяжение невелика ($R_{bt} \approx 0$), выражение (4.16) можно переписать в виде:

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} = R_b. \tag{4.18}$$

Левая часть равенства (4.18) представляет собой эквивалентное напряжение по теории П. П. Баландина.

На рисунках 4.29 и 4.30 показаны соответственно графики изменения модуля упругости и эквивалентных напряжений для однородного (штриховая линия), равнопрочного (синяя линия) и равнонапряженного (красная линия) цилиндра.

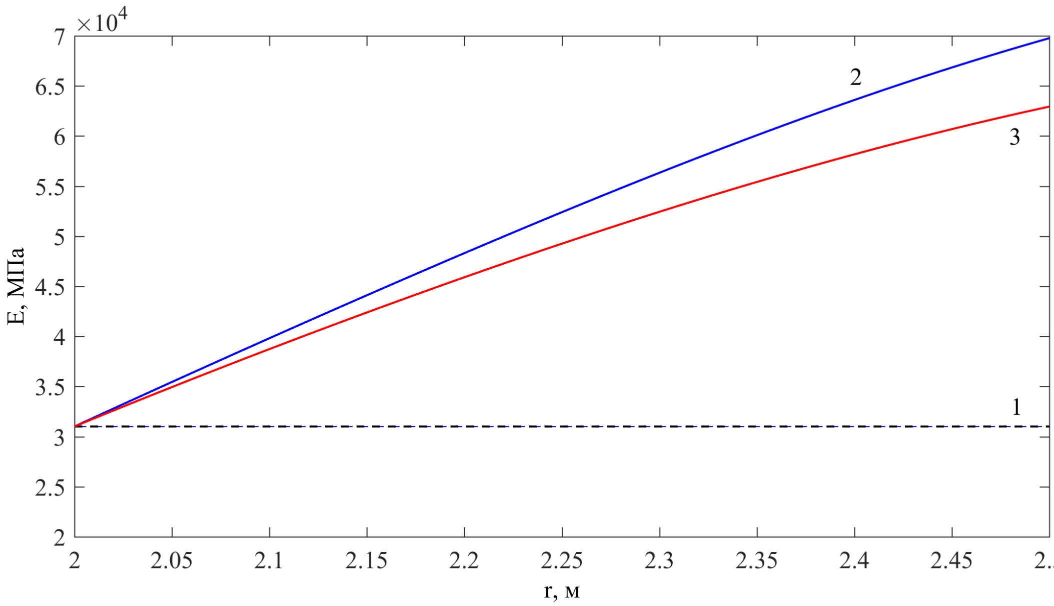


Рисунок 4.29 — Изменение модуля упругости

На рисунке 4.31 представлено изменение относительных напряжений $\sigma_{экв}/R$ для однородного (штриховая линия) и равнопрочного (сплошная линия) цилиндра.

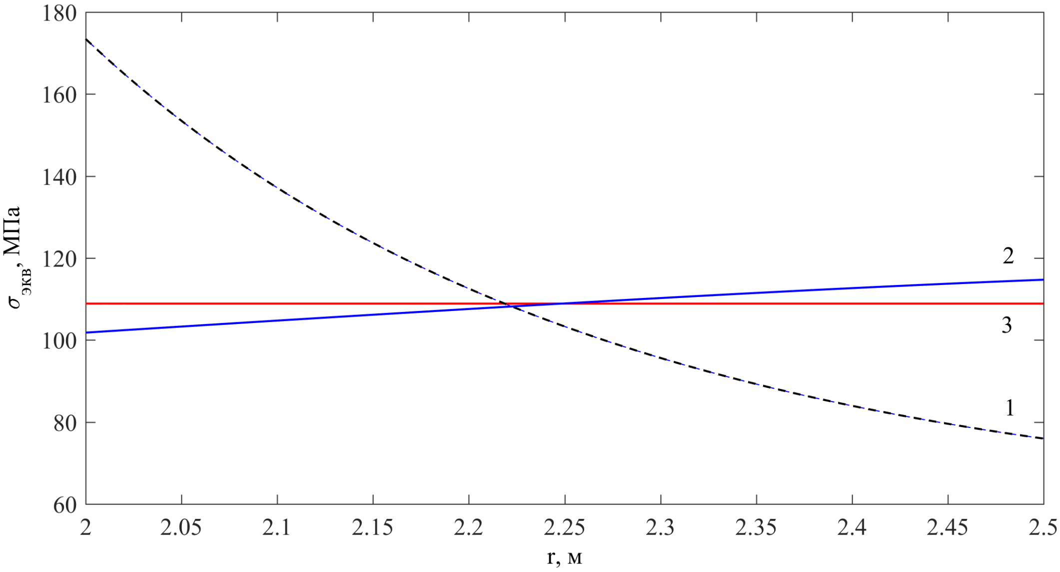


Рисунок 4.30 — Изменение эквивалентных напряжений

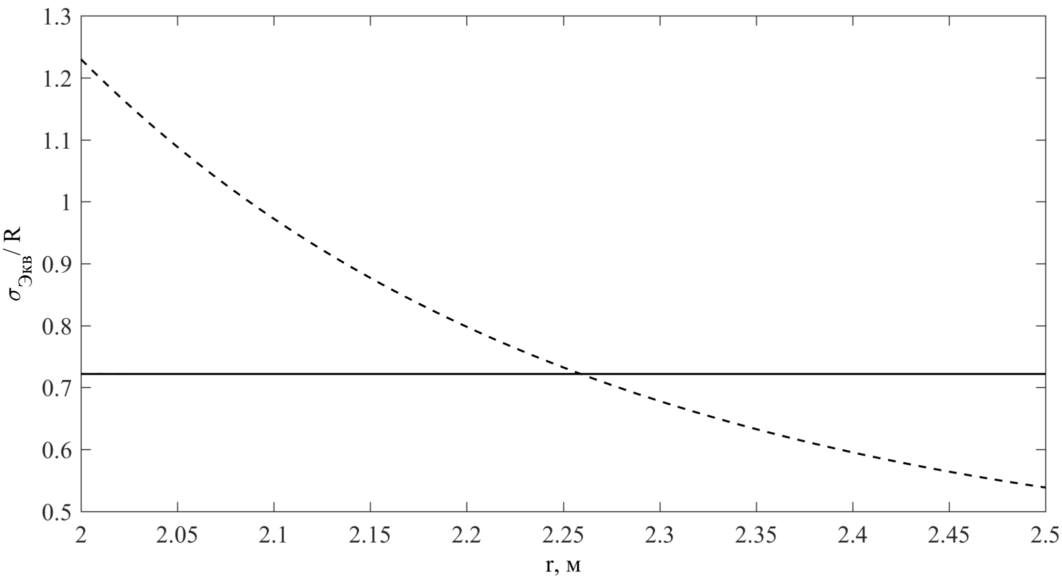


Рисунок 4.31 — Изменение относительных напряжений для однородного и равнопрочного цилиндра

Максимальная величина относительных напряжений снизилась с 1.23 до 0.722. Таким образом, при создании искусственной неоднородности несущая способность оболочки повысилась в 1.7 раз.

4.5 Моделирование равновесия толстостенной железобетонной оболочки, находящейся в условиях температурного и радиационного нагружений

Не смотря на то, что основным объектом исследований в настоящей диссертационной работе выступают полимеры, методика расчёта в полной мере может быть применена и к иным материалам. В настоящем параграфе объектом исследования является бетонный цилиндр, полый внутри, подвергающийся воздействию физических полей: температурного потока и флюенс излучения. Решение задачи производится в двухмерной постановке в осях r и z при помощи двух численных методов: вариационно–разностного (далее — ВРМ) и метода конечных элементов (МКЭ). Данный подход позволяет провести оценку достоверности полученных результатов. Производится моделирование задачи при изменении коэффициента теплопроводности как функции температуры. Также приводится прикладная задача об определении напряжённо–деформированного состояния радиационно–теплового экрана, подобного используемым в АЭС.

4.5.1 Формулировка модели краевой задачи термоупругости при двумерной неоднородности материала

В случае воздействия на тело физических полей, возможно изменение его физико-механических параметров, описываемых, в том числе, коэффициентами Ламе в уравнениях механики, а также модуля объёмного сжатия материала как функции от r и z:

$$\lambda = \lambda(r,z); \quad \mu = \mu(r,z); \quad K = K(r,z); \tag{4.19}$$

Одним из главных недостатков любого из аналитических методов является проблема их применения при наличии неоднородности материала в различных направлениях. Соответственно, любые дальнейшие выкладки проводятся именно для численных методов (ВРМ и МКЭ). Базовые выражения (1.5) представляются в дивергентном виде:

$$\begin{gathered}
\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right) - 2\mu\frac{u}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \\
+ \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial r}\right) - 3\frac{\partial}{\partial r}(K\varepsilon_{\text{в}}) = 0; \\
\frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) - 3\frac{\partial}{\partial z}(K\varepsilon_{\text{в}}) = 0.
\end{gathered} \tag{4.20}$$

Частным случаем приведенных уравнений является вариант, при котором коэффициенты являются величинами постоянными; в этом случае становится возможным записать уравнения в перемещениях для случая двумерной осесимметричной задачи:

$$\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z} - 3\frac{\partial}{\partial r}(K\varepsilon_{\text{в}}) = 0; \\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) - 3\frac{\partial}{\partial z}(K\varepsilon_{\text{в}}) = 0.
\end{gathered} \tag{4.21}$$

Решение данной системы (4.20) было получено ранее в замкнутом виде в трудах [159, 174] и в дальнейшем будет применено с целью оценки достоверности решений при помощи численных методов (ВРМ и МКЭ).

Для использования численных методов в осесимметричных задачах удобно аппроксимировать сечение цилиндра при помощи прямоугольников, образуемых в осях r и z:

$$a \leqslant r \leqslant b; \quad 0 \leqslant z \leqslant H.$$

Граничные условия в напряжениях при этом формулируются следующим образом:

$$\sigma_r(\alpha,z) = -P_\alpha; \quad \tau_{rz}(\alpha,z) = q_\alpha; \quad \alpha = a,b; \tag{4.22}$$

$$\sigma_z(r,\beta) = -P_\beta; \quad \tau_{rz}(r,\beta) = q_\beta; \quad \beta = 0,H, \tag{4.23}$$

для случая цилиндрического села со свободных закреплением, а также в виде смешанных граничных условий (при помощи перемещений и напряжений):

$$u(r,\beta) = u_\beta; \quad w(r,\beta) = w_\beta; \quad \beta = 0,H. \tag{4.24}$$

Для описания граничных условий по остальным частям цилиндра используется выражение (4.22).

В приведённых выражениях (4.22), (4.23) и (4.24) $P_{\alpha,\beta}$ и $q_{\alpha,\beta}$ представляют собой интенсивность нормальных и касательных компонент внешней нагрузки в проекциях на поверхности цилиндрического тела; u_β, w_β — вынужденнные (задаваемые) значения перемещений на поверхностях цилиндра. Для корректного использования заданных краевых условий (4.22), (4.23) необходимо сделать переход от компонент перемещений u и w к компонентам напряжений при помощи уравнений закона Гука в обратной форме (1.5) и соотношений Коши (1.1).

Краевая задача термоупругости описывается, таким образом, системой дифференциальных уравнений в частных производных (4.20) с граничными условиями (4.22), (4.23) либо (4.22), (4.24).

4.5.2 Аппроксимация краевой задачи термоупругости вариационно-разностным методом (ВРМ)

Согласно вариационному принципу Лагранжа, окончательные коэффициенты уравнений Ламе (4.20) соответствует одновременному минимуму функционала полной энергии системы [135, 175]:

$$I(u,w) = W(u,w) - \int\limits_V (Ru + Zw)\,\mathrm{d}V - \int\limits_A (\bar{R}u + \bar{Z}w)\,\mathrm{d}A, \tag{4.25}$$

где W — энергия упругой деформации тела;

$$W(u,w) = \frac{1}{2}\int\limits_V \left\{ E\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + \left(\frac{u}{r} - \varepsilon_{\text{в}}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_{\text{в}}\right)^2 \right] + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \right\} \mathrm{d}V. \tag{4.26}$$

Здесь $\varepsilon_{\text{в}} = \varepsilon_T + \varepsilon_\Phi$ — вынужденные деформации, являющиеся суммой температурных деформаций и деформаций, вызванных ионизирующим излучением.

В выражении (4.25) R, Z и $\bar{R}, \bar{Z}$ — проекции на оси координат массовых сил и поверхностных нагрузок.

Для аппроксимации функционала в замкнутой области $a \leqslant r \leqslant b$; $0 \leqslant z \leqslant H$ определяется в каждом осевом направлении равномерная прямоугольная сетка $\omega = \omega_r \times \omega_z$

$$\omega_r = \{r_i = a + ih_r; \quad i = 0, 1, \ldots, N_r; \quad h_r = (b-a)/N_r\};$$
$$\omega_z = \{z_j = jh_z; \quad j = 0, 1, \ldots, N_z; \quad h_z = H/N_z\}.$$

Кроме того, вводятся множества:

$$\omega_r^+ = \{r_i; i = 1, 2, \ldots, N_r\}; \quad \omega_r^- = \{r_i; i = 0, 1, \ldots, N_r - 1\};$$
$$\omega_z^+ = \{z_j; j = 1, 2, \ldots, N_z\}; \quad \omega_z^- = \{z_j; j = 0, 1, \ldots, N_z - 1\}.$$

Используются также обозначения:

$$\bar{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & r \neq a, b; \quad z \neq 0, H; \\ \bar{h}_\alpha/2, & r = a, b; \quad z = 0, H; \end{cases} \qquad \alpha = r, z.$$

Аппроксимация функционала (4.25) на построенной сетке выполняется заменой интегралов квадратурными формулами, а входящих в него производных — разностными отношениями:

$$Y_r = \frac{Y_{i+1j} - Y_{ij}}{hr}; \quad Y_{\bar{r}} = \frac{Y_{ij} - Y_{i-1j}}{hr};$$
$$Y_z = \frac{Y_{ij+1} - Y_{ij}}{hz}; \quad Y_{\bar{z}} = \frac{Y_{ij} - Y_{ij-1}}{hz}.$$

Интегралы по границе и второй интеграл в (4.25) вычисляются по формуле трапеций, а интеграл в соотношении (4.26) заменяется линейной комбинацией формул левых и правых прямоугольников. В результате функционал (4.25) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
I_h(u,w) = \Bigg\{ &\sum_{\omega_r^+\times\omega_z^+} \left(E\left[(u_{\bar r}-\varepsilon_{\text{в}})^2 + \left(\frac{u}{r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + (w_{\bar z}-\varepsilon_{\text{в}})^2 \right] + \nu\,(u_{\bar z}+w_{\bar r})^2 \right) + \\
&+ \sum_{\omega_r^+\times\omega_z^-} \left(E\left[(u_{\bar r}-\varepsilon_{\text{в}})^2 + \left(\frac{u}{r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + (w_z-\varepsilon_{\text{в}})^2 \right] + \nu\,(u_z+w_{\bar r})^2 \right) + \\
&+ \sum_{\omega_r^-\times\omega_z^+} \left(E\left[(u_r-\varepsilon_{\text{в}})^2 + \left(\frac{u}{r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + (w_{\bar z}-\varepsilon_{\text{в}})^2 \right] + \nu\,(u_{\bar z}+w_r)^2 \right) + \\
&+ \sum_{\omega_r^-\times\omega_z^-} \left(E\left[(u_r-\varepsilon_{\text{в}})^2 + \left(\frac{u}{r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + (w_z-\varepsilon_{\text{в}})^2 \right] + +\nu\,(u_z+w_r)^2 \right) \Bigg\} \frac{rh_rh_z}{4} - \\
&- \sum_{\omega_r\times\omega_z} (\bar R u)\, r\bar h_z - \sum_{\omega_r\times\omega_z} (\bar Z w)\, r\bar h_r - \sum_{\omega_r\times\omega_z} (Ru+Zw)\, r\bar h_r \bar h_z.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Таким образом, задача минимизации функционала (4.25) сведена к задаче минимизации аппроксимирующего функционала (4.27). Минимум этой функции $I_h(u,w)$ двух переменных u_{ij} и w_{ij} достигается при выполнении условий

$$
\frac{\partial I_h}{\partial u_{ij}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial I_h}{\partial w_{ij}} = 0.
$$

Множество $\omega_r^+ \times \omega_z^+$ записывается:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Bigg\{ E\left[\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + \left(\frac{u_{ij}}{r_i}-\varepsilon_{\text{в}}\right) + \left(\frac{w_{ij}-w_{ij-1}}{h_z}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 \right] + \\
+\nu\left(\frac{u_{ij}-uij-1}{h_z}+\frac{w_{ij}-w_{i-1j}}{h_r}\right)\Bigg\}\frac{V}{4}.
\end{aligned}
$$

Множество $\omega_r^- \times \omega_z^-$ записывается:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Bigg\{ E\left[\left(\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h_r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + \left(\frac{u_{ij}}{r_i}-\varepsilon_{\text{в}}\right) + \left(\frac{w_{ij+1}-w_{ij}}{h_z}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 \right] + \\
+\nu\left(\frac{u_{ij+1}-uij}{h_z}+\frac{w_{i+1j}-w_{ij}}{h_r}\right)\Bigg\}\frac{V}{4}.
\end{aligned}
$$

Множество $\omega_r^+ \times \omega_z^-$ записывается:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Bigg\{ E\left[\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 + \left(\frac{u_{ij}}{r_i}-\varepsilon_{\text{в}}\right) + \left(\frac{w_{ij+1}-w_{ij}}{h_z}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2 \right] + \\
+\nu\left(\frac{u_{ij+1}-uij}{h_z}+\frac{w_{ij}-w_{i-1j}}{h_r}\right)\Bigg\}\frac{V}{4}.
\end{aligned}
$$

Множество $\omega_r^- \times \omega_z^+$ записывается:

$$\frac{1}{2}\left\{E\left[\left(\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h_r}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2+\left(\frac{u_{ij}}{r_i}-\varepsilon_{\text{в}}\right)+\left(\frac{w_{ij}-w_{ij-1}}{h_z}-\varepsilon_{\text{в}}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\nu\left(\frac{u_{ij}-uij-1}{h_z}+\frac{w_{i+1j}-w_{ij}}{h_r}\right)\right\}\frac{V}{4}.$$

Выполняя дифференцирование, можно получить разностную аппроксимацию задачи. Аппроксимация множества $\omega_r^+ \times \omega_z^+$:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{ij}}=\left[E\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r^2}+\frac{u_{ij}}{r_i^2}\right)+\nu\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h_z^2}+\frac{w_{ij}-w_{i-1j}}{h_rh_z}\right)\right]\frac{V}{4}-$$
$$-E\varepsilon_{\text{в}}\left(\frac{1}{h_r}+\frac{1}{r_i}\right)\frac{V}{4};$$
$$\frac{\partial W}{\partial w_{ij}}=\left[E\frac{w_{ij}-w_{ij-1}}{h_z^2}+\nu\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h_rh_z}+\frac{w_{ij}-w_{i-1j}}{h_r^2}\right)\right]\frac{V}{4}-\frac{E\varepsilon_{\text{в}}}{h_z}\frac{V}{4}.$$

Аппроксимация множества $\omega_r^- \times \omega_z^-$:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{ij}}=\left[E\left(\frac{u_{ij}-u_{i+1j}}{h_r^2}+\frac{u_{ij}}{r_i^2}\right)+\nu\left(\frac{u_{ij}-u_{ij+1}}{h_z^2}+\frac{w_{ij}-w_{i+1j}}{h_rh_z}\right)\right]\frac{V}{4}+$$
$$+E\varepsilon_{\text{в}}\left(\frac{1}{h_r}-\frac{1}{r_i}\right)\frac{V}{4};$$
$$\frac{\partial W}{\partial w_{ij}}=\left[E\frac{w_{ij}-w_{ij+1}}{h_z^2}+\nu\left(\frac{u_{ij}-u_{ij+1}}{h_rh_z}+\frac{w_{ij}-w_{i+1j}}{h_r^2}\right)\right]\frac{V}{4}+\frac{E\varepsilon_{\text{в}}}{h_z}\frac{V}{4}.$$

Аппроксимация множества $\omega_r^+ \times \omega_z^-$:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{ij}}=\left[E\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r^2}+\frac{u_{ij}}{r_i^2}\right)+\nu\left(\frac{u_{ij}-u_{ij+1}}{h_z^2}+\frac{w_{i-1j}-w_{ij}}{h_rh_z}\right)\right]\frac{V}{4}-$$
$$-E\varepsilon_{\text{в}}\left(\frac{1}{h_r}+\frac{1}{r_i}\right)\frac{V}{4};$$
$$\frac{\partial W}{\partial w_{ij}}=\left[E\frac{w_{ij}-w_{ij+1}}{h_z^2}+\nu\left(\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{h_rh_z}+\frac{w_{ij}-w_{i-1j}}{h_r^2}\right)\right]\frac{V}{4}+\frac{E\varepsilon_{\text{в}}}{h_z}\frac{V}{4}.$$

Аппроксимация множества $\omega_r^- \times \omega_z^+$:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{ij}}=\left[E\left(\frac{u_{ij}-u_{i+1j}}{h_r^2}+\frac{u_{ij}}{r_i^2}\right)+\nu\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h_z^2}+\frac{w_{i+1j}-w_{ij}}{h_rh_z}\right)\right]\frac{V}{4}+$$
$$+E\varepsilon_{\text{в}}\left(\frac{1}{h_r}-\frac{1}{r_i}\right)\frac{V}{4};$$
$$\frac{\partial W}{\partial w_{ij}}=\left[E\frac{w_{ij}-w_{ij-1}}{h_z^2}+\nu\left(\frac{u_{i-1j}-u_{ij}}{h_rh_z}+\frac{w_{ij}-w_{i+1j}}{h_r^2}\right)\right]\frac{V}{4}-\frac{E\varepsilon_{\text{в}}}{h_z}\frac{V}{4}.$$

Представленная разностная схема является консервативной в смысле соблюдения вариационного принципа Лагранжа. Необходимо отметить, что при реализации такого подхода к построению разностной схемы граничные условия в напряжениях не нуждаются в отдельном рассмотрении, так как их разностный аналог получается непосредственно из аппроксимации функционала полной энергии системы.

Построенная разностная схема определена на девятиточечном шаблоне (см. рисунок 4.32), который в терминологии МКЭ соответствует прямоугольному конечному элементу. Входящие в вышеприведённые формулы разностные производные определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
(aY_{\bar r})_r &= \frac{1}{h_r}\left(a_{i+\frac{1}{2}j}\frac{Y_{i+1j}-Y_{ij}}{h_r} - a_{i-\frac{1}{2}j}\frac{Y_{ij}-Y_{i-1j}}{h_r}\right);\\
(aY_{\bar z})_z &= \frac{1}{h_z}\left(a_{ij+\frac{1}{2}}\frac{Y_{ij+1}-Y_{ij}}{h_z} - a_{ij-\frac{1}{2}}\frac{Y_{ij}-Y_{ij-1}}{h_z}\right);\\
(aY_{\dot r})_{\dot z} &= \frac{1}{2h_z}\left(a_{ij+1}\frac{Y_{i+1j+1}-Y_{i-1j-1}}{2h_r} - a_{ij-1}\frac{Y_{i+1j+1}-Y_{i-1j-1}}{2h_r}\right);\\
(aY_{\dot z})_{\dot r} &= \frac{1}{2h_r}\left(a_{i+1j}\frac{Y_{i+1j+1}-Y_{i+1j-1}}{2h_z} - a_{i-1j}\frac{Y_{i-1j+1}-Y_{i-1j-1}}{2h_z}\right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

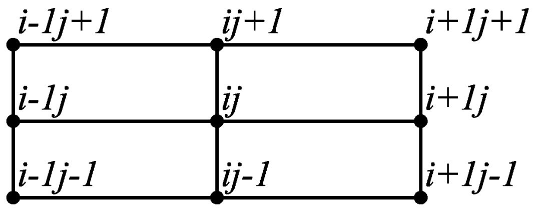


Рисунок 4.32 — Девятиточечный шаблон

4.5.3 Методика решения разностных уравнений

Выше была получена разностная аппроксимация дифференциальной задачи. Такая форма записи является удобной для теоретического исследования разностных схем. При решении полученных разностных уравнений их можно представить в виде системы линейных уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_{k,l=-1}^{1}\left(A_{ij}^{kl}u_{i+k,j+l} + B_{ij}^{kl}w_{i+k,j+l}\right) = F_{u_{ij}};\\
\sum_{k,l=-1}^{1}\left(C_{ij}^{kl}u_{i+k,j+l} + D_{ij}^{kl}w_{i+k,j+l}\right) = F_{w_{ij}};\\
i = 0,1,,\ldots,N_r;\\
j = 0,1,,\ldots,N_z.
\end{gathered} \tag{4.29}$$

Здесь $k, l = 0, \pm 1$ — локальные индексы на шаблоне с центром в точке (ij), изображённом на рисунке 4.33.

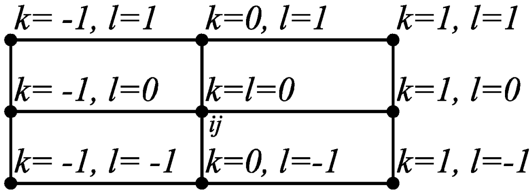


Рисунок 4.33 — Девятиточечный шаблон

Систему уравнений (4.28) можно представить в матричном виде. Вводятся сеточные вектор функции

$$\bar{u} = \begin{Vmatrix} u_{00} \\ \vdots \\ u_{ij} \\ \vdots \\ u_{N_r N_z} \end{Vmatrix}; \quad \bar{w} = \begin{Vmatrix} w_{00} \\ \vdots \\ w_{ij} \\ \vdots \\ w_{N_r N_z} \end{Vmatrix}$$

и блочный вектор $Y = \begin{Vmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Vmatrix}$, где вектор Y принадлежит пространству сеточных функций, являющемуся прямой суммой пространств, к которым принадлежат векторы $\bar{u}$ и $\bar{w}$. Аналогично вводится вектор правых частей системы уравнений (4.28):

$$F = \begin{Vmatrix} \bar{F_u} \\ \bar{F_w} \end{Vmatrix},$$

где $\bar{F_u} = \left\{F_{u_{00}}, \ldots, F_{u_{N_r N_z}}\right\}^T$; $\bar{F_w} = \left\{F_{w_{00}}, \ldots, F_{w_{N_r N_z}}\right\}^T$.

Тогда систему (4.28) можно записать в виде

$$M \cdot Y = F, \tag{4.30}$$

где M — блочная матрица

$$M = \begin{Vmatrix} A & D \\ C & D \end{Vmatrix},$$

блоки которой — обычные матрицы, составленные из коэффициентов уравнений (4.28) и соответствующие девятиточечному шаблону, показанному на рисунке 4.32.

Решение системы линейных уравнений произведено с помощью программного комплекса *MatLab*. Решения полученной системы разностных уравнений позволяют вычислить вектор перемещений, определённых в узлах сетки ij. Действующие напряжения определяются по уравнениям закона Гука в обратной форме (1.5).

4.5.4 Деформации и напряжения в железобетонных конструкциях, вызванные радиационным нагружением

Структурные изменения системы «раствор–бетон» приводят к появлению радиационных деформаций, которые, однако, практически невозможно измерить; между общим количеством радиационных дефектов и величиной радиационных деформаций существует определённая зависимость. Линейные и объёмные радиационные деформации образца измеряются относительно легко, поэтому было предложено использовать их как меру количества внутренних дефектов структуры, появившихся после облучения материала [176, 177, 178].

Величина радиационных деформаций системы «раствор–бетон» складывается из отрицательных — усадочных деформаций цементного камня и положительных деформаций зёрен заполнителя.Усадка цементного камня происходит за счёт потери воды при облучении. Положительные деформации возникают в результате перехода кристаллов зёрен заполнителя в аморфное состояние. Однако в целом система «раствор–бетон» получает положительные радиационные деформации, так как заполнитель составляет 60–70 % от общего объёма, а цементный камень — 15–20 % [179].

Максимальное значение радиационных деформаций является постоянной величиной для бетона данного состава. Она зависит от вида и характера заполнителя. После обработки экспериментальных данных получена эмпирическая формула, позволяющая определять линейные радиационные деформации в зависимости от флюенса нейтроной:

$$\varepsilon_{\Phi} = \frac{\alpha D_m \left[\exp\left(\beta\Phi\right) - 1\right]}{D_m + \alpha \exp\left(\beta\Phi\right)} \cdot 0.01, \tag{4.31}$$

где ε_{Φ} — радиационные деформации бетона при заданном Ф; D_m — максимально возможные радиационные деформации бетона данного состава; Ф — флюенс нейтроной; α, β — коэффициенты, зависящие от состава бетона и радиационной нагрузки.

Из формулы 4.31 видно, что радиационные деформации зависят, в первую очередь, от радиационной нагрузки — флюенса нейтронов, а также от состава бетона. Состав бетона определяет максимальное значение D_m, а также величину флюенса нейтроной, при котором радиационные деформации ε_{Φ} достигает своего максимального значения D_m (рисунок 4.34). С увеличением флюенса нейтронов расширяется зона проникновения максимального значения D_m вглубь материала, и наоборот.

Результатом облучения материала является появление не только радиационных деформаций, но и изменение его физико-механических свойств, в том числе модуля упругости. Экспериментальные исследования показывают, что у бетонов при флюенсе нейтронов больше величины $10^{19}\,\frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$ значение модуля упругости снижается [179]. На основе опытных данных была получена зависимость изменения модуля упругости от флюенса нейтронов

$$E_{\Phi} = E_0 \left[\gamma - \alpha_1 \lg\left(\beta_1 \Phi\right)\right],$$

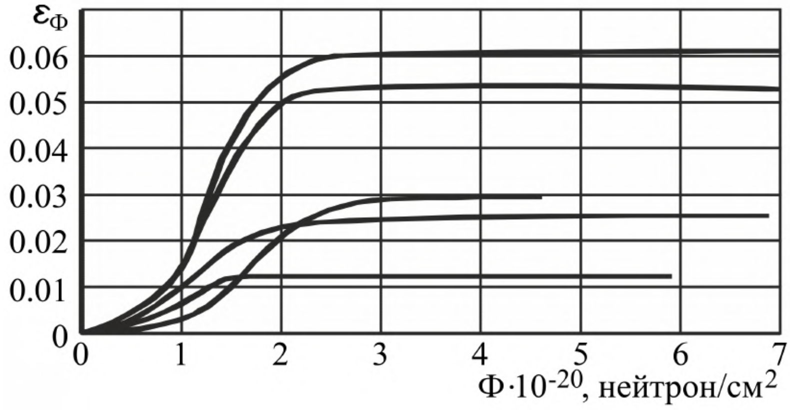


Рисунок 4.34 — Радиационные деформации облученных растворов и бетонов

где E_0 — модуль упругости бетона до облучения; $\alpha_1, \beta_1, \gamma$ — коэффициенты, зависящие от спектра излучений; Ф — флюенс нейтронов.

В работе [180] получено пороговое значение флюенса нейтронов, при котором модуль упругости начинает уменьшаться. Это значение определяется по следующей формуле:

$$\lg\left(\beta_1 \Phi^*\right) = \frac{\gamma - 1}{\alpha_1},$$

где Φ^* — пороговое значение флюенс нейтронов.

4.5.5 Решение модельных задач

В данном разделе рассматривается решение ряда модельных задач расчёта термоупругих напряжений в однородных и неоднородных полых цилиндрах, имеющих аналитическое решение. Сравнение результатов расчётов, полученных двумя методами (численным и аналитическим), позволяет показать достоверность численных расчётов и дать оценку их точности при различном числе интервалов разбиения области интегрирования.

а) Рассматривается плоское деформированное состояние бесконечно длинного однородного и неоднородного цилиндров, находящихся под воздействием постоянного по высоте осесимметричного температурного поля. Аналитическое решение этой задачи при постоянной температуре внутренней поверхности равной T_a, температуре внешней поверхности равной нулю и распределённой вдоль радиуса по логарифмическому закону температуре стенки цилиндра даётся в работах [181, 182]. Граничные условия при численной реализации ставились в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r\left(a,z\right) = \sigma_r\left(b,z\right) = \tau_{rz}\left(a,z\right) = \tau_{rz}\left(b,z\right) = 0;\\
&\tau_{rz}\left(r,0\right) = \tau_{rz}\left(r,H\right) = 0;\\
&w\left(r,0\right) = w\left(r,H\right) = 0.
\end{aligned}$$

В таблице 4.2 приведены результаты аналитического и численного решений задачи при следующих исходных данных: $a = 1.0$ м; $b = 2.0$ м; $H = 1.0$ м; $E = 0.2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.2$; $P_b = 10$ МПа; $T_a = 300\,^\circ$C и сетке 10×10.

Таблица 4.2 — Сравнение результатов численного и аналитического решений

Метод	r, м при $z = 0.6H$	$u \cdot 10^{-2}$ м	σ_θ, МПа	σ_z, МПа
Аналитическое	1.0	0.1397	-45.899	-69.180
решение	1.6	0.2719	9.998	-18.324
	2.0	0.2794	29.101	5.820
ВРМ/МКЭ	1.0	0.1392	-46.136	-69.345
	1.6	0.2712	9.891	-18.354
	2.0	0.2787	29.036	5.821

Из сопоставления приведённых в таблице 4.2 результатов видно, что отличия аналитического и численного решений не превосходят 1.0 %.

б) Рассматривается напряжённо–деформированное состояние однородного и неоднородного полых цилиндров, находящихся под воздействием постоянного по высоте осесимметричного температурного поля и внешнего давления $P_{\text{в}}(z)$, приложенного к внешней поверхности цилиндра.

Здесь производится сравнение результатов расчётов, выполненных двумя методами: численно–аналитическим (методом разделения переменных, далее — МРП), представленным в работах [159, 183], и энергетическими методами (ВРМ и МКЭ). Внешняя нагрузка задаётся формулой

$$P_{\text{в}}(z) = 2P_{\text{в}}^0 \left[\frac{z_2 - z_1}{H} + \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi z_2}{H} - \sin \frac{2\pi z_1}{H} \right) \right].$$

Результаты расчётов для однородного цилиндра, выполненных двумя методами, представлены в таблице 4.3, а в таблице 4.4 приведены результаты расчётов, выполненных с учётом указанной зависимости $E(r)$. Результаты расчётов, приведённые в таблицах 4.3 и 4.4, получены энергетическими методами на сетке 20×20. Как видно из приведённых данных, расхождения между результатами расчётов, выполненных разными методами, не превосходят 3 % по перемещениям и 5 % по напряжениям. Худшее совпадение данных в напряжениях объясняется необходимостью проведения численного дифференцирования при их вычислениях. Видно, что учёт температурной неоднородности материала приводит к значительному (до 29 %) уменьшению действующих напряжений.

4.5.6 Решение задачи теплопроводности и ионизации

В настоящем разделе кратко описывается методика определения стационарного осесимметричного температурного поля в цилиндре конечной длины. Распределение ионизирующего излучения считается постоянным по высоте цилиндра.

Таблица 4.3 — Сравнение результатов расчёта однородного цилиндра двумя методами

z	r, м	u, м	w, м	σ_θ, МПа	σ_z, МПа	τ_{rz}, МПа
МРП						
0	1.0	$0.6922\cdot10^{-3}$	0	-55.095	-76.067	0
	1.6	$0.1498\cdot10^{-2}$	0	7.373	-21.433	0
	2.0	$0.1559\cdot10^{-2}$	0	30.244	9.114	0
ВРМ/МКЭ						
0	1.0	$0.6979\cdot10^{-3}$	0	-54.832	-76.014	0
	1.6	$0.1483\cdot10^{-2}$	0	7.424	-21.410	0
	2.0	$0.1556\cdot10^{-2}$	0	30.107	8.858	0
МРП						
0.3	1.0	$0.6907\cdot10^{-3}$	$-0.1043\cdot10^{-5}$	-55.085	-75.754	0.00
	1.6	$0.1488\cdot10^{-2}$	$-0.3613\cdot10^{-5}$	6.983	-20.695	-0.846
	2.0	$0.1516\cdot10^{-2}$	$0.1142\cdot10^{-4}$	27.466	4.023	0.00
ВРМ/МКЭ						
0.3	1.0	$0.6985\cdot10^{-3}$	$-0.1007\cdot10^{-5}$	-54.826	-75.726	0.00
	1.6	$0.1490\cdot10^{-2}$	$-0.3499\cdot10^{-5}$	7.049	-20.679	-0.825
	2.0	$0.1517\cdot10^{-2}$	$0.1038\cdot10^{-4}$	27.500	4.106	0.00
МРП						
0.5	1.0	$0.6898\cdot10^{-3}$	0	-55.080	-75.568	0
	1.6	$0.1482\cdot10^{-2}$	0	6.776	-20.305	0
	2.0	$0.1493\cdot10^{-2}$	0	26.000	1.435	0
ВРМ/МКЭ						
0.5	1.0	$0.6976\cdot10^{-3}$	0	-54.823	-75.556	0
	1.6	$0.1485\cdot10^{-2}$	0	6.850	-20.300	0
	2.0	$0.1495\cdot10^{-2}$	0	26.082	1.508	0

При определении температурного поля, задача сводится к решению уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах [128, 135, 184]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_T(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_T(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right]=-q_v \tag{4.32}$$

с граничными условиями

$$-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial n}=\alpha\left(T-T_{\text{ср}}\right). \tag{4.33}$$

Здесь $T=T(r,z)$ — температурная функция; $\lambda_T(T)$ — коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры; $q_v=q_v(r,z)$ — функция внутренних источников теплоты, обусловленная воздействием радиационного поля, химических реакций и т. д.; α — коэффициент теплоотдачи, зависящий, вообще говоря, от многих факторов; $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды; n — внешняя нормаль к границе.

Функция $T(r,z)$, удовлетворяющая краевой задаче (4.32), (4.33), будет использоваться в следующем разделе при расчёте теплового экрана ядерного реактора. Расчётная схема этой задачи представлена на рисунке 4.35. Соответствующие граничные условия (4.33) имеют следующий вид:

Таблица 4.4 — Сравнение результатов расчёта неоднородного цилиндра двумя методами

z	r, м	u, м	w, м	σ_θ, МПа	σ_z, МПа	τ_{rz}, МПа
МРП						
0	1.0	$0.5853\cdot10^{-3}$	0	-41.838	-54.434	0
	1.6	$0.1402\cdot10^{-2}$	0	4.905	-20.936	0
	2.0	$0.1469\cdot10^{-2}$	0	30.386	9.298	0
ВРМ/МКЭ						
0	1.0	$0.5706\cdot10^{-3}$	0	-42.222	-54.493	0
	1.6	$0.1385\cdot10^{-2}$	0	4.551	-20.964	0
	2.0	$0.1451\cdot10^{-2}$	0	29.999	8.960	0
МРП						
0.3	1.0	$0.5836\cdot10^{-3}$	$-0.1193\cdot10^{-5}$	-41.829	-54.169	0.00
	1.6	$0.1391\cdot10^{-2}$	$-0.3788\cdot10^{-5}$	4.534	-20.176	-0.835
	2.0	$0.1426\cdot10^{-2}$	$0.1134\cdot10^{-4}$	27.526	3.986	0.00
ВРМ/МКЭ						
0.3	1.0	$0.5690\cdot10^{-3}$	$-0.1320\cdot10^{-5}$	-42.218	-54.251	0.00
	1.6	$0.1375\cdot10^{-2}$	$-0.3713\cdot10^{-5}$	4.196	-20.234	-0.819
	2.0	$0.1410\cdot10^{-2}$	$0.1035\cdot10^{-4}$	27.222	4.019	0.00
МРП						
0.5	1.0	$0.5827\cdot10^{-3}$	0	-41.824	-54.029	0
	1.6	$0.1385\cdot10^{-2}$	0	4.339	-19.775	0
	2.0	$0.1404\cdot10^{-2}$	0	26.017	1.210	0
ВРМ/МКЭ						
0.5	1.0	$0.5680\cdot10^{-3}$	0	-42.222	-54.107	0
	1.6	$0.1369\cdot10^{-2}$	0	4.005	-19.843	0
	2.0	$0.1388\cdot10^{-2}$	0	25.761	1.318	0

$$\begin{aligned}
&r=a, \quad -\lambda_T\frac{\partial T}{\partial r}=\alpha_a\left(T-T^a_{\text{ср}}\right);\\
&r=b, \quad -\lambda_T\frac{\partial T}{\partial r}=\alpha_b\left(T-T^b_{\text{ср}}\right);\\
&z=H, \quad -\lambda_T\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha_H\left(T-T^H_{\text{ср}}\right);\\
&z=0, \quad T=T_0(r).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Здесь $T^a_{\text{ср}}(z)$, $T^b_{\text{ср}}(z)$, $T^H_{\text{ср}}(r)$ — температуры окружающей среды на боковых (при $r=a,b$) и торцовой ($z=H$) поверхностях цилиндра; $\alpha_a(z)$, $\alpha_b(z)$, $\alpha_H(r)$ — коэффициенты теплоотдачи на этих поверхностях.

Последнее граничное условия первого рода в (4.34) можно принять, учитывая, что масса основания значительно больше массы стоящей на нём конструкции и температура на контакте двух тел — известная величина $T_0(r)$.

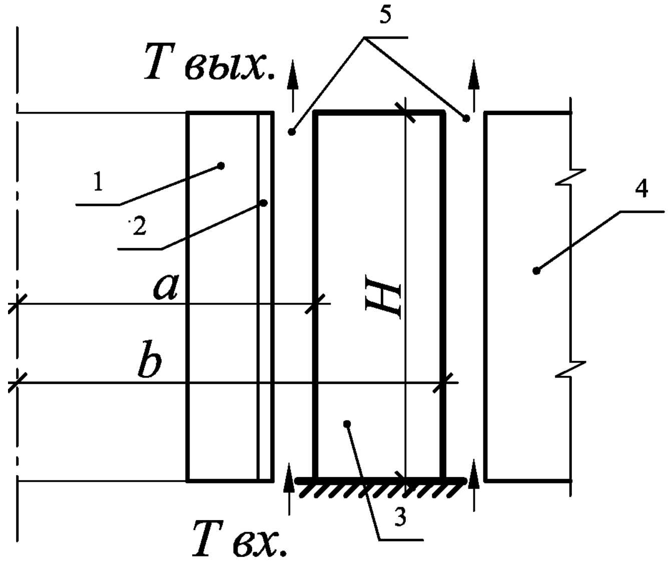


Рисунок 4.35 — Расчётная схема защиты: 1 — корпус реактора; 2 — теплоизоляция; 3 — радиационно-тепловой экран («сухая защита»); 4 — биологическая защита; 5 — каналы охлаждения

4.5.7 Аналитическое решение

Решение ищется в виде тригонометрического ряда [185]

$$T\left(r,z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}R_k\left(r\right)\cdot\cos\frac{k\pi}{h}z, \tag{4.35}$$

предполагая, что функция тепловыделений также может быть разложена в ряд по косинусам. После подстановки в уравнение (4.32) искомой температуры из (4.35) и функции тепловыделения в виде ряда оно распадается на систему уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $R_k\left(r\right)$;

$$\frac{\mathrm{d}^2R_k\left(r\right)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}R_k\left(r\right)}{\mathrm{d}r}-\left(\frac{k\pi}{h}\right)^2R_k\left(r\right)=\frac{1}{\lambda}a_k\left(r\right),\quad k=0,1,2\ldots, \tag{4.36}$$

где $a_k\left(r\right)$ — коэффициенты при косинусах в разложении функции тепловыделений. Система (4.36) решается довольно просто, но выражения для $R_k\left(r\right)$ громоздки, поэтому ограничимся лишь символической записью:

$$R_k\left(r\right)=R_k\left[C_{1k};C_{2k};I_0\left(\frac{k\pi}{h}r\right);K_0\left(\frac{k\pi}{h}r\right);r\right],\quad k=0,1,2\ldots, \tag{4.37}$$

где C_{1k},C_{2k} — произвольные постоянные, определяющиеся из граничных условий; $I_0\left(\frac{k\pi}{h}r\right),K_0\left(\frac{k\pi}{h}r\right)$ — видоизменённые функции Бесселя первого и второго рода, которые табулированы в математических таблицах.

Для определения C_{1k}, C_{2k} $(k = 0,1,2\ldots)$ необходимо проделать несложные операции: решить дифференциальное уравнение первого рода (4.33) относительно неизвестной температуры газа-охладителя $T_{\text{ср}}$ и в найденном выражении заменить $T(r,z)$ искомым решением в виде ряда (4.35); подставить в условие конвективного теплообмена на боковых поверхностях цилиндра (4.34) температуру цилиндра (4.35) и полученную температуру газа-охладителя, выраженную через $T(r,z)$. После подстановки и некоторых промежуточных операций, уравнения (4.34) преобразуются в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_{1k}, C_{2k} $(k = 0,1,2\ldots)$;

$$A_{im}C_{1m} - \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik}a_m^k C_{1k} + D_{im} \cdot C_{2m} - \sum_{k=1}^{\infty} = -F_{im} + \sum_{k=1}^{\infty} a_m^k G_{ik}, \qquad i = 1,2; \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{4.38}$$

где A_{im}; B_{ik}; D_{im}; E_{ik}; F_{ik}; a_m^k; G_{ik} — постоянные величины.

Достаточно полно изучены только регулярные и вполне регулярные системы уравнений с положительными коэффициентами гари неизвестных и положительными свободными членами, (решение которых существует и может, быть найдено с заданной степенью точности. Кроме того, если для системы (4.38) существует мажорантная по модулю система, имеющая положительное решение, то приближенное решение находится «отсечением» n числа уравнений и неизвестных исходной системы. При вычислении температурных полей необходимо в каждом конкретном случае исследовать систему (4.38).

Полученные формулы принимают более или менее простой вид, и решение сравнительно легко можно получить лишь в случае, если функция тепловыделений допускает разложение

$$f(r,z) \approx \left(\sum_{n=0}^{23} b_n r^n\right) \cdot \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{23} a_m \cos\frac{m\pi}{h} z\right)$$

и функции Бесселя без большой ошибки представимы в виде

$$I_0\left(\frac{k\pi}{h} r\right) \approx \sum_{e=0}^{23} d_e r^e, \quad K_0\left(\frac{k\pi}{h} r\right) \approx \sum_{p=0}^{23} l_p r^p.$$

К некоторым конкретным вариантам биологической и тепловой защиты эти разложения применить было невозможно и для получения приемлемого результата (точность 1–3 %) следовало решать систему 40 линейных алгебраических уравнений с 40 неизвестными. Поэтому для решения задачи был использован численный метод.

4.5.8 Численное решение

Решение сформулированной краевой задачи (4.32), (4.34) было получено вариационно-разностным методом [135]. Применение этого метода становится естественным, поскольку полученная в результате расчёта температурная функция $T\left(r_i, z_j\right)$ и её градиент используются в дальнейшем для решения задачи термоупругости тем же методом и на той же самой сетке.

Используя построенную в п. 4.5.2 сетку $\omega = \omega_r \times \omega_z$, разностную схему краевой задачи теплопроводности можно представить в виде [135]:

$$\frac{1}{r}\left(r\lambda T_{\bar{r}}\right)_r + \left(\lambda T_{\bar{z}}\right)_z = f, \tag{4.39}$$

$$f = -q_v\left(r_i, z_j\right).$$

$$\lambda_{\frac{1}{2}j} r_{\frac{1}{2}} T_r = r_0\alpha_a\left(T - T^a_{\text{ср}}\right) - \frac{h_r}{2}\left[\left(r\lambda T_{\bar{z}}\right)_z - rf\right]; \qquad r = a; \quad z \neq 0, H.$$

$$-\lambda_{N_r-\frac{1}{2}j} r_{N_r-\frac{1}{2}} T_{\bar{r}} = r_N r\alpha_b\left(T - T^b_{\text{ср}}\right) - \frac{h_r}{2}\left[\left(r\lambda T_{\bar{z}}\right)_z - rf\right]; \qquad r = b; \quad z \neq 0, H.$$

$$-\lambda_{iN_z-\frac{1}{2}} r_i T_{\bar{z}} = r_i\alpha_H\left(T - T^H_{\text{ср}}\right) - \frac{h_z}{2}\left[\left(r\lambda T_{\bar{r}}\right)_r - rf\right]; r \neq a, b; \quad z = H.$$

$$\frac{r_{\frac{1}{2}}\lambda_{\frac{1}{2}}N_z}{h_r}T_r - \frac{r_0\lambda_{0N_z-\frac{1}{2}}}{h_z}T_{\bar{z}} = \frac{\alpha_a r_0}{h_r}\left(T - T^a_{\text{ср}}\right) + \frac{\alpha_H r_0}{h_z}\left(T - T^H_{\text{ср}}\right) + \frac{r_0 f}{2}; \qquad r = a; \quad z = H.$$

$$-\frac{r_{N_r-\frac{1}{2}}\lambda_{N_r-\frac{1}{2}}N_z}{h_r}T_{\bar{r}} - \frac{r_{N_r}\lambda_{N_rN_z-\frac{1}{2}}}{h_z}T_{\bar{z}} =$$

$$= \frac{\alpha_b r_{N_r}}{h_r}\left(T - T^b_{\text{ср}}\right) + \frac{\alpha_H r_{N_r}}{h_z}\left(T - T^H_{\text{ср}}\right) + \frac{r_{N_r} f}{2}; \qquad r = b; \quad z = H.$$

$$T = T_0(r); \quad z = 0; \quad a \leqslant r \leqslant b. \tag{4.40}$$

Необходимо отметить, что разностная аппроксимация уравнения теплопроводности и граничных условий может быть получена и другими методами, например, интегро-интерполяционными методами [186], при этом вид соотношений (4.39), (4.40) не изменится.

Полученная разностная схема является самосопряжённой и консервативной в смысле соблюдения закона сохранения тепловой энергии. В силу этого матрица полученной системы разностных уравнений симметрична.

Для оценки точности решения задачи теплопроводности была рассмотрена задача определения температуры в бесконечно длинном цилиндре, имеющая аналитическое решение. В этом случае уравнение (4.32) принимает вид

$$T'' + \frac{1}{r}T' = -\frac{q_v}{\lambda_T};$$

а его решение при граничных условиях на боковых поверхностях (4.34) может быть представлено в виде

$$T = -\frac{q_v}{4\lambda_T}r^2 + C_1\ln r + C_2,$$

где C_1 и C_2 определяются из решения системы уравнений

$$\left(\alpha_a \ln a - \frac{\lambda_T}{a}\right) C_1 + \alpha_a C_2 = \alpha_a \left(\frac{q_v a^2}{4\lambda_T} + T^a_{\text{ср}}\right) - \frac{q_v a}{2};$$
$$\left(\alpha_b \ln b - \frac{\lambda_T}{b}\right) C_1 + \alpha_b C_2 = \alpha_b \left(\frac{q_v b^2}{4\lambda_T} + T^b_{\text{ср}}\right) + \frac{q_v b}{2}.$$

Результаты расчёта, полученные при следующих исходных данных: $a = 1.0$ м, $b = 2.0$ м, $T^a_{\text{ср}} = 50\,^\circ C$, $T^b_{\text{ср}} = 20\,^\circ C$, $\alpha_a = 5\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot{}^\circ C}$, $\alpha_b = 35\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot{}^\circ C}$, $q_v = 1.0 \cdot 10^3\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$, — сведены в табл. 4.5. Решение получено на сетке 4×4 интервала.

Таблица 4.5 — Сравнение результатов расчёта неоднородного цилиндра двумя методами

r при $z = 0.5H$	Численное решение	Аналитическое решение
1.00	118.439	118.874
1.50	133.673	133.804
2.00	36.580	36.509

4.5.9 Напряжённо–деформированное состояние радиационно–теплового экрана

Радиационно–тепловой экран устанавливается за корпусом реактора и предназначен для снижения радиационных и тепловых воздействий, генерирующихся при работе реактора, на находящиеся за ним строительные конструкции биологической защиты. В настоящем параграфе рассматривается определение напряжённо–деформированного состояния радиационно–теплового экрана, обусловленного температурным воздействием.

В конструктивном отношении тепловая защита реактора представляет собой толстостенный свободно стоящий цилиндр, выполненный из жаростойкого железобетона [177, 187]. Расчётная схема данной конструкции приведена на рисунке 4.35. Для снижения температурной нагрузки предусматривается воздушное охлаждение прокачкой воздуха в зазорах между корпусом реактора, конструкцией тепловой защиты и биологической защитой реактора.

Для расчёта термоупругих напряжений в конструкции тепловой защиты были применены вариационно–разностный метод (ВРМ) и метод конечных элементов (МКЭ), позволяющие учесть двумерную неоднородность материала, а также реальные условия опирания. Расчёты были выполнены при следующих исходных данных, отвечающих применяющимся в настоящее время конструкциям защит. Результаты расчётов с помощью ВРМ и МКЭ полностью совпали между собой. Внутренний a и наружный b радиусы цилиндра соответственно равны 2 и 3 м. Высота цилиндра $H = 3$ м. Материал — бетон со следующими характеристиками: $E = 0.2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.2$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$; $\lambda_T = 1.5\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ C}$.

Первым этапом расчёта является решение задачи теплопроводности с помощью методики и программы расчёта на ЭВМ, изложенной в предыдущем параграфе. При этом в расчётах учитывались зависимости коэффициента теплопроводности материала λ_T от температуры, согласно документу [188], а также наличие внутренних источников тепловыделений, обусловленное радиационным разогревом материала [177]. Необходимо отметить, что определение точного вида функции $Q(r,z)$, описывающей плотность внутренних источников тепловыделений, обусловленных ионизирующим излучением, представляет собой весьма сложную задачу, решение которой выходит за рамки данной диссертационной работы. Её вид был принят аналогично работам [128, 185, 183]:

$$Q(r,z) = q_0 + q_1 \exp\left[-\delta\,(r-a)\right] \cdot \sin\frac{\pi z}{H}, \tag{4.41}$$

где q_0, q_1, δ — заданные постоянные величины.

Граничные условия задачи теплопроводности подробно рассмотрены в п. 4.5.6. Входящие в них величины коэффициентов теплоотдачи α были приняты в соответствии с данными, приведёнными в работе [177], при этом распределение температуры охлаждающего воздуха по высоте каналов было принято линейным с температурой воздуха на входе в канал 30 °C и выходе 80 °C.

На рисунках 4.36 и 4.37 приведены графики функции $Q(r,z)$ и соответствующее им распределение температуры в горизонтальных сечениях цилиндра.

На следующем этапе расчёта определялись коэффициенты Ламе и модуль объёмного сжатия материала с учётом их температурной зависимости по [188], после чего производился расчёт напряжённо–деформированного состояния конструкции защиты при следующих граничных условиях:

— жёсткая заделка нижней торцовой поверхности

$$z = 0: \qquad u = 0, \quad w = 0;$$

— отсутствие нагрузки на верхней торцовой поверхности

$$a \leqslant r \leqslant b, \quad z = H: \qquad \sigma_z = \tau_{rz} = 0;$$

$$r = b, \quad 0 \leqslant z \leqslant H: \qquad \sigma_r = \tau_{rz} = 0;$$

— механическое нагружение на внутренней торцовой поверхности

$$r = a, \quad 0 \leqslant z \leqslant H: \qquad \sigma_r = P_a;$$

Результаты расчётов приведены на рисунках 4.39–4.50 (см. стр. 158–163).

Радиальные напряжения σ_r малы по величине, за исключением зоны, прилегающей к нижнему торцу. На рисунках 4.45 и 4.47 приведены графики изменения σ_θ и σ_z по высоте цилиндра, из которых видно, что термоупругие напряжения, обусловленные расчётной зависимостью физико-механических свойств материала от температуры и ионизирующего излучения, достигают значительных абсолютных величин и являются растягивающими не только на внешней, но и на внутренней поверхностях цилиндра. Данное обстоятельство должно учитываться при проведении прочностных расчётов и назначении схемы армирования конструкции защиты. На рисунках 4.46 и 4.48 показано влияние неоднородности материала (учёт зависимостей коэффициентов Ламе от температуры) на величину напряжений σ_θ и σ_z. Из рисунков видно, что учёт неоднородности материала приводит к значительному снижению напряжений (до 25 %) σ_θ и σ_z на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

Влияние неоднородности материала в меньшей степени сказывается на напряжениях τ_{rz}, которые, аналогично радиальным напряжениям, незначительны по величине, за исключением зоны нижнего торца цилиндра.

На данном примере расчёта хорошо видно, что анализ влияния неоднородности материала должен носить комплексный характер с учётом всех возможных факторов.

По данному вопросу были опубликованы следующие труды [14, 17, 24, 25, 28].

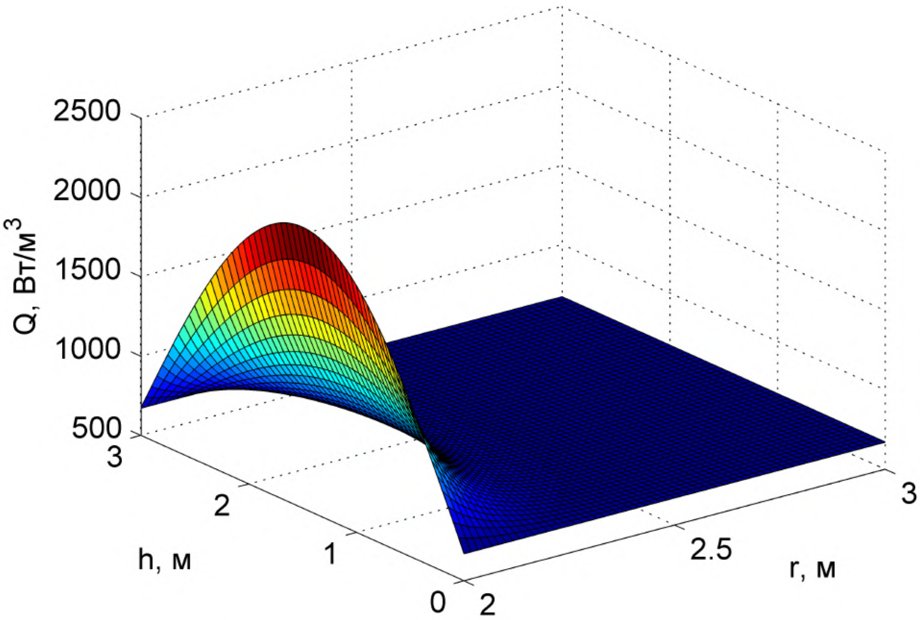


Рисунок 4.36 — Изменение внутренних источников теплоты в толще цилиндра

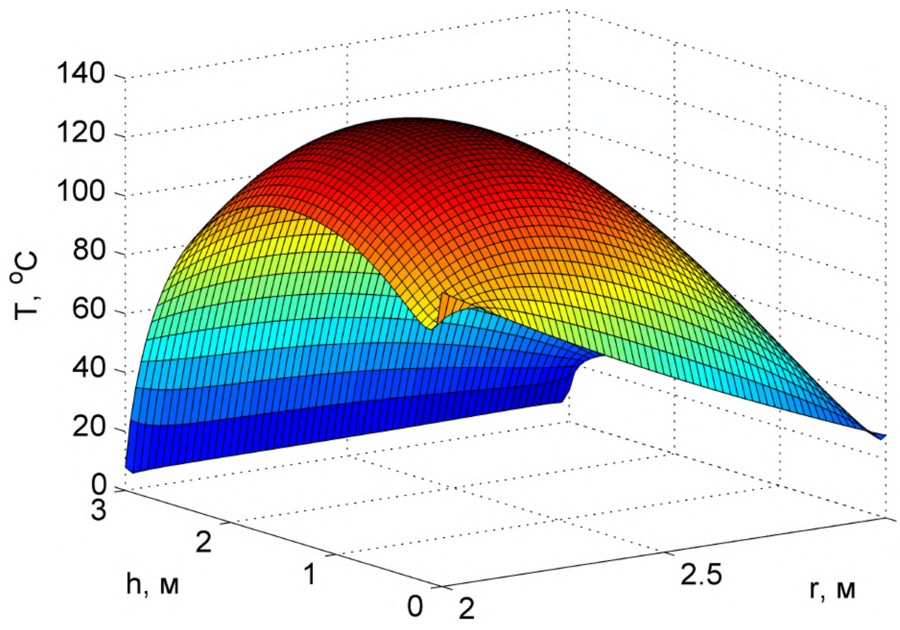


Рисунок 4.37 — Изменение температуры в толще цилиндра

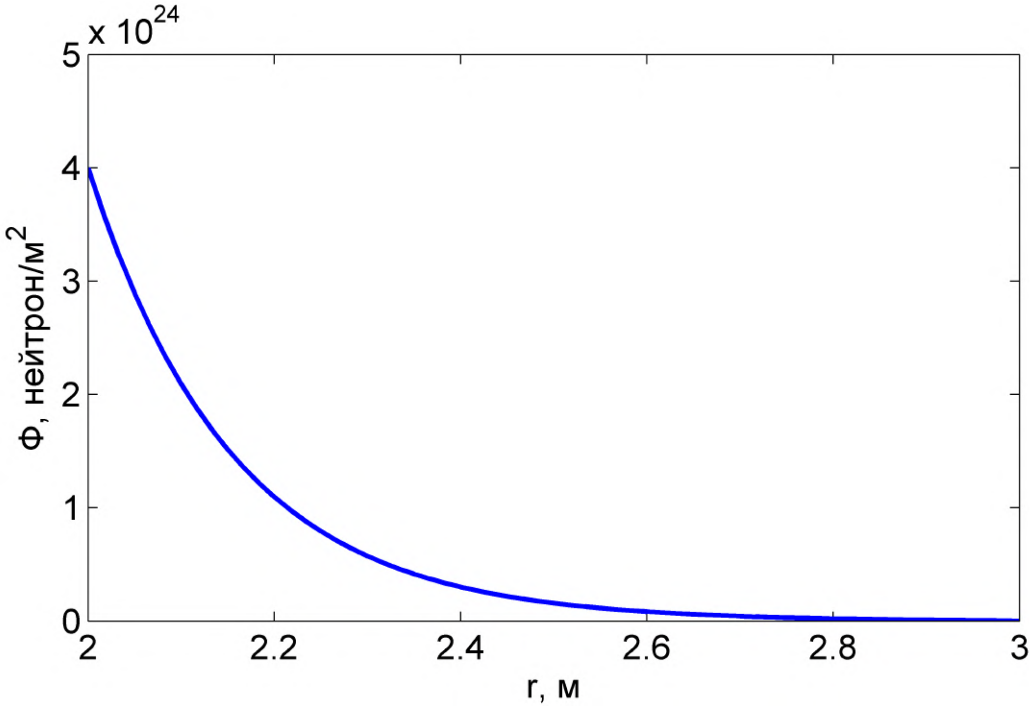


Рисунок 4.38 — Распределение флюенса нейтронов в толще цилиндра

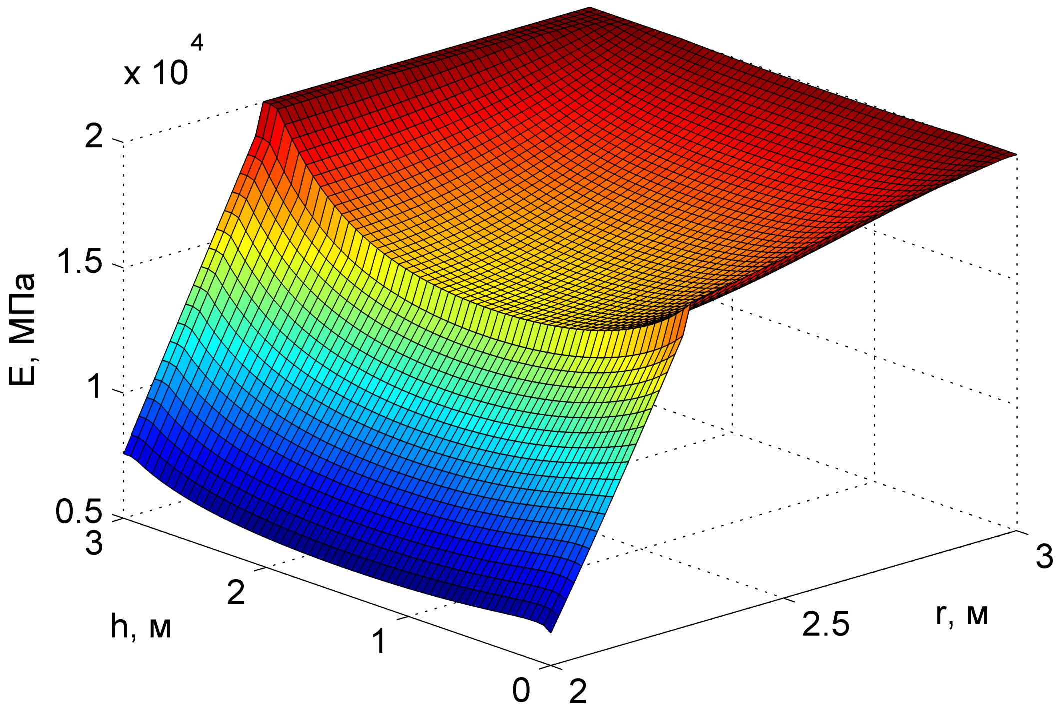


Рисунок 4.39 — Изменение модуля упругости в толще цилиндра

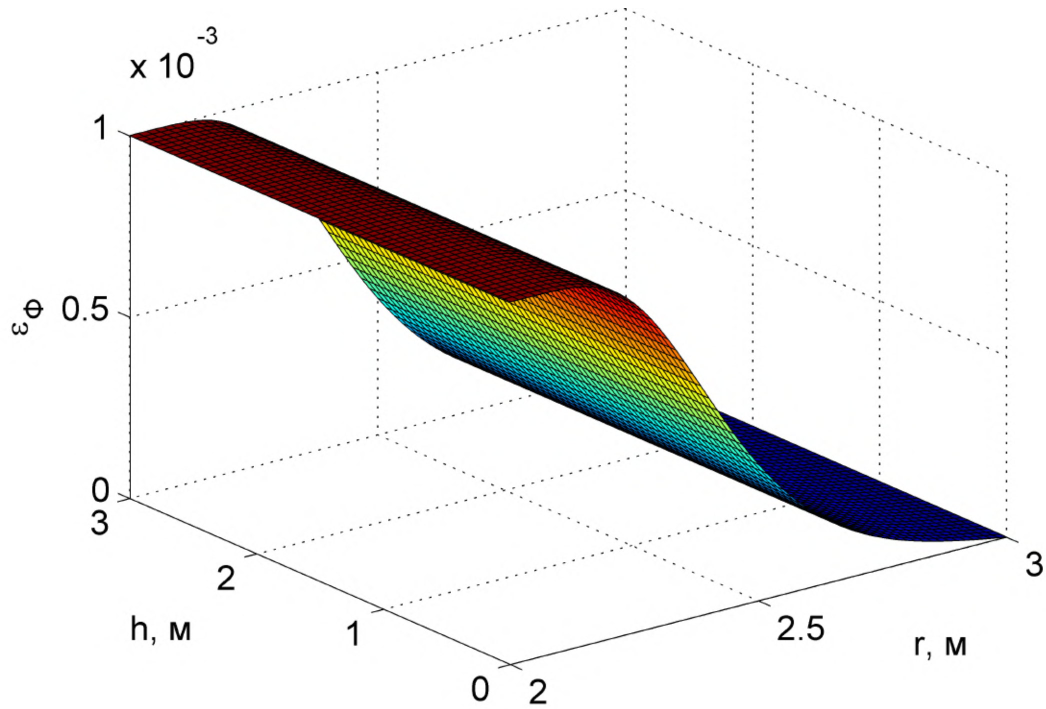


Рисунок 4.40 — Деформации ε_{Φ} в толще цилиндра, вызванные ионизирующим излучением

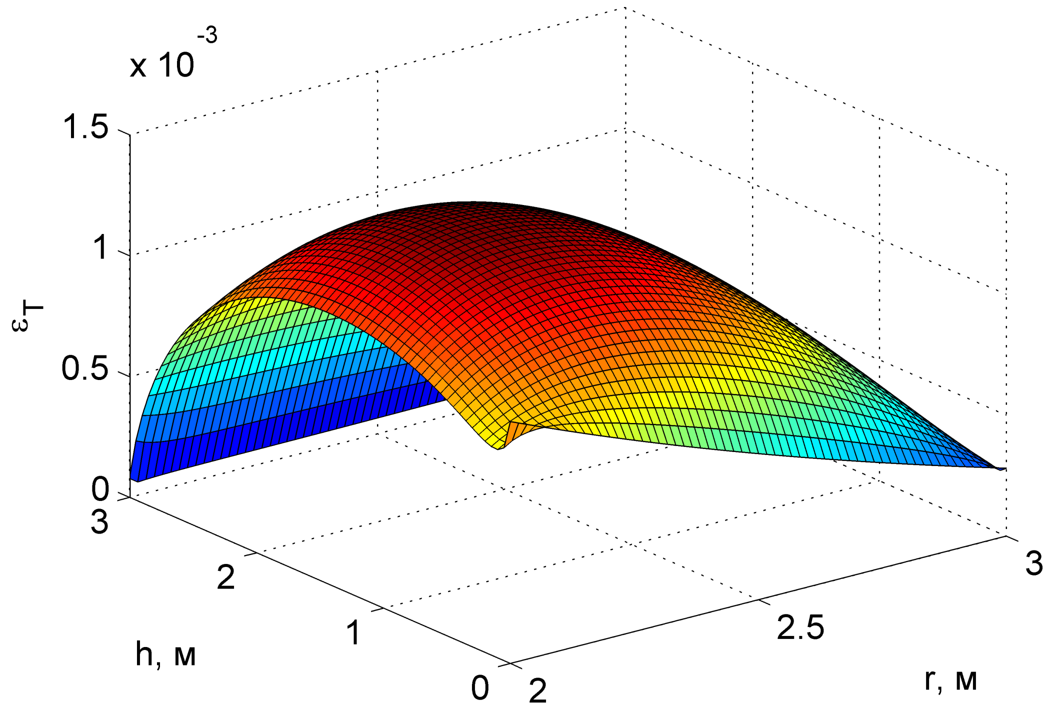


Рисунок 4.41 — Деформации ε_T в толще цилиндра, вызванные изменением температуры

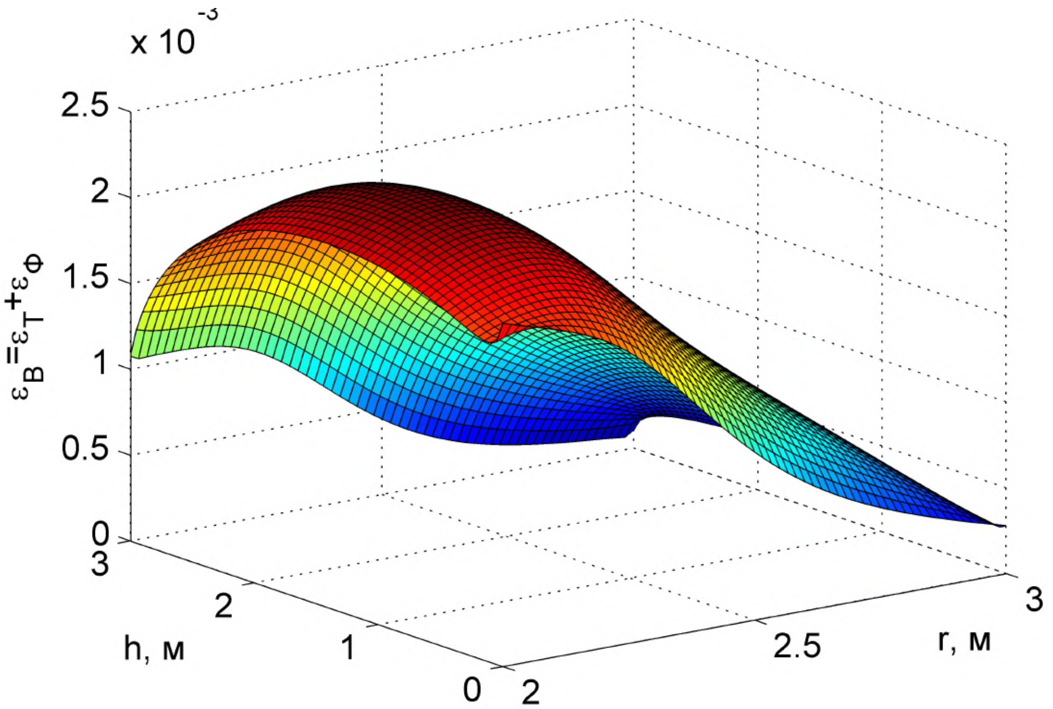


Рисунок 4.42 — Полные вынужденные деформации, $\varepsilon_{\text{в}} = \varepsilon_{\Phi} + \varepsilon_T$

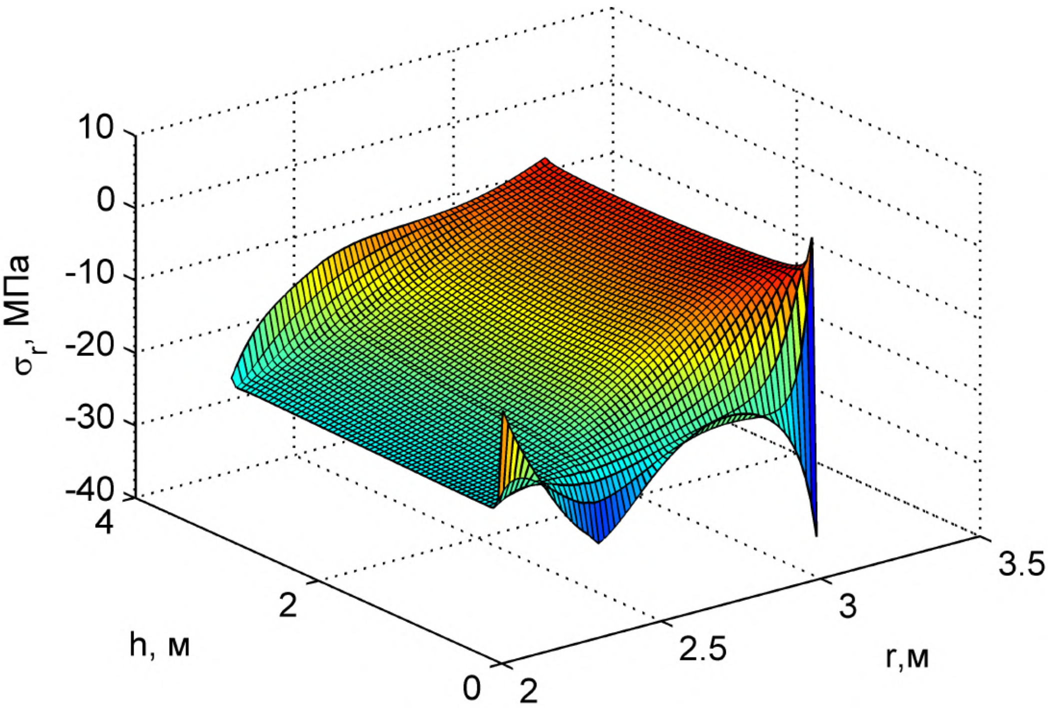


Рисунок 4.43 — Изменение радиального напряжения σ_r толще цилиндра в случае $E = f(r,z)$

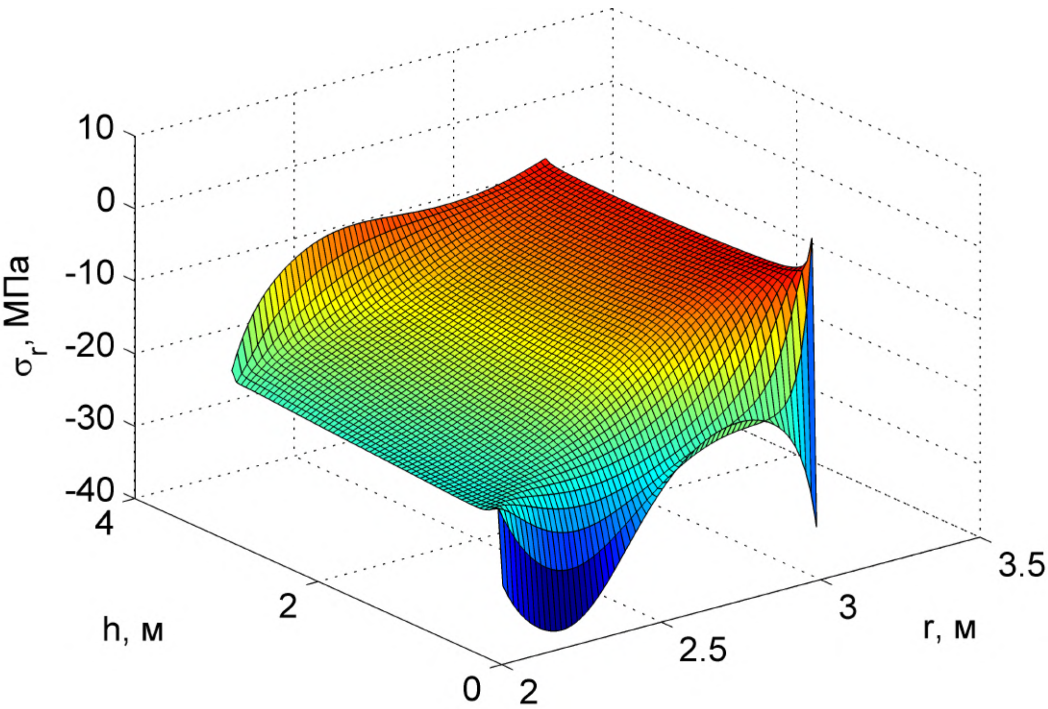


Рисунок 4.44 — Изменение радиального напряжения σ_r толще цилиндра в случае $E = const$

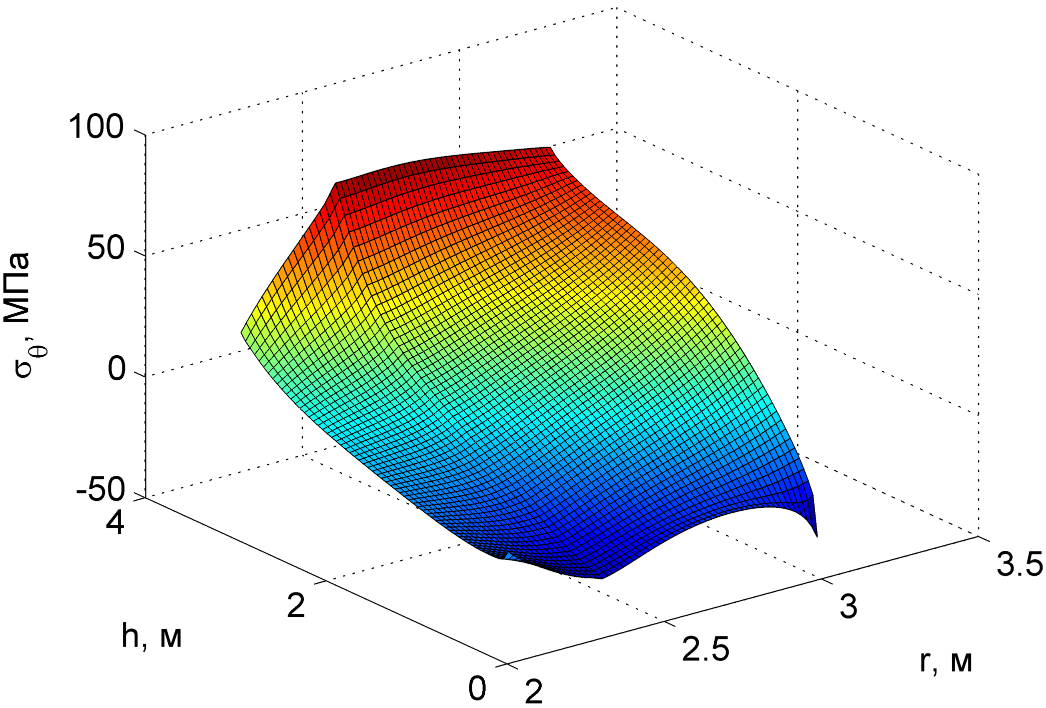


Рисунок 4.45 — Изменение окружного напряжения σ_θ толще цилиндра в случае $E = f(r,z)$

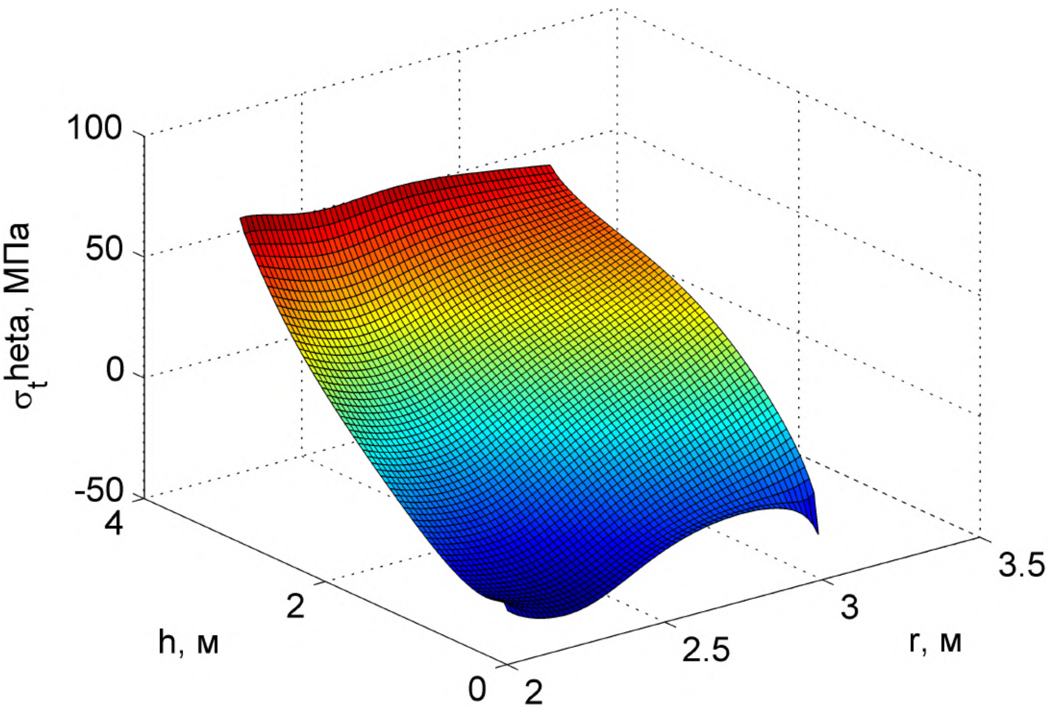


Рисунок 4.46 — Изменение окружного напряжения σ_θ толще цилиндра в случае $E = const$

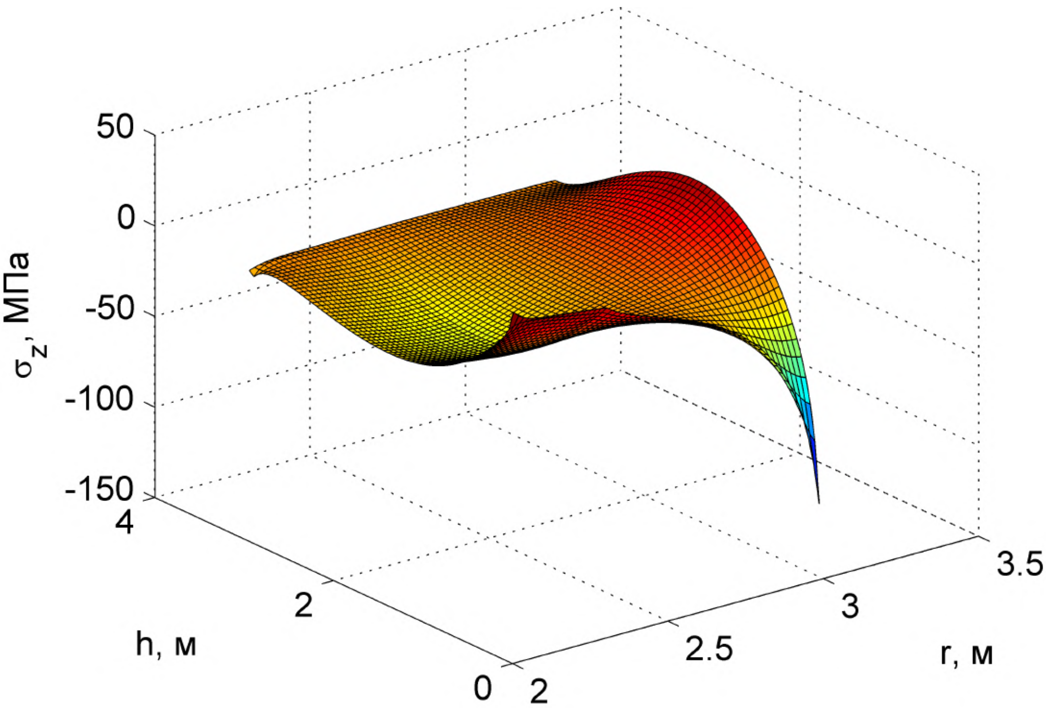


Рисунок 4.47 — Изменение осевого напряжения σ_z толще цилиндра в случае $E = f(r,z)$

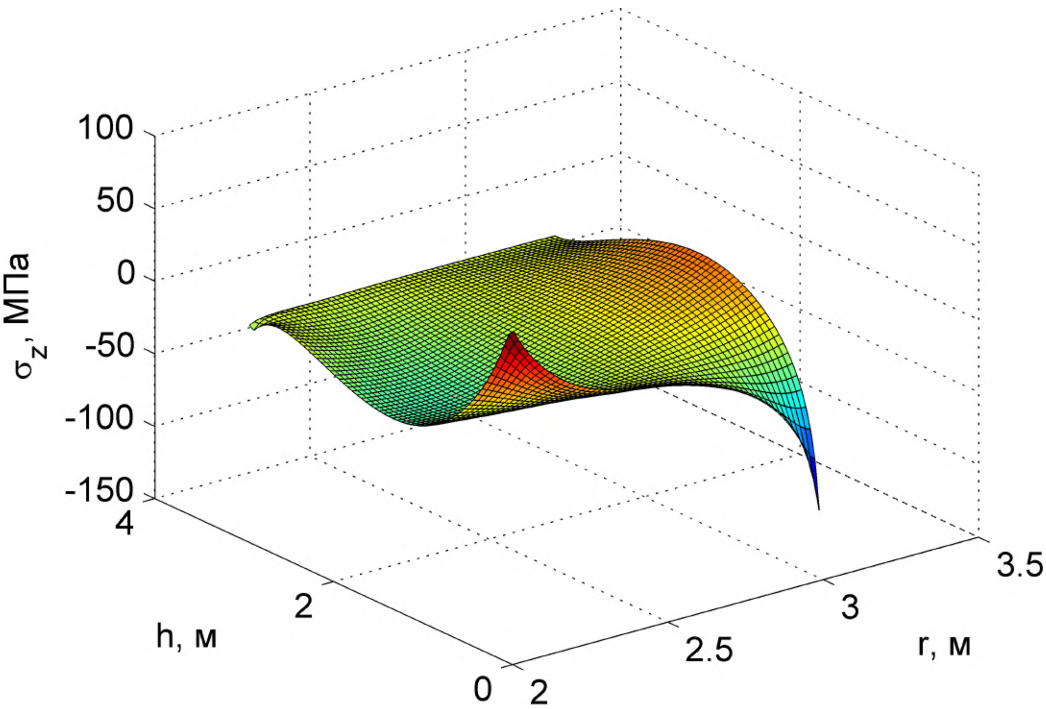


Рисунок 4.48 — Изменение осевого напряжения σ_z толще цилиндра в случае $E = const$

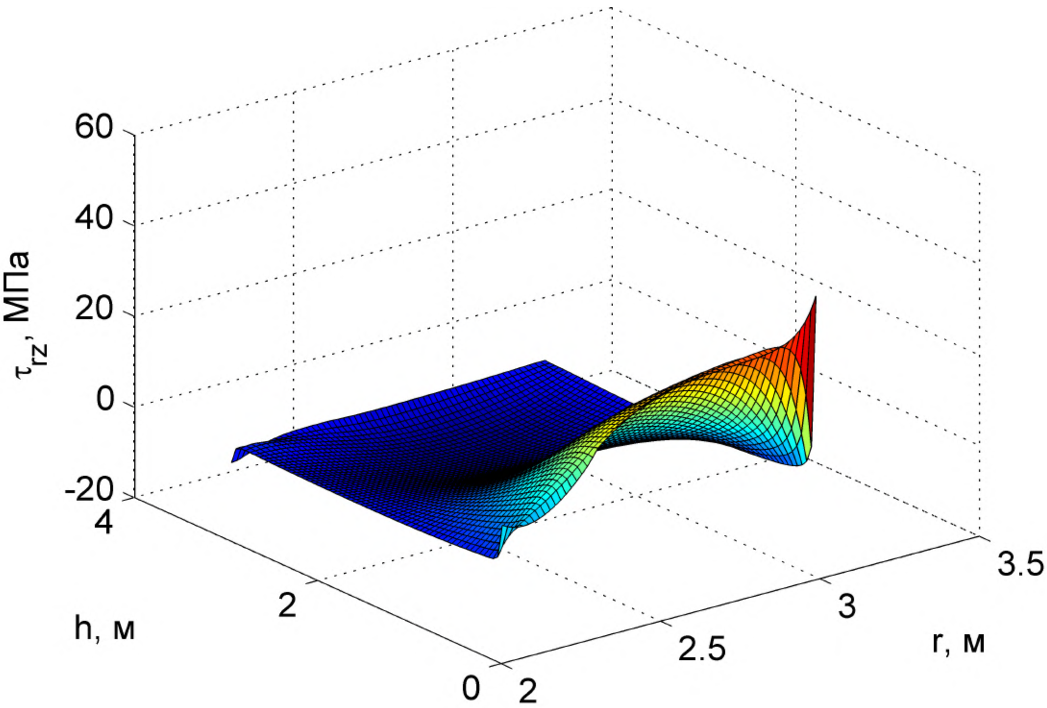


Рисунок 4.49 — Изменение касательного напряжения τ_{rz} толще цилиндра в случае $E = f(r, z)$

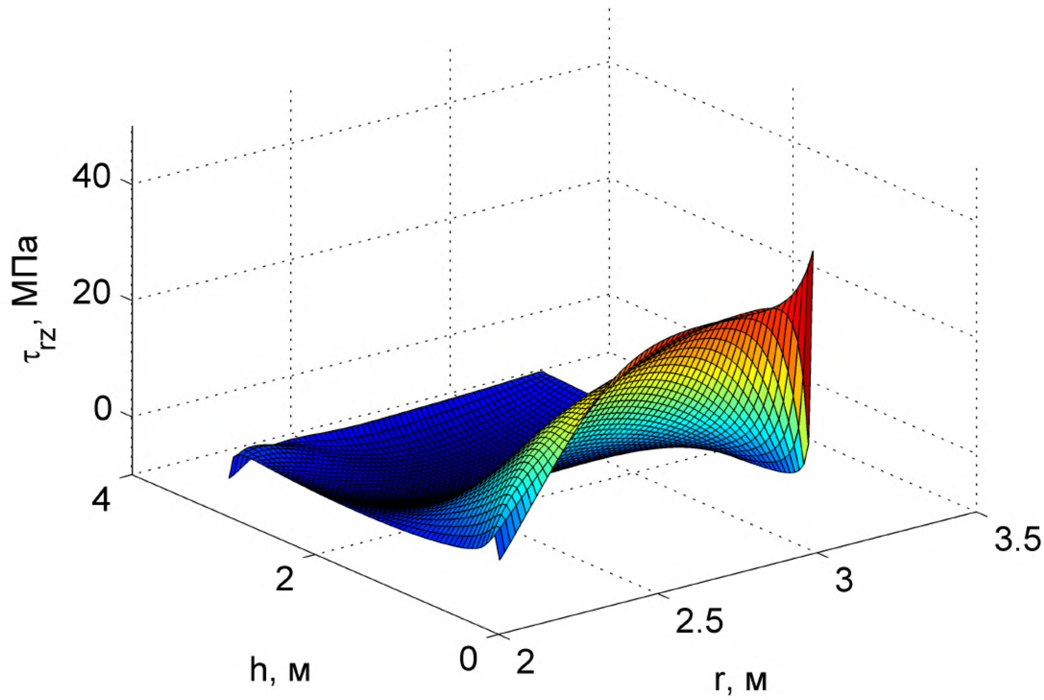


Рисунок 4.50 — Изменение касательного напряжения τ_{rz} толще цилиндра в случае $E = const$

4.6 Выводы по главе

1. Впервые получены зависимости физико-механических параметров полимера как функция от двух переменных на основании анализа и аппроксимации кривых его релаксации в различных условиях.

2. Представлено на основе решения тестовой задачи, что несмотря на значительное изменение свойств полимера различными модификаторами, напряжённо-деформированное состояние готового элемента конструкции меняется весьма незначительно (напряжённое состояние изменяется в пределах 10 %). В результате чего судить об эксплуатационных параметрах полимера или улучшении его показателей практического применения без моделирования работы конкретной конструкции нельзя.

3. Доказано, что полноценно о напряжённо-деформированном состоянии полимерной конструкции в процессе реологических явлений возможно судить только по главным напряжениям. То же относится и к прогнозированию прочности изделий из полимерных материалов.

4. На базе вариационно-разностного метода, разработаны методика решения, алгоритм численной реализации и программы расчета на ЭВМ осесимметричной задачи теплопроводности, термоупругости и распределения радиационного поля конечного цилиндра с учётом зависимости теплофизических характеристик материала от ионизирующего излучения и температуры. Для решения поставленных задач, разработаны методика решения, алгоритм численной реализации и программы расчёта на ЭВМ (программный комплекс MatLab) трёхмерной пространственной задачи для радиально-неоднородного цилиндра в осесимметричной постановке. Решение осуществляется двумя методами: вариационно-разностным методом (ВРМ) и методом конечных элементов (МКЭ), что позволяет сравнить полученные результаты. Результаты расчета с помощью МКЭ и ВРМ совпали между собой с погрешностью менее 1 %.

Глава 5. Задачи термовязкоупругости в осесимметричной двумерной постановке

5.1 Разрешающие соотношения в осесимметричной двумерной постановке

Рассмотрим цилиндр (рисунок 5.1), внутренний радиус которого R_a, внешний – R_b, имеющий конечную длину l. Граничные условия, вследствие их большой вариации, будут приведены далее в процессе выкладки разрешающих уравнений.

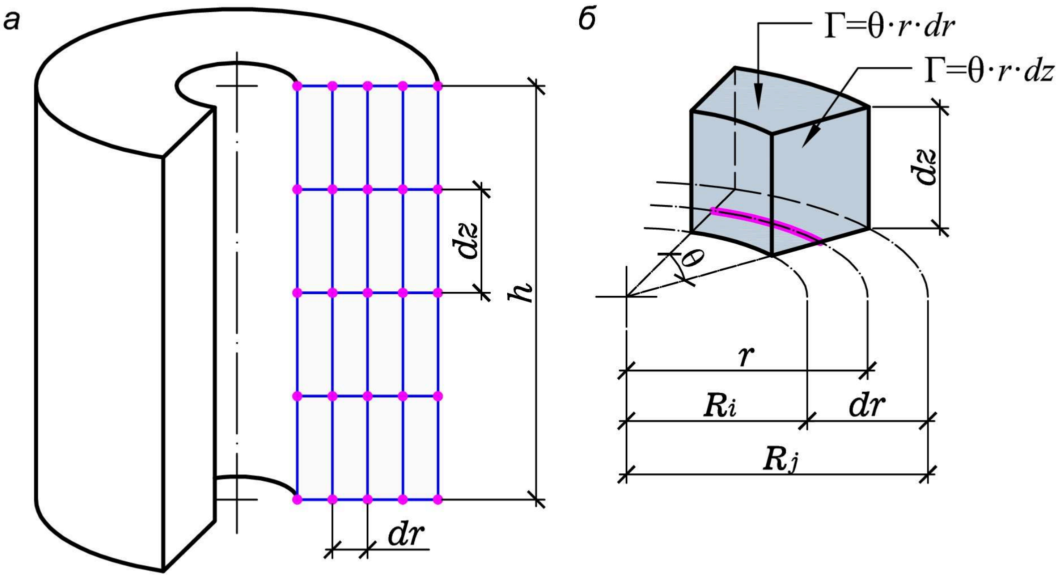


Рисунок 5.1 — Исходная схема двумерной осесимметричной задачи: *а* – исходный цилиндр; *б* – конечный прямоугольный элемент

В случае двумерных задач конечный элемент может быть представлен в виде четырёхугольника или, наиболее часто используемый вариант, треугольника. Далее при рассмотрении сечения цилиндра будем изучать *прямоугольный плоский* конечный элемент как наиболее удобный для данного класса осесимметричных задач.

5.1.1 Получение аппроксимирующей функции формы прямоугольного конечного элемента

Интерполяционный полином запишем в виде выражения (рисунок 5.2):

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy. \tag{5.1}$$

Необходимо отметить, что так как рассматривается прямоугольный элемент, то для дальнейших выкладок можно сделать некоторые упрощения: $X_l = X_i$; $X_j = X_k$; $Y_j = Y_i$; $Y_l = Y_k$.

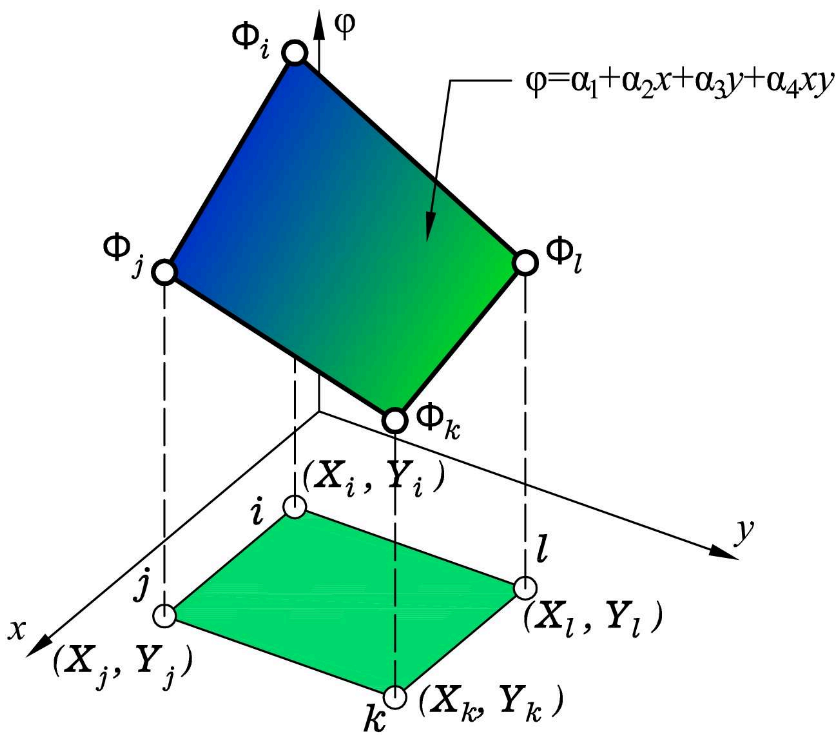


Рисунок 5.2 — Двумерный прямоугольный конечный элемент

Тогда условия в узлах записываются:

$$\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i, \quad y = Y_i;$$
$$\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_k, \quad y = Y_i;$$
$$\varphi = \Phi_k \quad \text{при} \quad x = X_k, \quad y = Y_k.$$
$$\varphi = \Phi_l \quad \text{при} \quad x = X_i, \quad y = Y_k.$$

Тогда интерполяционный полином в матричном представлении имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & X_iY_i \\ 1 & X_k & Y_i & X_kY_i \\ 1 & X_k & Y_k & X_kY_k \\ 1 & X_i & Y_k & X_iY_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}.$$

Для упрощения представления в дальнейшем результатов можно ввести замену:

$$A = (X_k - X_i)(Z_k - Z_i), \tag{5.2}$$

где A — фактически площадь прямоугольной грани конечного элемента.

Тогда коэффициенты полинома (5.1) определяем так:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} X_k Y_k & -X_i Y_k & X_i Y_i & -X_k Y_i \\ -Y_k & Y_k & -Y_i & Y_i \\ -X_k & X_i & -X_i & X_k \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}.$$

Далее значения коэффициентов подставляем в выражение исходного полинома (5.1) и приводим его виду

$$\varphi = \begin{Bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}, \tag{5.3}$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{A}\left(X_k Y_k - Y_k x - X_k y + xy\right); \\ N_j &= \frac{1}{A}\left(-X_i Y_k + Y_k x + X_i y - xy\right); \\ N_k &= \frac{1}{A}\left(X_i Y_i - Y_i x - X_i y + xy\right); \\ N_l &= \frac{1}{A}\left(-X_k Y_i + Y_i x + X_k y - xy\right). \end{aligned}$$

При минимизации выражения (5.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_k & \Phi_l \end{Bmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{A} \begin{Bmatrix} -Y_k + y & Y_k - y & -Y_i + y & Y_i - y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_k & \Phi_l \end{Bmatrix}^T; \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_k & \Phi_l \end{Bmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{A} \cdot \begin{Bmatrix} -X_k + x & X_i - x & -X_i + x & X_k - x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_k & \Phi_l \end{Bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{5.5}$$

В случае осесимметричной задачи функция формы (5.3) и соответствующие её производные (5.4) и (5.5) принимают вид:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}, \tag{5.6}$$

где

$$N_i = \frac{1}{A}\left(R_k Z_k - Z_k r - R_k z + rz\right);$$
$$N_j = \frac{1}{A}\left(-R_i Z_k + Z_k r + R_i z - rz\right);$$
$$N_k = \frac{1}{A}\left(R_i Z_i - Z_i r - R_i z + rz\right);$$
$$N_l = \frac{1}{A}\left(-R_k Z_i + Z_i r + R_k z - rz\right);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad \frac{\partial N_j}{\partial r} \quad \frac{\partial N_k}{\partial r} \quad \frac{\partial N_l}{\partial r} \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T = \\ = \frac{1}{A}\left\{ -Z_k + z \quad Z_k - z \quad -Z_i + z \quad Z_i - z \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T; \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad \frac{\partial N_j}{\partial z} \quad \frac{\partial N_k}{\partial z} \quad \frac{\partial N_l}{\partial z} \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T = \\ = \frac{1}{A}\left\{ -R_k + r \quad R_i - r \quad -R_i + r \quad R_k - r \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T. \quad (5.8)$$

5.1.2 Определение температурного поля

Для определения температурного поля используем уравнение теплопроводности Фурье (1.10), которое во времени будем аппроксимировать согласно методике, приведённой в параграфе (3.2.2.1) (см. стр. 78). Тогда уравнение Фурье можно записать в виде:

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) = q_T - \frac{\rho c}{h_t}\left(T_\rho - T_{\rho-1}\right), \quad (5.9)$$

где h_t — интервал времени между исследуемым моментом и предыдущим; T_ρ и $T_{\rho-1}$ — температуры в узле элемента соответственно в текущий момент времени и в предыдущий.

Для возможности нахождения функционала с помощью выражения (1.16), уравнение (5.9) приводим к виду (1.12):

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) + \frac{\rho c}{h_t} T = f, \quad (5.10)$$

где $f = q_T + \frac{\rho c}{h_t} T_{\rho-1}$.

С учётом (1.16), функционал уравнения (5.10) запишем:

$$\operatorname{Im}(T) = \int\limits_V \left[\lambda\left(\operatorname{grad} T\right)^2 + \frac{\rho c}{h_t} T^2\right] \mathrm{d}V + \int\limits_{\Gamma 3} \alpha T^2 \,\mathrm{d}\Gamma - 2\int\limits_{\Gamma 3} \alpha T_0 T \,\mathrm{d}\Gamma + 2\int\limits_{\Gamma 2} QT \,\mathrm{d}\Gamma - 2\int\limits_V fT \,\mathrm{d}V. \quad (5.11)$$

С учётом выражений, приведённых в приложении А.1:

$$\operatorname{grad} T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2}.$$

Температуру и её градиент по элементу определяют согласно выражениям (5.6)–(5.8):

$$T = \{N\}\{T\}; \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}\{T\}; \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\{T\}.$$

Тогда

$$T^2 = \{T\}^T\{N\}^T\{N\}\{T\}; \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)^2 = \{T\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}\{T\}.$$

Далее с учётом правил минимизации (А.6) и (А.7) производим минимизацию функционала по температуре:

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(T)}{\{T\}} = 0 = \underbrace{2\int\limits_V \lambda \left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}^T \left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}\{T\}\,\mathrm{d}V}_{S^{\mathrm{I}}} + \underbrace{2\int\limits_V \lambda \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\{T\}\,\mathrm{d}V}_{S^{\mathrm{II}}} + \underbrace{2\int\limits_V \frac{\rho c}{h_t}\{N\}^T\{N\}\{T\}\,\mathrm{d}V}_{S^{\mathrm{III}}} + \underbrace{2\int\limits_{\Gamma 3} \alpha\{N\}^T\{N\}\{T\}\,\mathrm{d}\Gamma}_{S^{\mathrm{IV}}} - \underbrace{2\int\limits_{\Gamma 3} \alpha T_0\{N\}^T\,\mathrm{d}\Gamma}_{S^{\mathrm{V}}} + \underbrace{2\int\limits_{\Gamma 2} Q\{N\}^T\,\mathrm{d}\Gamma}_{S^{\mathrm{VI}}} - \underbrace{2\int\limits_V f\{N\}^T\,\mathrm{d}V}_{S^{\mathrm{VII}}} \quad (5.12)$$

и выражение приводим к виду:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(T)} & k_{1,2}^{(T)} & k_{1,3}^{(T)} & k_{1,4}^{(T)} \\ k_{2,1}^{(T)} & k_{2,2}^{(T)} & k_{2,3}^{(T)} & k_{2,4}^{(T)} \\ k_{3,1}^{(T)} & k_{3,2}^{(T)} & k_{3,3}^{(T)} & k_{3,4}^{(T)} \\ k_{4,1}^{(T)} & k_{4,2}^{(T)} & k_{4,3}^{(T)} & k_{4,4}^{(T)} \end{bmatrix}}_{\left[k^{(T)}\right]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} T_i^{(T)} \\ T_j^{(T)} \\ T_k^{(T)} \\ T_l^{(T)} \end{Bmatrix}}_{\left\{T^{(T)}\right\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{(T)} \\ f_2^{(T)} \\ f_3^{(T)} \\ f_4^{(T)} \end{Bmatrix}}_{\left\{f^{(T)}\right\}}.$$

Для этого перегруппируем члены выражения (5.12) S^{I}–S^{VII} с последующим интегрированием их членов:

$$\left[k^{(T)}\right] = S^{\mathrm{I}} + S^{\mathrm{II}} + S^{\mathrm{III}} + S^{\mathrm{IV}}; \qquad \left\{f^{(T)}\right\} = -\left(S^{\mathrm{V}} + S^{\mathrm{VI}} + S^{\mathrm{VII}}\right).$$

После интегрирования слагаемые S^{I}–S^{VII} принимают вид:

слагаемое $S^{\mathbf{I}}$:

$$S^{\mathrm{I}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(\lambda\left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \frac{\lambda\,(R_k+R_i)\,(Z_k-Z_i)}{6\,(R_k-R_i)}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ & 2 & 1 & -1 \\ & & 2 & -2 \\ \text{сим.} & & & 2 \end{bmatrix};$$

слагаемое $S^{\mathbf{II}}$:

$$S^{\mathrm{II}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(\lambda\left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\lambda\,(R_k-R_i)}{6\,(Z_k-Z_i)}\begin{bmatrix} 3R_i+R_k & R_i+R_k & -(R_i+R_k) & -(3R_i+R_k) \\ & R_i+3R_k & -(R_i+3R_k) & -(R_i+R_k) \\ & & R_i+3R_k & R_i+R_k \\ \text{сим.} & & & 3R_i+R_k \end{bmatrix};$$

слагаемое $S^{\mathbf{III}}$:

$$S^{\mathrm{III}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(\frac{c\rho}{h_t}\{N\}^T\{N\}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{c\rho A}{36h_t}\begin{bmatrix} 2(3R_i+R_k) & 2(R_i+R_k) & R_i+R_k & 3R_i+R_k \\ & 2(R_i+3R_k) & R_i+3R_k & R_i+R_k \\ & & 2(R_i+3R_k) & 2(R_i+R_k) \\ \text{сим.} & & & 2(3R_i+R_k) \end{bmatrix};$$

Здесь и далее было дополнительно введено обозначение

$$A = (Ri - Rk)\times(Zi - Zk)$$

— площадь сечения конечного элемента в осях r и z.

слагаемое $S^{\mathbf{IV}}$ на вертикальных и горизонтальных гранях:

$$S_{\text{верт}}^{\text{IV}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k} r\alpha\{N\}^T\{N\}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{r\alpha\,(r-R_k)\,(Z_i-Z_k)}{3\,(R_i-R_k)^2}\begin{bmatrix} 2(R_k-r) & 2(r-R_i) & r-R_i & R_k-r \\ & -\dfrac{2(r-R_i)^2}{r-R_k} & -\dfrac{(r-R_i)^2}{r-R_k} & r-R_i \\ & & -\dfrac{2(r-R_i)^2}{r-R_k} & 2(r-R_i) \\ \text{сим.} & & & 2(R_k-r) \end{bmatrix};$$

$$S_{\text{гор}}^{\text{IV}} = 2\int\limits_{R_i}^{R_k} r\alpha\{N\}^T\{N\}\,\mathrm{d}r;$$

$$S_{\text{гор},(1,1)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_k)^2(3R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(1,2)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(2,1)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_k)^2(R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(1,3)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(3,1)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(4,2)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(2,4)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)\,(z-Z_i)(z-Z_k)\,(R_i+R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2};$$

$$S_{\text{гор},(1,4)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(4,1)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[\left((z-Z_i)(z-Z_k)(3R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(2,2)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_k)^2(R_i+3R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(2,3)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(3,2)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[\left((z-Z_i)(z-Z_k)(R_i+3R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(3,3)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_i)^2(R_i+3R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(3,4)}^{\text{IV}} = S_{\text{гор},(4,3)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_i)^2(R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S_{\text{гор},(4,4)}^{\text{IV}} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_i)^2(3R_i+R_k)\right)\right];$$

слагаемое $S^{\mathbf{V}}$ на вертикальных и горизонтальных гранях:

$$S_{\text{верт}}^{\text{V}} = -2\int\limits_{Z_i}^{Z_k} r\alpha T_0\{N\}^T\,\mathrm{d}z = -\frac{r\alpha T_0\,(Z_i-Z_k)}{(R_i-R_k)}\begin{bmatrix} R_k-r \\ r-R_i \\ r-R_i \\ R_k-r \end{bmatrix};$$

$$S^{\mathrm{V}}_{\text{гориз}} = -2\int\limits_{R_i}^{R_k} r\alpha T_0\{N\}^T\,\mathrm{d}r = \frac{\alpha T_0\,(R_i - R_k)}{3\,(Z_i - Z_k)}\begin{bmatrix}(z-Z_k)(2R_i+R_k)\\(z-Z_k)(R_i+2R_k)\\-(z-Z_i)(R_i+2R_k)\\-(z-Z_i)(2R_i+R_k)\end{bmatrix};$$

слагаемое $S^{\mathbf{VI}}$ на вертикальных и горизонтальных гранях:

$$S^{\mathrm{VI}}_{\text{верт}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k} rQ\{N\}^T\,\mathrm{d}z = \frac{rQ\,(Z_i - Z_k)}{(R_i - R_k)}\begin{bmatrix}R_k - r\\r - R_i\\r - R_i\\R_k - r\end{bmatrix};$$

$$S^{\mathrm{VI}}_{\text{гориз}} = 2\int\limits_{R_i}^{R_k} rQ\{N\}^T\,\mathrm{d}r = \frac{Q\,(R_i - R_k)}{3\,(Z_i - Z_k)}\begin{bmatrix}-(z-Z_k)(2R_i+R_k)\\-(z-Z_k)(R_i+2R_k)\\(z-Z_i)(R_i+2R_k)\\(z-Z_i)(2R_i+R_k)\end{bmatrix};$$

слагаемое $S^{\mathbf{VII}}$, где $\beta = \dfrac{\rho c}{h_t}$:

$$S^{\mathrm{VII}} = -2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(q_T + \frac{c\rho}{h_t}\{T_{\rho-1}\}\right)\{N\}^T\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z;$$

$$S^{\mathrm{VII}}_1 = -\frac{A}{36}\big[6R_i(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + 2R_i(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + \\ + R_i(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + 2R_k(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + 3R_i(q_l+\beta T_{\rho-1,l}) + \\ + 2R_k(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + R_k(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + R_k(q_l+\beta T_{\rho-1,l})\big];$$

$$S^{\mathrm{VII}}_2 = -\frac{A}{36}\big[2R_i(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + 2R_i(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + \\ + R_i(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + 2R_k(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + R_i(q_l+\beta T_{\rho-1,l}) + \\ + 6R_k(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + 3R_k(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + R_k(q_l+\beta T_{\rho-1,l})\big];$$

$$S^{\mathrm{VII}}_3 = -\frac{A}{36}\big[R_i(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + R_i(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + \\ + 2R_i(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + R_k(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + 2R_i(q_l+\beta T_{\rho-1,l}) + \\ + 3R_k(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + 6R_k(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + 2R_k(q_l+\beta T_{\rho-1,l})\big];$$

$$S_4^{\mathrm{VII}} = -\frac{A}{36}\big[3R_i(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + R_i(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) +$$
$$+ 2R_i(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + R_k(q_i+\beta T_{\rho-1,i}) + 6R_i(q_l+\beta T_{\rho-1,l}) +$$
$$+ R_k(q_j+\beta T_{\rho-1,j}) + 2R_k(q_k+\beta T_{\rho-1,k}) + R_k(q_l+\beta T_{\rho-1,l})\big].$$

5.1.3 Определение напряжённо-деформированного состояния

При решении двумерной осесимметричной задачи из шести компонент деформаций (закон Гука в прямой форме (1.4), с. 21) остаётся четыре: ε_r, ε_θ, ε_z и γ_{rz}. При этом, как говорилось ранее, в случае ПДС полная осевая деформация равна нулю:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_{rz}\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{el}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\end{Bmatrix}\varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}\\ \varepsilon_{cr,\theta}\\ \varepsilon_{cr,z}\\ \gamma_{cr,rz}\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}},$$

откуда можно выразить вектор напряжений:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_{rz}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\end{Bmatrix}\varepsilon_T - \begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}\\ \varepsilon_{cr,\theta}\\ \varepsilon_{cr,z}\\ \gamma_{cr,rz}\end{Bmatrix}\right). \tag{5.13}$$

Окончательно, в результате ряда алгебраических операций, вектор напряжений определяем:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu}\end{bmatrix}\times$$
$$\times\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_{rz}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\end{Bmatrix}\varepsilon_T - \begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,r}\\ \varepsilon_{cr,\theta}\\ \varepsilon_{cr,z}\\ \gamma_{cr,rz}\end{Bmatrix}\right). \tag{5.14}$$

Введём замену

$$[D] = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu}\end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

тогда выражение (5.14) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,r} \\ \varepsilon_{cr,\theta} \\ \varepsilon_{cr,z} \\ \gamma_{cr,rz} \end{Bmatrix} \right). \tag{5.16}$$

Выражение (5.16) приводим к виду:

$$\{\sigma\} = [D] \left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\} \right).$$

Окончательно выражение (5.16) принимает вид:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = [D] \cdot \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,r} \\ \varepsilon_{cr,\theta} \\ \varepsilon_{cr,z} \\ \gamma_{cr,rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}} \right). \tag{5.17}$$

Полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела П и работой внешних сил A_W:

$$Э = \Pi - A_W,$$

где энергия упругой деформации тела записывается:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,z} + \tau_{rz} \varepsilon_{el,rz} \right) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma \right\}^T \cdot \left\{ \varepsilon_{el} \right\} \mathrm{d}V, \tag{5.18}$$

где $\{\sigma\} = [D] \left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\} \right)$; $\{\varepsilon_{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}$; $dV = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$.

Полная деформация $\{\varepsilon\}$ определяется через выражения Коши (1.1):

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ u/r \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}.$$

Аппроксимация перемещений u по элементы описывается выражением (1.19):

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_i & w_i & u_j & w_j & u_k & w_k & u_l & w_l \end{Bmatrix}^T,$$

следовательно, полная деформация определяется соотношениями (1.1):

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & \frac{N_j}{r} & 0 & \frac{N_k}{r} & 0 & \frac{N_l}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial r} & \frac{\partial N_l}{\partial z} & \frac{\partial N_l}{\partial r} \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_k \\ w_k \\ u_l \\ w_l \end{Bmatrix}}_{\{U\}}, \tag{5.19}$$

Минимизируя потенциальную энергию упругой деформации (5.18) по перемещениям $\{U\}$, получаем выражение:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \int\limits_V [B]^T [D][B]\{U\}\,\mathrm{d}V - \int\limits_V [B]^T [D]\{\varepsilon_T\}\,\mathrm{d}V - \int\limits_V [B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\}\,\mathrm{d}V = 0, \tag{5.20}$$

где объём конечного элемента $dV = r\,dr\,dz$.

Следующим шагом выражение (5.20) приводим к виду:

$$[K]\{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ — глобальные матрица жёсткости; $\{U\}$ — глобальный вектор нагрузки, которые определяются соотношениями

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} [k^{(e)}]; \qquad \{F\} = \sum_{e=1}^{E} \{f^{(e)}\}.$$

Здесь

$$\left[k^{(e)}\right] = \int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r[B]^T [D][B]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z;$$

$$\{f^{(e)}\} = \int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r[B]^T [D]\{\varepsilon_T\}\,dr\,dz + \int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r[B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z.$$

В результате интегрирования матрица $\left[k^{(e)}\right]$ и вектор $\{f^{(e)}\}$ имеют структуру:

$$\left[k^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} & k_{17}^{(e)} & k_{18}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} & k_{27}^{(e)} & k_{28}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} & k_{37}^{(e)} & k_{38}^{(e)} \\ k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} & k_{47}^{(e)} & k_{48}^{(e)} \\ k_{51}^{(e)} & k_{52}^{(e)} & k_{53}^{(e)} & k_{54}^{(e)} & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} & k_{57}^{(e)} & k_{58}^{(e)} \\ k_{61}^{(e)} & k_{62}^{(e)} & k_{63}^{(e)} & k_{64}^{(e)} & k_{65}^{(e)} & k_{66}^{(e)} & k_{67}^{(e)} & k_{68}^{(e)} \\ k_{71}^{(e)} & k_{72}^{(e)} & k_{73}^{(e)} & k_{74}^{(e)} & k_{75}^{(e)} & k_{76}^{(e)} & k_{77}^{(e)} & k_{78}^{(e)} \\ k_{81}^{(e)} & k_{82}^{(e)} & k_{83}^{(e)} & k_{84}^{(e)} & k_{85}^{(e)} & k_{86}^{(e)} & k_{87}^{(e)} & k_{88}^{(e)} \end{bmatrix}; \tag{5.21}$$

$$\left\{f^{(e)}\right\} = \left\{f_1^{(e)} \quad f_2^{(e)} \quad f_3^{(e)} \quad f_4^{(e)} \quad f_5^{(e)} \quad f_6^{(e)} \quad f_7^{(e)} \quad f_8^{(e)}\right\}^T. \tag{5.22}$$

При этом значения коэффициентов уравнения (5.21) симметричны относительно главной диагонали, т. е.

$$k_{ij}^{(e)} = k_{ji}^{(e)} \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

или в полном виде

$$\left[k^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} & k_{17}^{(e)} & k_{18}^{(e)} \\ & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} & k_{27}^{(e)} & k_{28}^{(e)} \\ & & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} & k_{37}^{(e)} & k_{38}^{(e)} \\ & & & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} & k_{47}^{(e)} & k_{48}^{(e)} \\ & & & & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} & k_{57}^{(e)} & k_{58}^{(e)} \\ & & \text{сим.} & & & k_{66}^{(e)} & k_{67}^{(e)} & k_{68}^{(e)} \\ & & & & & & & k_{78}^{(e)} \\ & & & & & & & \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Значения членов матрицы $\left[k^{(e)}\right]$ и вектора $\{f^{(e)}\}$ приведены в приложении А.3, на с. 260.

5.1.4 Проверка достоверности полученного решения

Оценка достоверности полученного аналитического решения может быть проведена с соответствующим численным решением. Однако в этом случае произведём повышение точности 4-точечного шаблона, превратив его в 9-точечный с узлами i, j, k, l, m, n, o, p, q (рисунок 5.3). При этом узлы m, n, p, q расположены на серединах ребер конечного элемента, а узел o — на пересечении линий, соединяющих центры противоположных рёбер.

Использование многоточечного шаблона отличается от использования шаблона обычного симплекс-элемента тем, что в симплекс-элементе значение функции определяется в одной

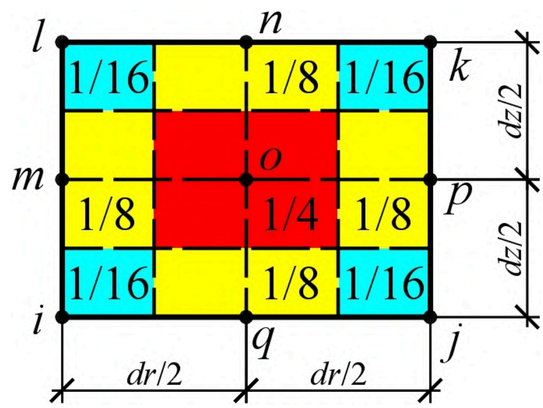


Рисунок 5.3 — 9-точечный уточнённый весовой шаблон

точке, как правило, в центре тяжести сечения, т. е. $f = [N]\{\Phi\}$. В случае 9-точечного шаблона происходит суммирование значения функции, определённой в каждом узле со своим «весовым» коэффициентом.

Согласно [139] численно интеграл может быть определён по формуле трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i\left(y_{i-1}+y_i\right) \approx h\left(\frac{y_0+y_2}{2}+y_1\right), \tag{5.24}$$

где $h_i = h = X_1 - X_0 = X_2 - X_1$ — шаг между узлами. В девятиточечном шаблоне расстояние между узлами соответственно равно $\mathrm{d}r/2$ и $\mathrm{d}z/2$.

Определим «весовые» коэффициенты каждого узла девятиточечного шаблона, с учётом, что $\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \mathrm{d}A$:

$$\begin{aligned}
&\int f(r,z)\,\mathrm{d}A = \iint f(r,z)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \approx \\
&\approx \int\left[\frac{f_m(z)+f_o(z)}{2}\frac{\mathrm{d}r}{2}+\frac{f_o(z)+f_n(z)}{2}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right]\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}r\left[\frac{f_m(z)}{4}+\frac{2f_o(z)}{4}+\frac{f_n(z)}{4}\right]\mathrm{d}z \approx \\
&\approx \mathrm{d}r\left[\left(\frac{f_i+2f_m+f_l}{2}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{f_q+2f_o+f_p}{2}\right)\frac{2}{4}+\left(\frac{f_j+2f_n+f_l}{2}\right)\frac{1}{4}\right]\frac{\mathrm{d}z}{2} = \\
&= \mathrm{d}A\left(\frac{f_o}{4}+\frac{f_m}{8}+\frac{f_q}{8}+\frac{f_p}{8}+\frac{f_n}{8}+\frac{f_i}{16}+\frac{f_l}{16}+\frac{f_j}{16}+\frac{f_k}{16}\right).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Для оценки достоверности предложенной методики расчёта двумерной задачи произведём вычисление задачи, рассмотренной ранее в параграфе 3.3.3, на стр. 91 и параграфе 3.5, на стр. 102. Поскольку в указанных параграфах рассматривали задачи при плоском деформированном состоянии, то примем длину цилиндра двумерной задачи равной 1 м, по торцам раскрепив подвижными шарнирами в направлении оси z. В такой постановке результаты расчёта двумерной задачи должны совпасть с результатами решения задачи при плоском деформированном состоянии. Результаты расчёта приведены в таблицах 5.1–5.4, в которых: N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени.

Первоначально сравнивают решения задач при постоянном шаге разбиения по времени, полученные численно по 9-точечному шаблону, рассмотренному в настоящем параграфе, и полученном численно-аналитически по коэффициентам, подробно рассмотренным в параграфе 5.1.3 (таблица 5.1 и таблица 5.2). Результаты обоих решений хорошо согласуются как между собой, так и с решением при плоском деформированном состоянии. Однако численно-аналитическое решение более точное и позволяет получить решение даже при малом количестве интервалов при времени $N_t = 10$ шт. При этом матрица численного решения 9-точечного шаблона вырождается, и решение не может быть найдено.

Анализируя таблицы 5.1 и 5.2, делаем вывод, что результаты при уточнённом центре тяжести конечного элемента хоть и практически совпадают с результатами, когда центр тяжести конечного элемента принимается усреднённым по конечному элементу, но, тем не менее, ближе к результатам одномерных задач, что говорит о большей точности этой методики.

В таблицах 5.3 и 5.4 приводятся результаты решения задачи при помощи численно-аналитического решения при переменном шаге: логарифмическом (таблица 5.3) и по геометрической прогрессии (таблица 5.4). Наибольшую точность при этом имеет решение, при котором интервалы времени делятся по геометрической прогрессии при отношении величины последнего интервала к первому $k_g = 10^4$.

При этом во всех случаях видно, что увеличение количества интервалов по высоте цилиндра N_z никак не сказывается на точности полученного решения.

Таблица 5.1 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при *постоянном* шаге во времени, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	Фактор	Центр тяжести $i=1$	Центр тяжести $i=N_r$	Середина элемента $i=1$	Середина элемента $i=N_r$
21	11	20	σ_r	−0.4426	−0.0882	−0.4452	−0.0923
			σ_θ	−4.6964	5.0646	−4.7172	5.0531
51			σ_r	−0.1338	−0.0365	−0.1345	−0.0372
			σ_θ	−4.1800	5.1674	−4.1827	5.1654
101			σ_r	−0.0576	−0.0185	−0.0578	−0.0187
			σ_θ	−3.9816	5.2083	−3.9822	5.2078
21	11	50	σ_r	−0.4468	−0.0883	−0.4494	−0.0925
			σ_θ	−4.7812	5.0732	−4.8019	5.0618
51			σ_r	−0.1357	−0.0366	−0.1365	−0.0373
			σ_θ	−4.2675	5.1760	−4.2701	5.1740
101			σ_r	−0.0586	−0.0185	−0.0589	−0.0187
			σ_θ	−4.0698	5.2169	−4.0704	5.2164
21	11	100	σ_r	−0.4482	−0.0884	−0.4507	−0.0925
			σ_θ	−4.8079	5.0759	−4.8286	5.0646
51			σ_r	−0.1364	−0.0366	−0.1371	−0.037473
			σ_θ	−4.2953	5.1787	−4.2979	5.1767
101			σ_r	−0.0590	−0.0185	−0.0592	−0.0187
			σ_θ	−4.0980	5.2196	−4.0986	5.2191

Таблица 5.2 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при *постоянном* шаге во времени, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно-аналитически*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	Фактор	Центр тяжести $i=1$	Центр тяжести $i=N_r$	Середина элемента $i=1$	Середина элемента $i=N_r$
21	11	10	σ_r	−0.3052	−0.0884	−0.4003	−0.0926
			σ_θ	−4.4432	5.0378	−4.5346	5.0296
51			σ_r	−0.0999	−0.0365	−0.1185	−0.0372
			σ_θ	−3.7821	5.1410	−3.7976	5.1396
101			σ_r	−0.0383	−0.0184	−0.0443	−0.0186
			σ_θ	−2.9375	5.1791	−2.9400	5.1787
21	11	20	σ_r	−0.3138	−0.0887	−0.4083	−0.0929
			σ_θ	−4.6041	5.0574	−4.6951	5.0494
51			σ_r	−0.1089	−0.0366	−0.1273	−0.0374
			σ_θ	−4.1612	5.1662	−4.1780	5.1648
101			σ_r	−0.0510	−0.0185	−0.0559	−0.0187
			σ_θ	−3.9765	5.2080	−3.9809	5.2077
21	21	20	σ_r	−0.3138	−0.0887	−0.4083	−0.0929
			σ_θ	−4.6041	5.0574	−4.6951	5.0494
51			σ_r	−0.1089	−0.0366	−0.1273	−0.0374
			σ_θ	−4.1612	5.1662	−4.1780	5.1648
101			σ_r	−0.0510	−0.0185	−0.0559	−0.0187
			σ_θ	−3.9765	5.2080	−3.9809	5.2077
21	11	50	σ_r	−0.3184	−0.0889	−0.4127	−0.0931
			σ_θ	−4.6890	5.0660	−4.7798	5.0580
51			σ_r	−0.1109	−0.0367	−0.1293	−0.0374
			σ_θ	−4.2486	5.1747	−4.2654	5.1733
101			σ_r	−0.0520	−0.0186	−0.0570	−0.0187
			σ_θ	−4.0647	5.2163	−4.0691	5.2162
21	11	100	σ_r	−0.3198	−0.0889	−0.4141	−0.0931
			σ_θ	−4.7158	5.0688	−4.7158	5.0608
51			σ_r	−0.1116	−0.0367	−0.1300	−0.0374
			σ_θ	−4.2764	5.1774	−4.2932	5.1761
101			σ_r	−0.0524	−0.0186	−0.0573	−0.0188
			σ_θ	−4.0929	5.2193	−4.0973	5.2189

Таблица 5.3 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при *логарифмическом* шаге во времени, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно-аналитически*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	σ_r, МПа $i=1$	σ_r, МПа $i=N_r$	σ_θ, МПа $i=1$	σ_θ, МПа $i=N_r$
21	11	7	−0.2778	−0.0864	−3.9306	+4.9251
51			+0.0613	−0.0354	+2.9673	+4.9856
101			+9.2304	−0.0086	+754.65	+2.4098
21	11	10	−0.2963	−0.0875	−4.2788	+4.9883
51			−0.1010	−0.0361	−3.8268	+5.0958
101			−0.0468	−0.0183	−3.6357	+5.1374
21	11	20	−0.3116	−0.0884	−4.5640	+5.0386
51			−0.1079	−0.0365	−4.1209	+5.1471
101			−0.0505	−0.0185	−3.9359	+5.1889
21	21	20	−0.3116	−0.0884	−4.5640	+5.0386
51			−0.1079	−0.0365	−4.1209	+5.1471
101			−0.0505	−0.0185	−3.9359	+5.1889
21	11	50	−0.3173	−0.0887	−4.6688	+5.0584
51			−0.1104	−0.0366	−4.2282	+5.1669
101			−0.0518	−0.0185	−4.0441	+5.2087
21	11	100	−0.3193	−0.0888	−4.7062	+5.0651
51			−0.1113	−0.0367	−4.2667	+5.1737
101			−0.0523	−0.0186	−4.0831	+5.2155

Таблица 5.4 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при шаге во времени *по геометрической прогрессии*, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно-аналитически*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	σ_r, МПа $i=1$	σ_r, МПа $i=N_r$	σ_θ, МПа $i=1$	σ_θ, МПа $i=N_r$
			$k_g = 10^2$			
21	11	7	+0.3355	−0.0675	+7.0244	+3.8314
51			+0.1263	−0.0280	+5.0478	+3.9396
101			−0.7818	−0.0148	−64.555	+4.1528
21	11	10	+9.9247	−0.1578	+175.04	+9.0654
51			+6.1868	−0.0800	+257.68	+11.327
101			+3.6604	−0.0415	+298.97	+11.690
21	11	20	−0.2994	−0.0874	−4.3406	+4.9806
51	(21)		−0.1025	−0.0361	−3.8927	+5.0886
101			−0.0477	−0.0183	−3.7060	+5.1302
21	11	50	−0.3128	−0.0884	−4.5873	+5.0383
51			−0.1085	−0.0365	−4.1451	+5.1466
101			−0.0508	−0.0185	−3.9604	+5.1884
21	11	100	−0.3170	−0.0887	−4.6646	+5.0551
51			−0.1103	−0.0366	−4.2241	+5.1637
101			−0.0517	−0.0185	−4.0401	+5.2054
			$k_g = 10^4$			
21	11	7	+1.7872	−0.0815	+33.689	+4.6391
51			+1.4867	−0.0330	+63.008	+4.6446
101			+0.9397	−0.0166	+77.317	+4.6696
21	11	10	+27.353	+0.1377	+498.93	−8.0629
51			+19.668	+0.0657	+828.11	−9.3675
101			+11.883	+0.0339	+975.16	−9.5731
21	11	20	−0.0552	−0.0816	+0.0719	+4.6452
51	(21)		+0.0699	−0.0338	+3.3457	+4.7668
101			+0.0563	−0.0171	+4.8182	+4.8071
21	11	50	−0.3034	−0.0877	−4.4130	+4.9988
51			−0.1041	−0.0362	−3.9585	+5.1065
101			−0.0483	−0.0183	−3.7614	+5.1481
21	11	100	−0.3129	−0.0884	−4.5886	+5.0382
51			−0.1085	−0.0365	−4.1464	+5.1464
101			−0.0508	−0.0185	−3.9617	+5.1883

5.2 Определение напряжённо–деформированного состояния полимерного цилиндра, находящимся под воздействием переменного температурного поля

5.2.1 Постановка задачи

Рассматривается выход полимерного цилиндра из сушильного аппарата. Материал изделия — эпоксидная смола термического отверждения ЭДТ-10, термические и физико-механические параметры материла приведены в параграфе 3.3.3.

Подобные задачи уже были рассмотрены в трудах [13, 160, 161], однако в них граничные условия задавались в виде некоторой функции, без учёта теплового обмена с окружающей средой.

Расчётная модель представлена на рисунке 5.4. Рассматривается три этапа:

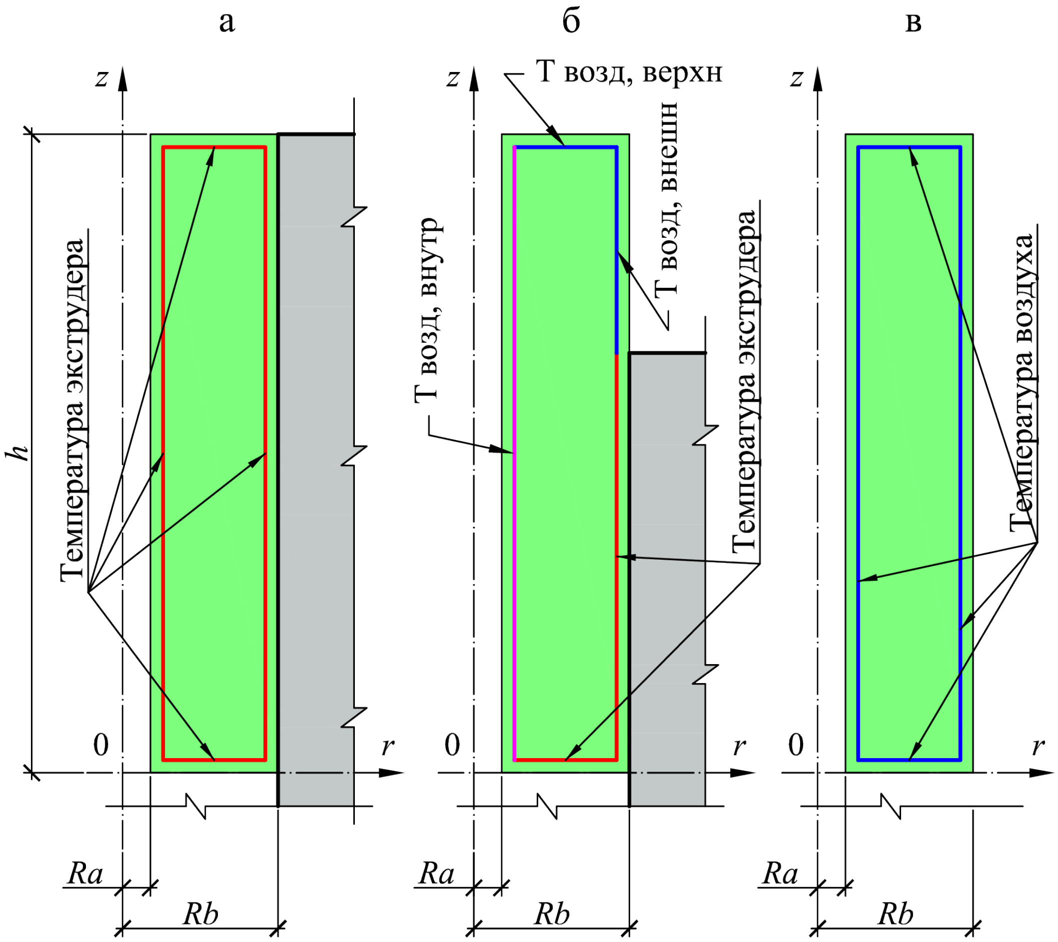


Рисунок 5.4 — Расчётная модели вытяжки полимерного цилиндра (зелёный цвет) из экструдера (серый цвет): *а* – исходный первоначальный момент времени; *б* – момент времени в пределах времени вытяжки цилиндра; *в* – вытяжка завершена — полный контакт с окружающей средой

1. Начальный момент времени (рисунок 5.4, а). Образец находится в экструдере и принимается, что вся его температура равна температуре самого экструдера.

2. Вытяжка цилиндра (рисунок 5.4, б и рисунок 5.5). Образец частично выведен из цилиндра, на нижней гране и внешней гране, которая находится в экструдере, температура равна температуре

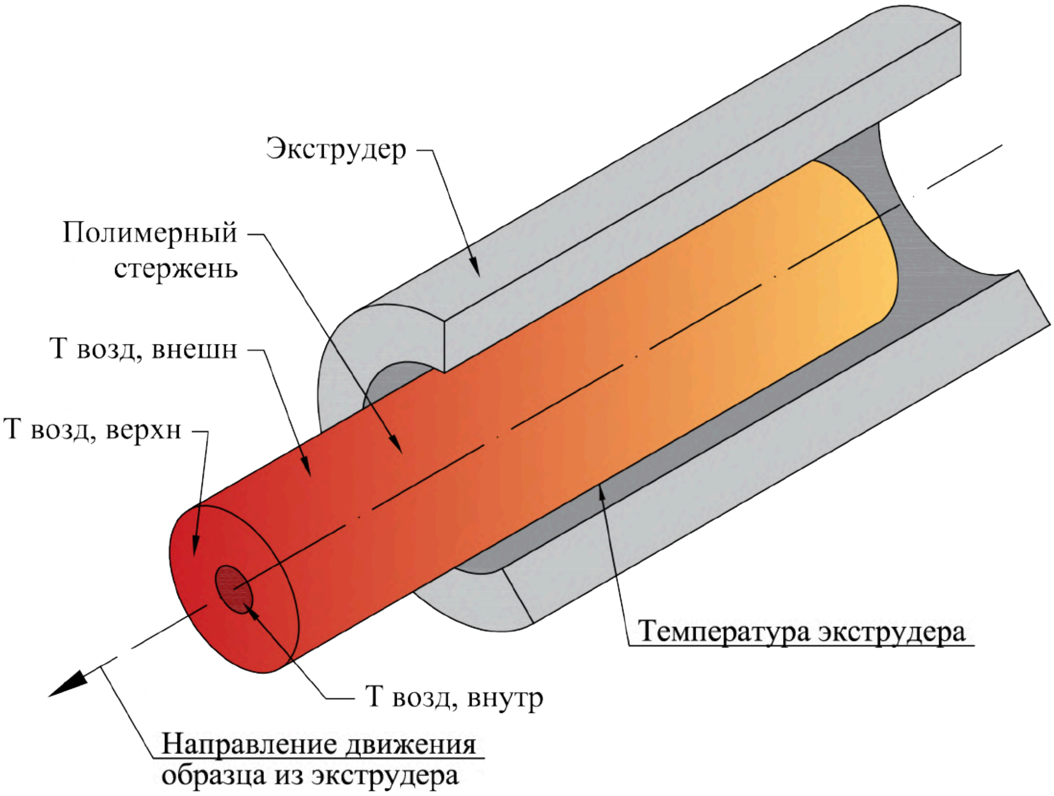


Рисунок 5.5 — Наглядная визуальная схема расчётной модели, изображённой на рисунке 5.4, б

экструдера. На внутренней гране считается теплообмен в воздушным слоем, температура которого также принята равной температуре экструдера. На верхней грани и внешней грани, которая вышла из экструдера считается теплообмен с внешней средой.

3. Остывание (рисунок 5.4, в). Образец извлечён из экструдера, на всех четырех гранях считается теплообмен с воздушной средой.

Температура экструдера и температура воздушной среды внутри экструдера были приняты 100 °C. Связано это с тем, что процесс отверждения эпоксидной смолы должен проводиться при температурах 100–130 °C, однако, по скольку проводится механический расчёт, то температура не должна превышать температуру стеклования ЭДТ-10, равную порядка 102 °C. Температура внешней воздушной среды была принята 20 °C.

Размеры полимерного цилиндра приняты: $R_a = 0.008$ м, $R_b = 0.028$ м, $h = 0.5$ м. Механические нагрузки на всех торцах отсутствуют.

Полный расчётный период составил 3.6 ч. Были рассмотрены два режима, при которых время выхода полимерного цилиндра из экструдера было принято 0.36 и 1.2 ч соответственно. Общее количество интервалов времени составило $h_t = 100$ шт; количество прямоугольных конечных элементов, аппроксимирующих полимерный цилиндр было одинаково в вертикальной и радиальном направлениях и составило $h_r = h_z = 51$ шт.

Расчёты выполнены с учётом зависимости всех физико-механических параметров материала цилиндра от температуры в нелинеаризованной постановке.

5.2.2 Анализ результатов расчёта

Результаты расчёта представлены на рисунках 5.6–5.17 (стр. 187–198).

Температурные поля выводятся для двух вариантов: для варианта выхода полимерного центра из экструдера в течение 0.36 ч (рисунок 5.6) и в течение 1.2 ч (рисунок 5.7). В обоих случаях первый рисунок соответствует моменту времени, когда цилиндр вышел из экструдера наполовину (рисунки 5.6, а и 5.7, а), второй — в самый момент полного выхода изделия (рисунки 5.6, б и 5.7, б). За счёт более медленного выхода во втором случае полимерный цилиндр имеет больший перепад температур как в моменте времени, соответствующему выходу половины цилиндра из экструдера (менее 70 °C в первом случае и порядка 40 °C во втором), так и в момент времени, соответствующий выходу всего цилиндра из экструдера (порядка 50 °C в первом случае и менее 30 °C во втором); при этом максимально разогретые участки имеют температуру 100 °C. Температурные поля в начальный и конечный расчётные моменты не приводятся, как тривиальные.

В результате имеющегося градиента температурного поля, материал полимерного цилиндра приобретает выраженную наведённую косвенную неоднородность в виде разности физико-механических параметров (упругих и высокоэластических) в толщи тела (рисунки 5.8 и 5.9 на стр. 189 и 190); во втором случае разброс физико-механических параметров имеет более выраженный характер.

В процессе выхода материала из экструдера в теле возникают напряжения за счёт возникновения наведённой неоднородности материала. Для первого режима поля напряжений приведены на рисунках 5.10–5.12 (стр. 191–193); для второго режима — на рисунках 5.13–5.15 (стр. 194–196). Анализ полей напряжений показывает, что они имеют несколько разный характер своего распределения в толщи тела, но один порядок их величин. Для удобства анализа изменения величин во времени, на каждом шаге расчёта были определены максимальные и минимальные значения напряжений в теле, после чего были построены графики их изменения, которые приведены на рисунках 5.16–5.17 (стр. 197–198). Максимальные растягивающие и максимальные сжимающие осевые напряжений на всём расчётном периоде имеют уровень порядка 4 МПа.

Анализ полученных данных показывает, что уровень возникающих напряжений не зависит от времени вытяжки изделия, однако в теле возможно возникновение напряжённого состояния достаточно высокого уровня, что может негативно сказаться в случае последующей обработки изделия без возможности его остывания и выдержки при обычных условиях. При остывании тела и его отстаивании в нормальных условия, за счёт развития высокоэластических деформаций в полимере через несколько часов после вытяжки цилиндра из экструдера, напряжения принимают величину, которой можно пренебречь в последующей эксплуатации образца в обоих рассмотренных режимах.

5.3 Выводы по главе

1. Впервые получены коэффициенты матрицы жесткости и вектора нагрузок, учитывающие температурные деформации и деформации ползучести полимерного материала, непосредственным интегрированием для заданной функции формы прямоугольного конечного элемента.

2. Достоверность полученных коэффициентов доказана сравнением решения одномерной задачи с двумерной, искусственно приведённой к плоскому деформированному состоянию.

3. Доказана эффективности применения переменного шага по времени и уточнённого положения центра тяжести конечного элемента по сравнению с «классическим» усреднённым по координатам узлов.

4. В результате предложенных оптимизационных подходов достигается лучшая точность определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел с учётом наличия температурного поля и высокоэластических деформаций материала.

5. Решена практически важная задача определения напряжённо-деформированного состояния полимерного тела при его вытяжки из экструдера с последующим контактом с окружающей средой. Разность температур создаёт косвенную неоднородность материала тела, приводящую к возникновению внутренних напряжений.

а

б

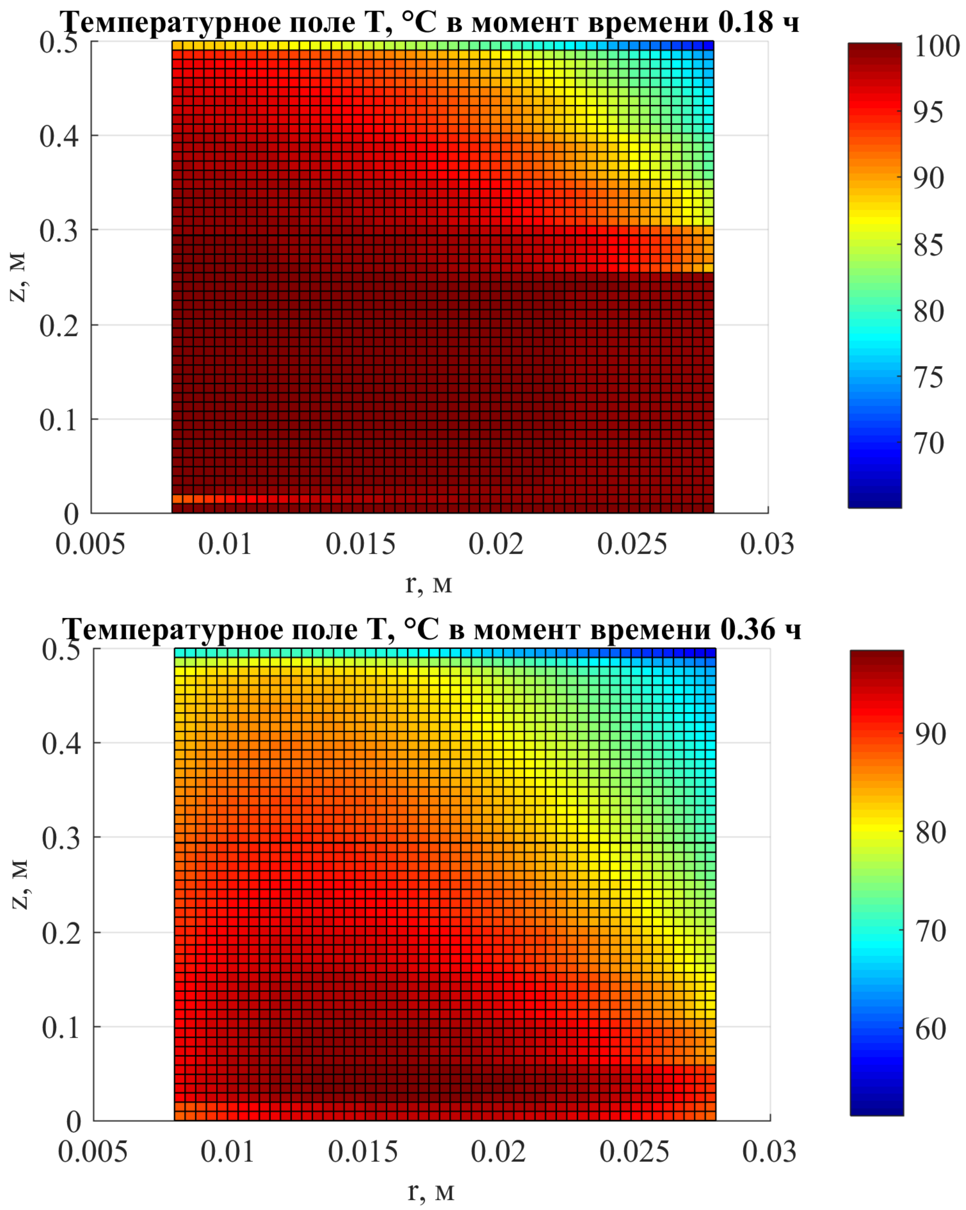


Рисунок 5.6 — Распределение температурного поля при длительности второго этапа 0.36 ч:
а — в середине второго этапа; б — в конце второго этапа

а

б

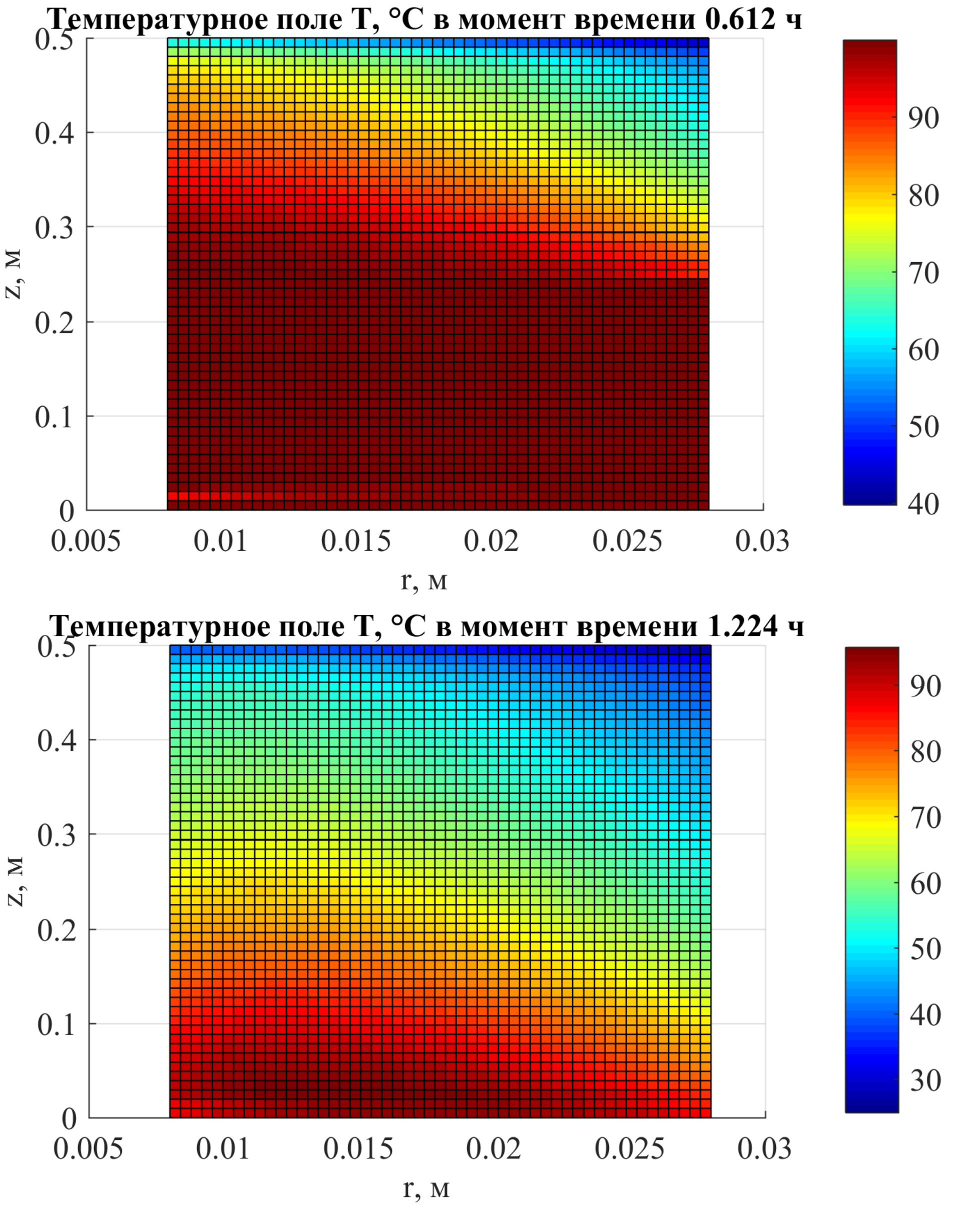


Рисунок 5.7 — Распределение температурного поля при длительности второго этапа 1.2 ч: а — в середине второго этапа; б — в конце второго этапа

а

б

в

г

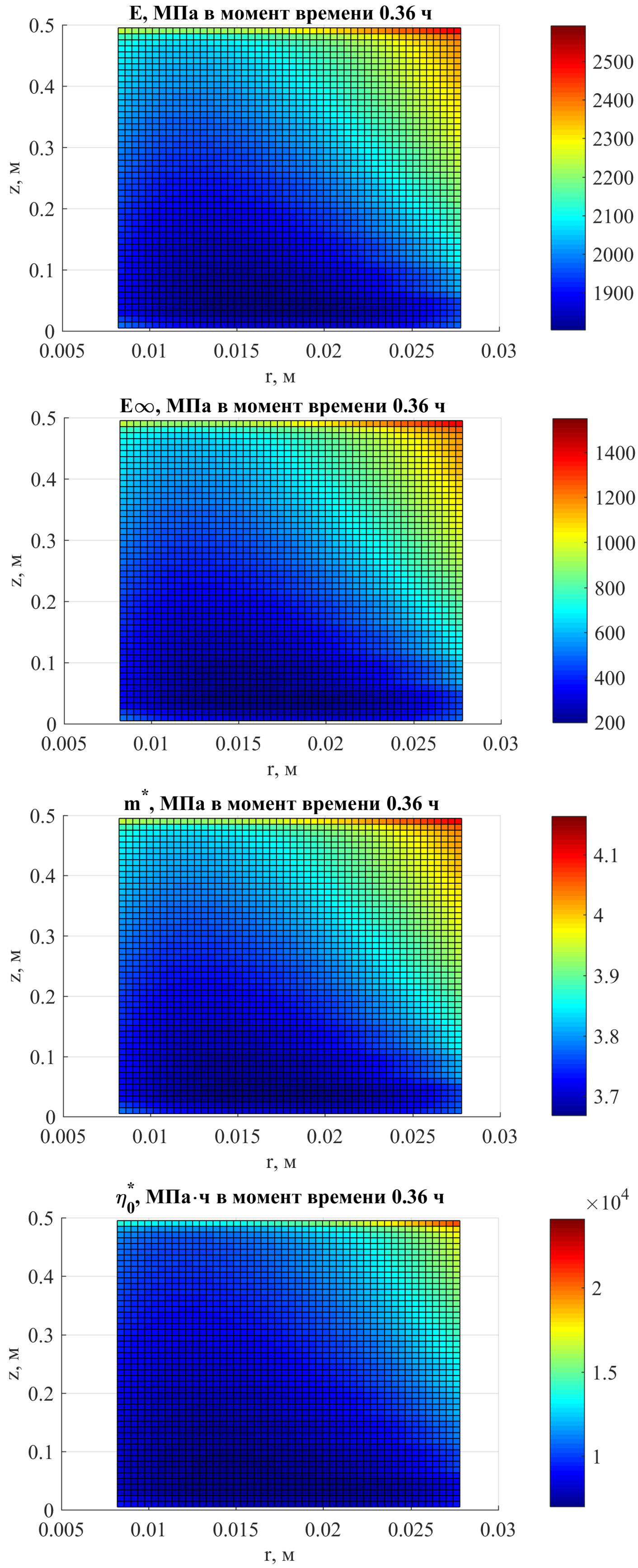
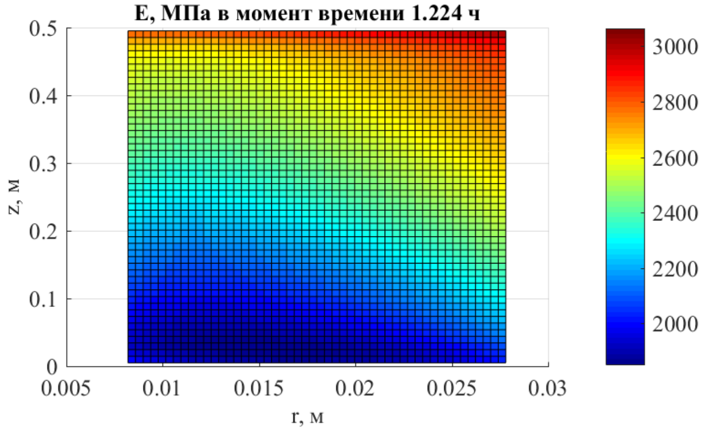
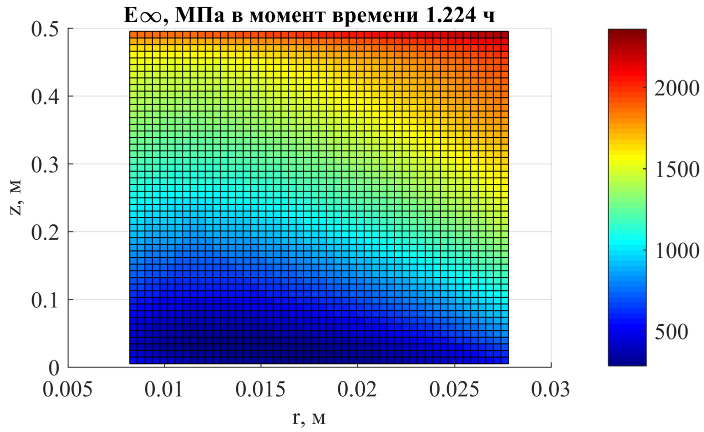


Рисунок 5.8 — Распределение физико-механических параметров в толщи цилиндра при варианте извлечения цилиндра в течение 0.36 ч в конце этого периода: а — модуль упругости E, МПа; б — модуль высокоэластичесности E_∞, МПа; в — модуль скорости m^*, МПа; г — коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^*, МПа $\cdot$ ч

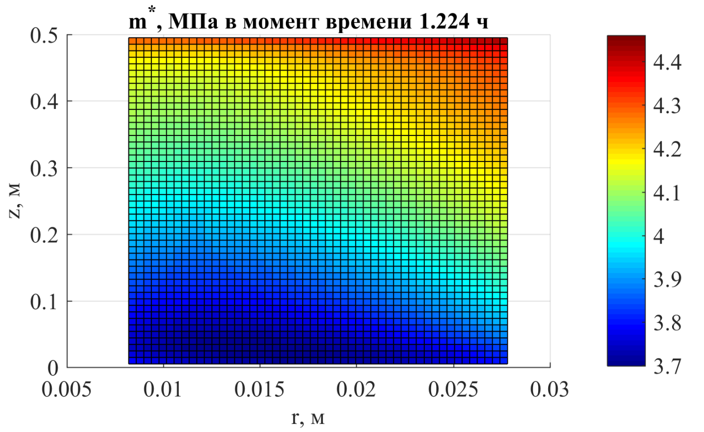
а



б



в



г

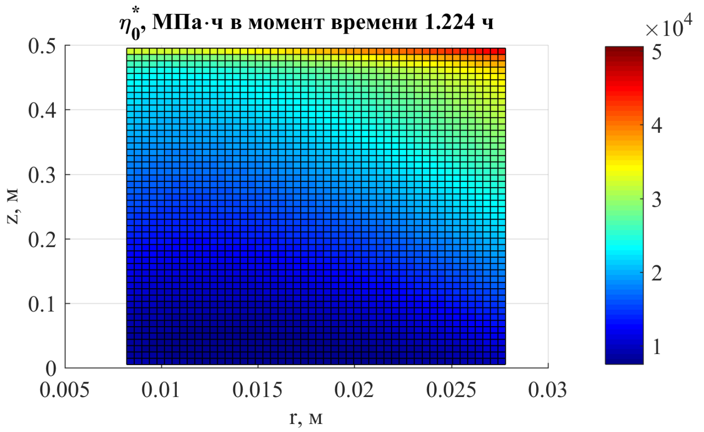


Рисунок 5.9 — Распределение физико-механических параметров в толщи цилиндра при варианте извлечения цилиндра в течение 1.2 ч в конце этого периода: а — модуль упругости E, МПа; б — модуль высокоэластичности E_∞, МПа; в — модуль скорости m^*, МПа; г — коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^*, МПа · ч

а
б
в
г

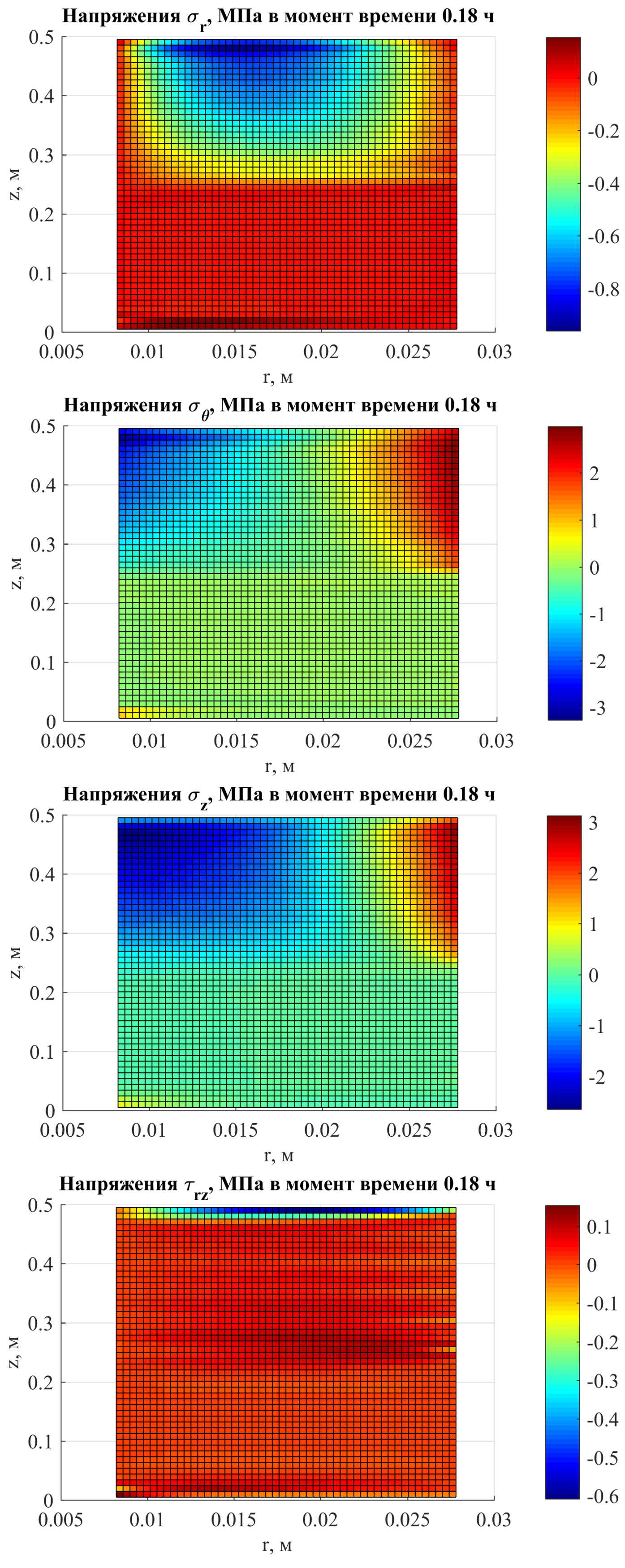
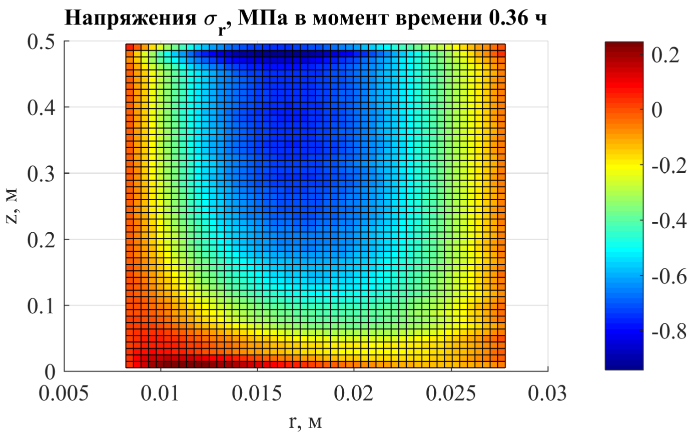
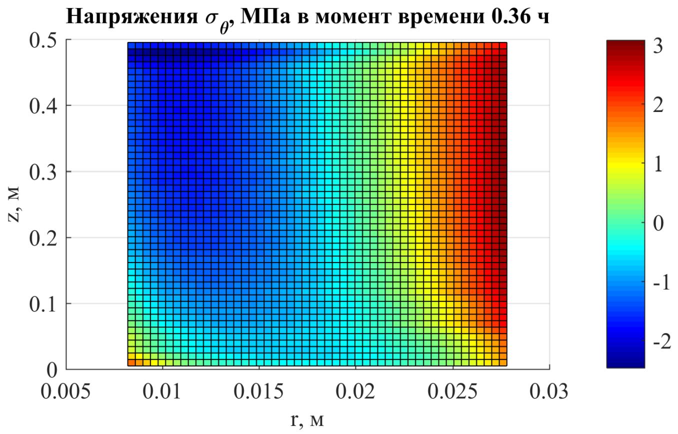


Рисунок 5.10 — Распределение осевых и касательных напряжений при варианте извлечения цилиндра в течение 0.36 ч в середине этого периода

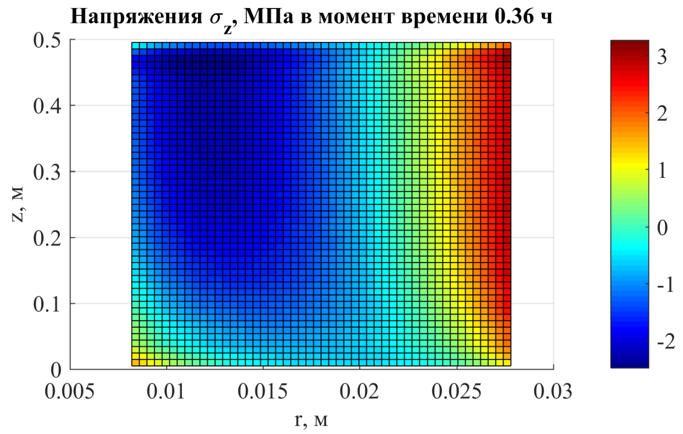
а



б



в



г

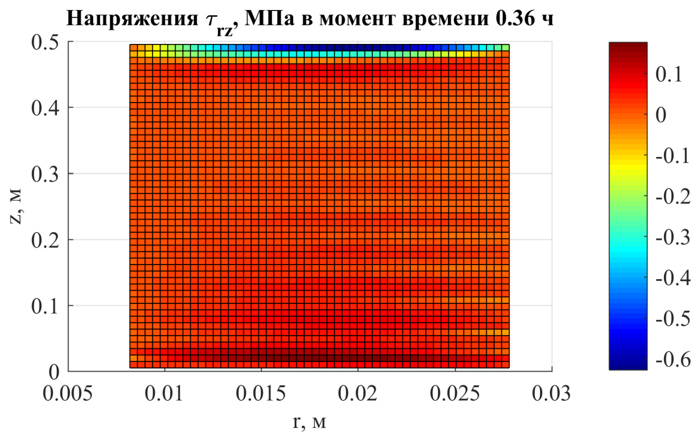
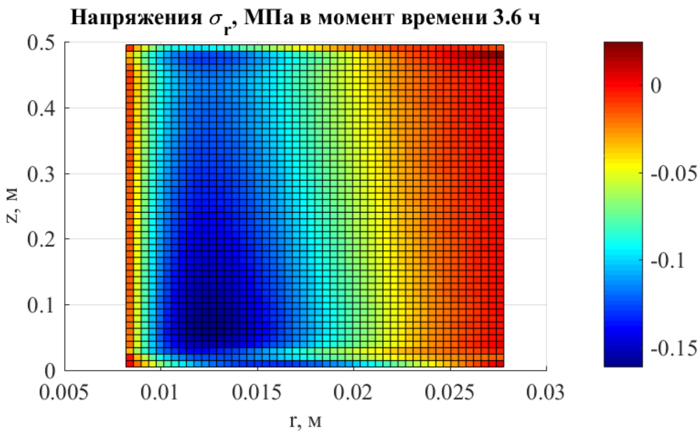
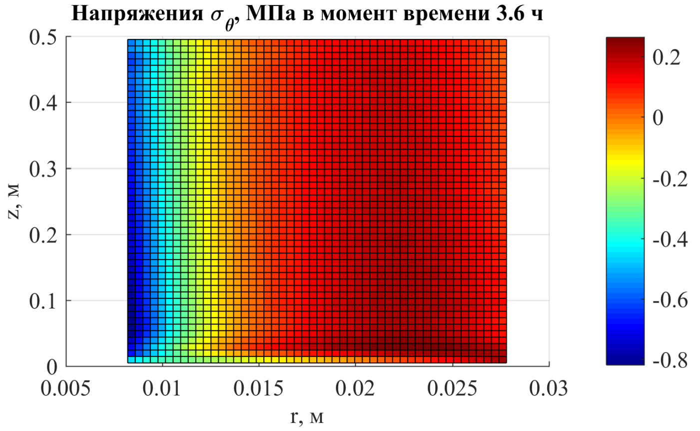


Рисунок 5.11 — Распределение осевых и касательных напряжений при варианте извлечения цилиндра в течение 0.36 ч в конце этого периода

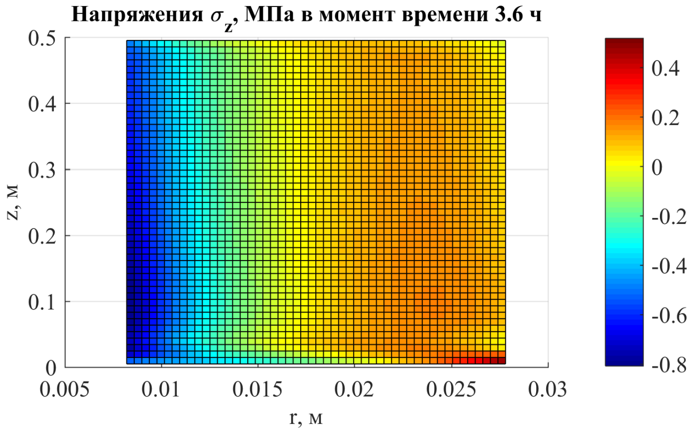
а



б



в



г

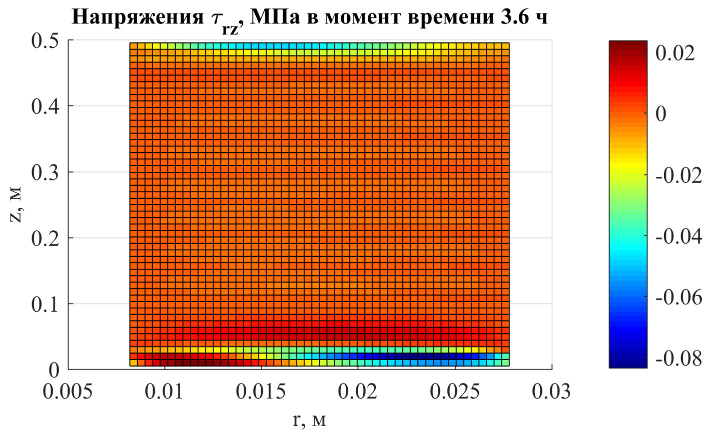


Рисунок 5.12 — Распределение осевых и касательных напряжений при варианте извлечения цилиндра в течение 0.36 ч в конце расчётного периода

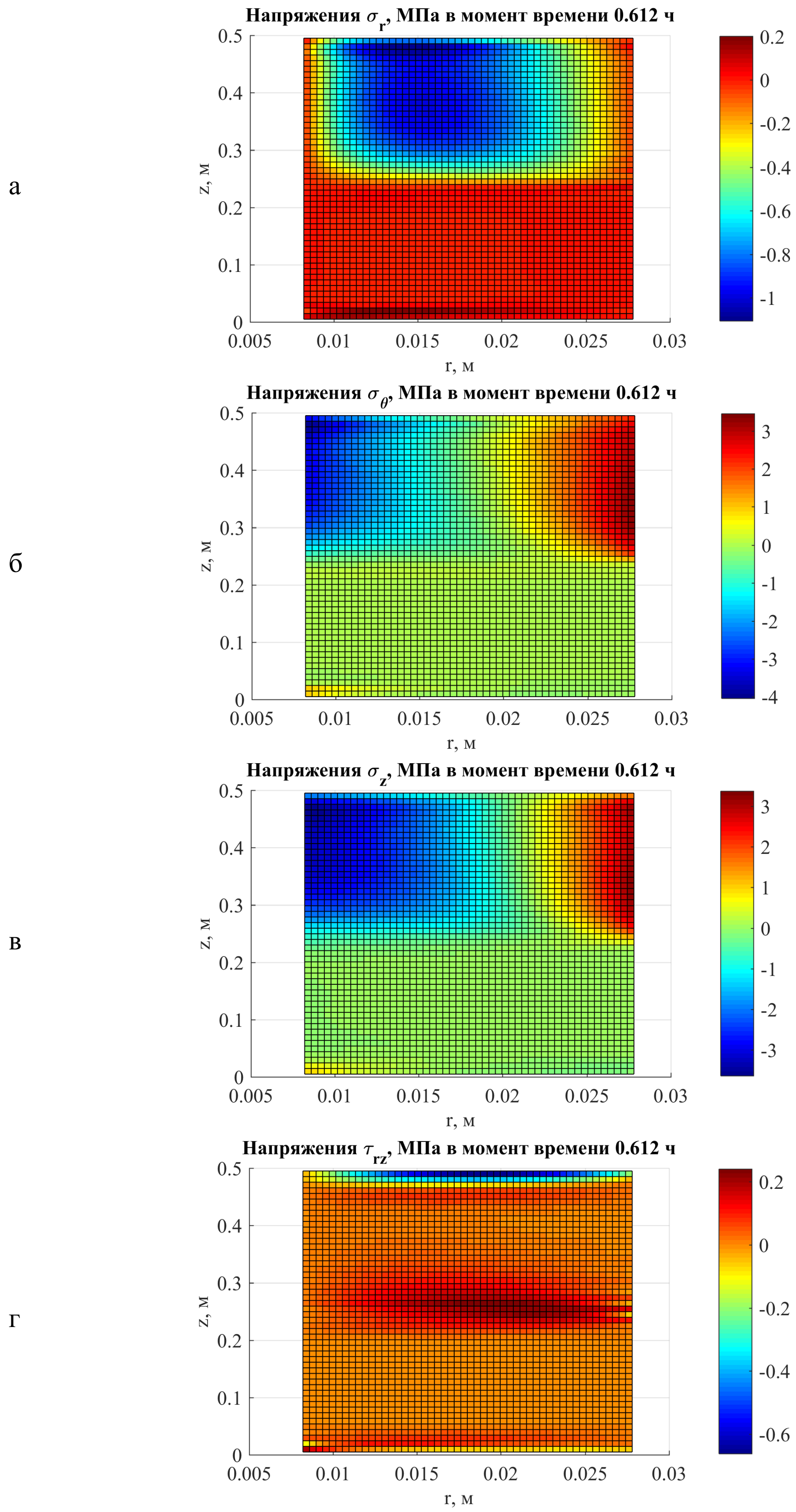
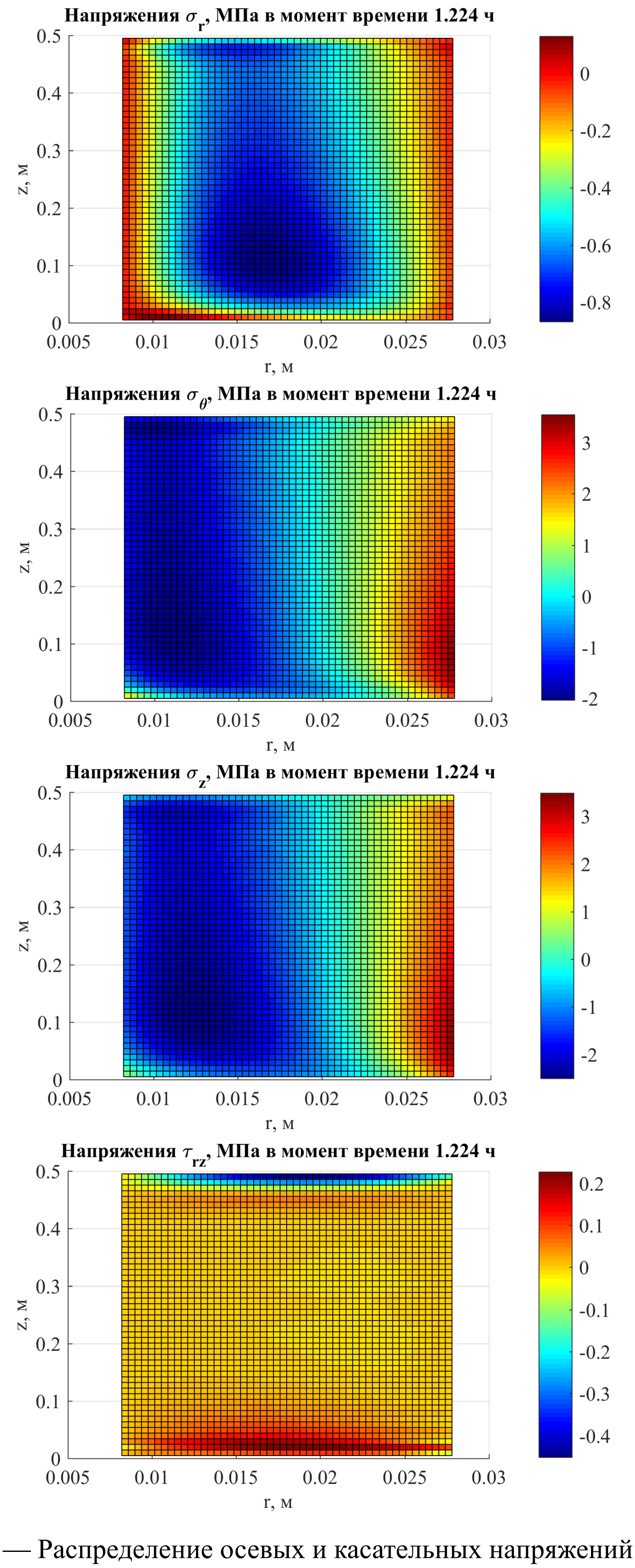


Рисунок 5.13 — Распределение осевых и касательных напряжений при варианте извлечения цилиндра в течение 1.2 ч в середине этого периода



а

б

в

г

Рисунок 5.14 — Распределение осевых и касательных напряжений при варианте извлечения цилиндра в течение 1.2 ч в конце этого периода

а

б

в

г

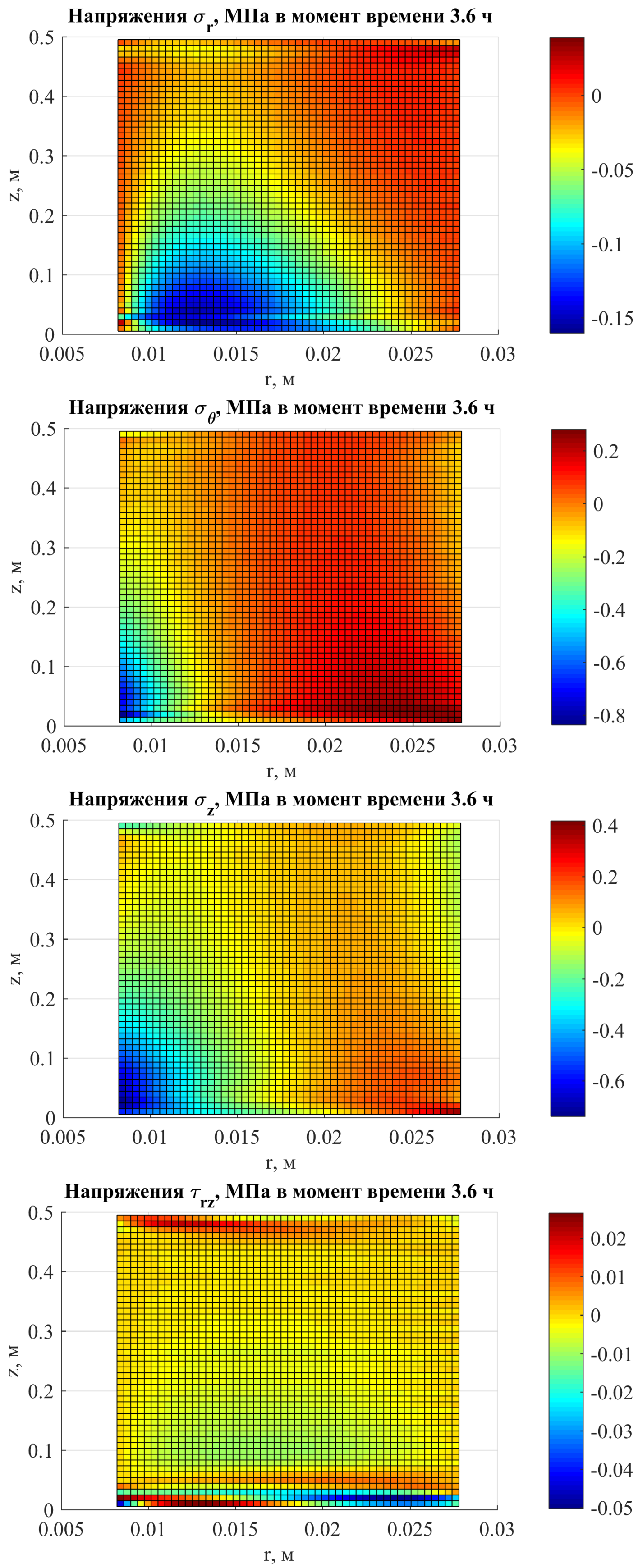
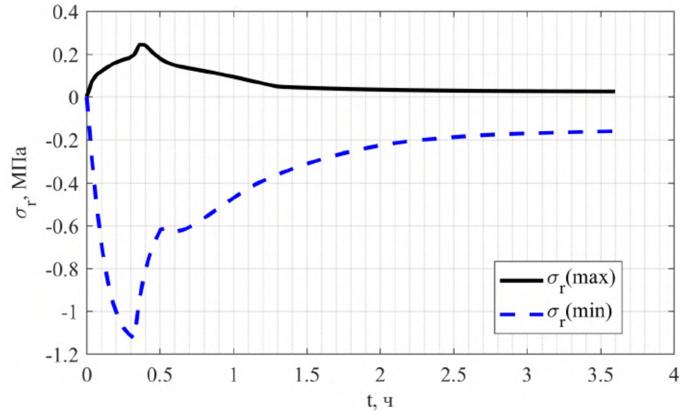
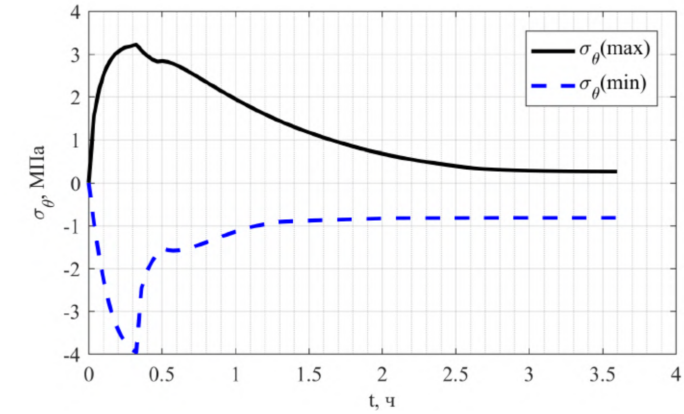


Рисунок 5.15 — Распределение осевых и касательных напряжений при варианте извлечения цилиндра в течение 0.36 ч в конце расчётного периода

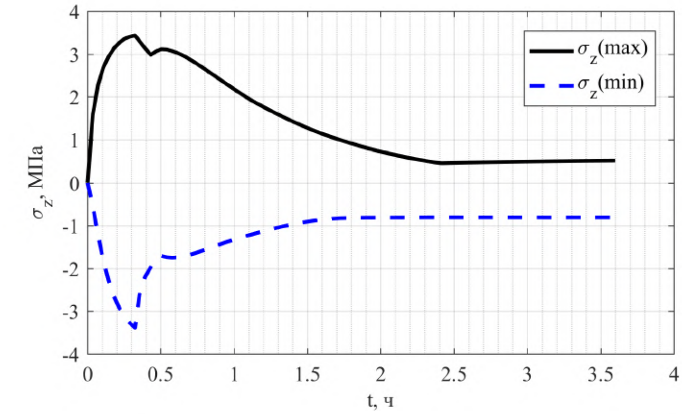
а



б



в



г

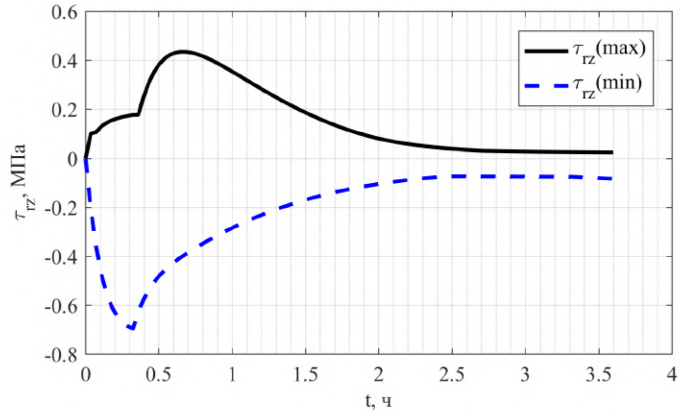


Рисунок 5.16 — Изменение максимальных и минимальных напряжений в толще полимерного цилиндра при времени извлечения тела из экструдера в течение 0.36 ч

а
б
в
г

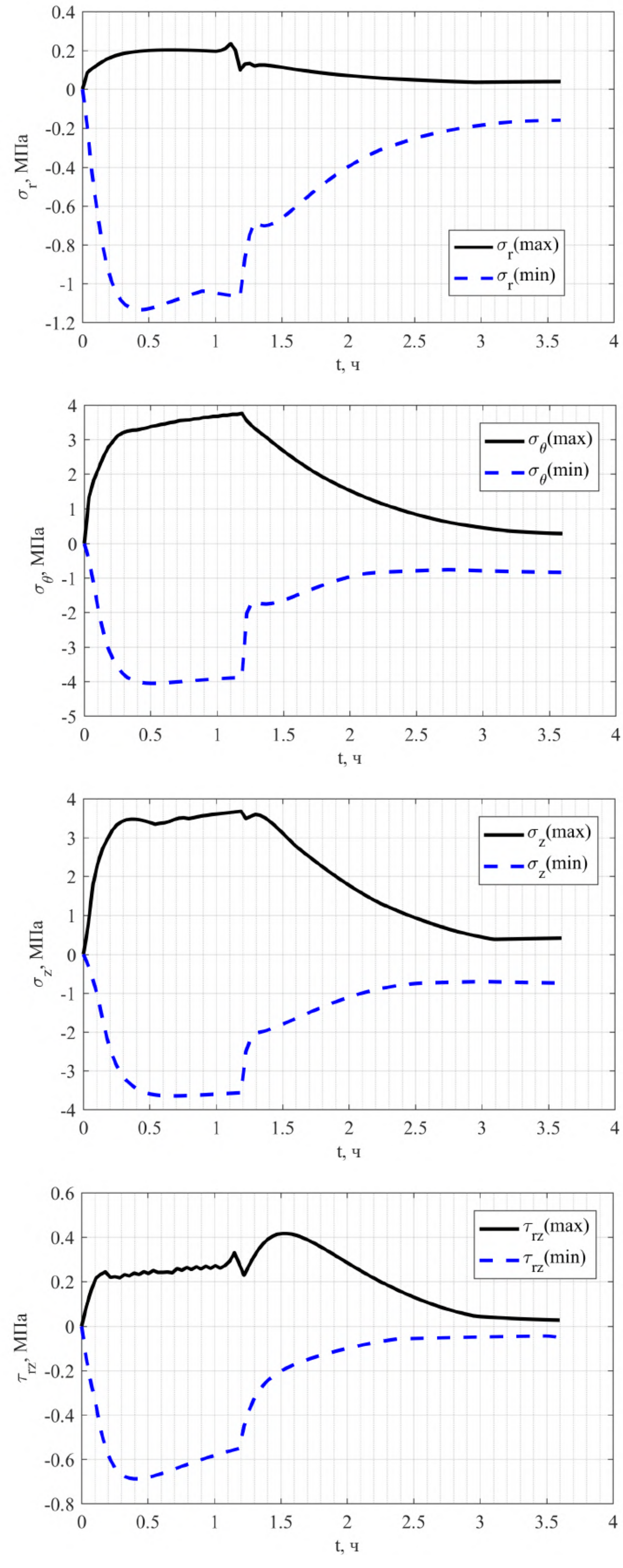


Рисунок 5.17 — Изменение максимальных и минимальных напряжений в толще полимерного цилиндра при времени извлечения тела из экструдера в течение 1.2 ч

Глава 6. Расчёт адгезионного соединения

Исследования адгезионной прочности довольно обширны [189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196], однако среди отечественной литературы одними из самых часто упоминаемых исследований являются труды проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова [156, 158, 197, 198]. Необходимо отметить, что в перечисленных трудах расчёт адгезионного соединения выполнялся при помощи метода пограничного слоя, с использованием некоторых усреднённых параметров. Произведём уточненный расчёт при помощи метода конечных элементов с использованием всех оптимизационных решений, приведённых в прошлых главах.

6.1 Метод пограничного слоя для решения задачи о длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве

6.1.1 Постановка задачи

Как говорилось ранее, в работе [198] авторами ставится задача прогнозирования во времени прочности адгезионного соединения двух склеиваемых дисков при нормальном отрыве. Расчетная схема соединения представлена на рисунке 6.1. Под пограничным слоем на указанном рисунке понимается прилегающий к поверхности субстрата слой адгезива, свойства которого могут отличаться от свойств адгезива (полимера) в остальной толщине или в блоке. Более подробно понятие пограничного слоя описывается в работах [156, 198, 199]. Для решения поставленной задачи в монографии [198] используется метод контактного слоя, с которым детально можно ознакомиться в указанном издании, а также, например, в публикациях [156, 200, 201, 202].

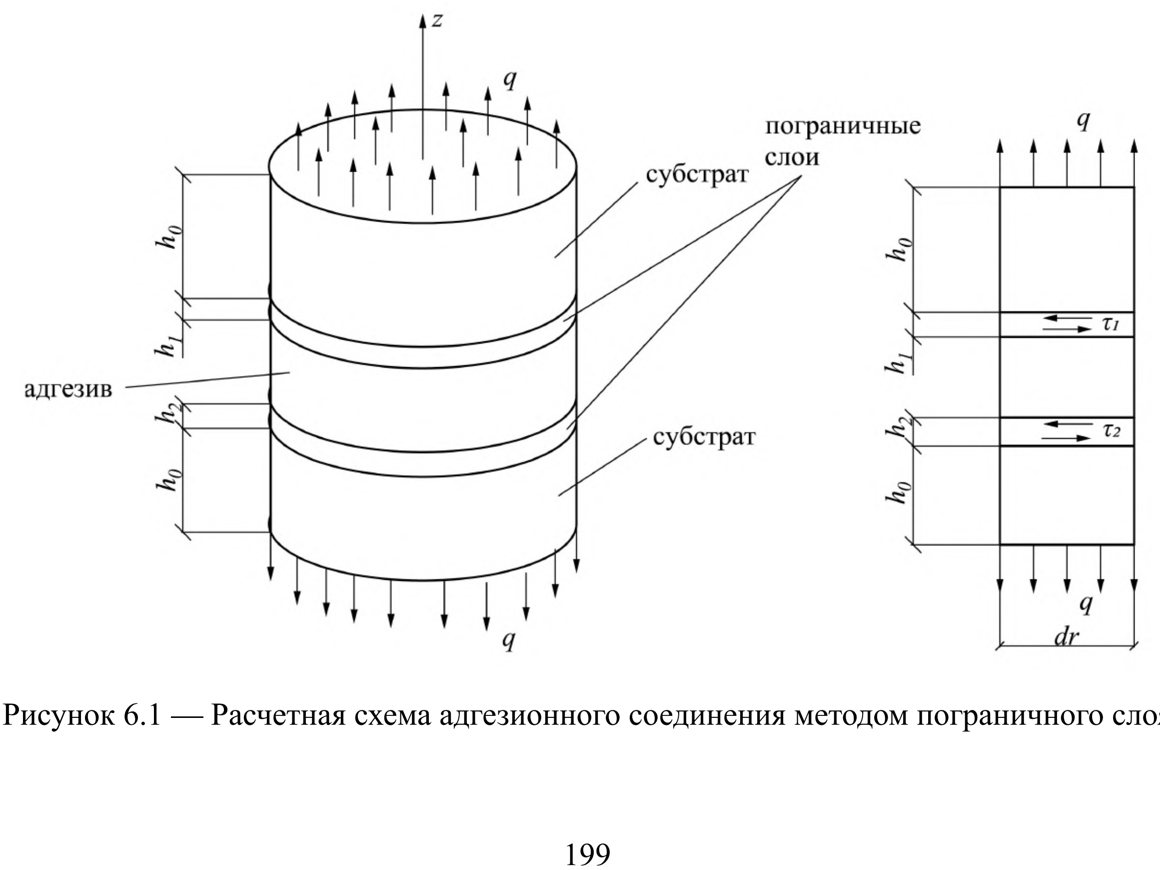


Рисунок 6.1 — Расчетная схема адгезионного соединения методом пограничного слоя

В основу метода пограничного слоя положены основные соотношения механики деформируемого твердого тела, для осесимметричной задачи записывающиеся в виде:

а) уравнение равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=0. \tag{6.1}$$

б) уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}+\frac{\varepsilon_\theta-\varepsilon_r}{r}=0. \tag{6.2}$$

в) физические уравнения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{1}{E}\left[\sigma_r-\nu\left(\sigma_\theta+\sigma_z\right)\right]+\varepsilon_T+\varepsilon_c+\varepsilon_{cr,r};\\ \varepsilon_\theta&=\frac{1}{E}\left[\sigma_\theta-\nu\left(\sigma_r+\sigma_z\right)\right]+\varepsilon_T+\varepsilon_c+\varepsilon_{cr,\theta},\end{aligned} \tag{6.3}$$

В выражении (6.3) обозначены: ε_T — температурная деформация, ε_c — деформация химической усадки, $\varepsilon_{cr,r}$ и $\varepsilon_{cr,\theta}$ — деформации ползучести.

Для субстрата предполагается упругая работа, т.е. деформации ползучести не учитываются. Систему исходных уравнений проф. А. С. Фрейдин и проф. Р. А. Турусов записывают в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{r0}}{\partial r}+\frac{\sigma_{r0}-\sigma_{\theta0}}{r}+\frac{\tau}{h_0}=0;\\ &\frac{\partial\sigma_{r1}}{\partial r}+\frac{\sigma_{r1}-\sigma_{\theta1}}{r}-\frac{\tau}{\bar h_1}=0;\\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{\theta0}-\nu_0\sigma_{r0}\right)=\frac{1+\nu_0}{r}\left(\sigma_{r0}-\sigma_{\theta0}\right);\\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{\theta1}-\nu_1\sigma_{r1}\right)=\frac{1+\nu_1}{r}\left(\sigma_{r1}-\sigma_{\theta1}\right)+E_1\left[\frac{\varepsilon_{cr,r1}-\varepsilon_{cr,\theta1}}{r}-\frac{\partial\varepsilon_{cr,\theta1}}{\partial r}\right];\\ &\frac{h^*}{G}\frac{\tau}{r}=\frac{\sigma_{\theta1}-\nu_1\sigma_{r1}}{E_1}-\frac{\sigma_{\theta0}-\nu_0\sigma_{r0}}{E_0}-\\ &\qquad-q\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_0}{E_0}\right)+\left(\varepsilon_{t,1}-\varepsilon_{t,0}\right)+\left(\varepsilon_{c,1}-\varepsilon_{c,0}\right)+\varepsilon^*_{\theta1}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

В формулах (6.4) индексы «0» соответствуют субстрату, «1» — пограничному слою, $\bar h_1=h_1/2$, $h^*=h_1=h_2$, $\tau=\tau_1=-\tau_2$ — касательные напряжения в пограничных слоях. Первые 2 уравнения в (6.4) получены на основе (6.1) в предположении, что касательные напряжения по толщине субстрата и пограничных слоев изменяются по линейному закону. Третье и четвертое уравнение в (6.4) получено путем подстановки (6.3) в (6.2) с учетом, что $\sigma_z=q=\text{const}$.

Остановимся отдельно на пятом уравнении в (6.4). Перепишем его в виде:

$$\tau = G\frac{1}{h^*}r\left[\frac{\sigma_{\theta 1}-\nu_1\sigma_{r1}}{E_1}-\frac{\sigma_{\theta 0}-\nu_0\sigma_{r0}}{E_0}-\right.$$
$$\left.-\,q\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_0}{E_0}\right)+(\varepsilon_{T,1}-\varepsilon_{T,0})+(\varepsilon_{c,1}-\varepsilon_{c,0})+\varepsilon_{cr,\theta 1}\right]. \quad (6.5)$$

Выражение (6.5) в квадратной скобке представляет разность между окружными деформациями пограничного слоя и субстрата $\Delta\varepsilon_\theta$. Поскольку радиальные перемещения u связаны с окружными деформациями как $\varepsilon_\theta = u/r$, произведение $\Delta\varepsilon_\theta \cdot r$ даст разницу радиальных перемещений Δu субстрата и пограничного слоя. Отношение Δu к h^* представляет угол сдвига пограничного слоя, т. е. равенство (6.5) можно переписать в виде:

$$\tau = G\gamma_{rz}. \quad (6.6)$$

Однако такая связь между касательными напряжениями и деформациями сдвига справедлива только для упругого материала, а в вязкоупругом материале полная деформация представляет сумму упругой деформации и деформации ползучести:

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau}{G}+\gamma_{cr,rz}. \quad (6.7)$$

Выражая из (6.7) касательные напряжения через деформации, получим:

$$\tau = G\left(\gamma_{rz}-\gamma^*_{rz}\right) = G\left[\frac{r}{h^*}\left(\frac{\sigma_{\theta 1}-\nu_1\sigma_{r1}}{E_1}-\frac{\sigma_{\theta 0}-\nu_0\sigma_{r0}}{E_0}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,q\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_0}{E_0}\right)+(\varepsilon_{t,1}-\varepsilon_{t,0})+(\varepsilon_{c,1}-\varepsilon_{c,0})+\varepsilon^*_{\theta 1}\right)-\gamma^*_{rz}\right]. \quad (6.8)$$

Окончательное разрешающее уравнение выведем на основе первых четырех уравнений в (6.4) и уравнения (6.8).

6.1.2 Вывод разрешающих уравнений

Произведём следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \sigma_{r0}-\sigma_{\theta 0} &= x_0; \qquad & \sigma_{r1}-\sigma_{\theta 1} &= x_1;\\ \sigma_{\theta 0}-\nu_0\sigma_{r0} &= y_0; \qquad & \sigma_{\theta 1}-\nu_1\sigma_{r1} &= y_1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.9) радиальные и окружные напряжения выражаются через новые переменные как:

$$\sigma_{r0} = \frac{x_0+y_0}{1-\nu_0}; \qquad \sigma_{r1} = \frac{x_1+y_1}{1-\nu_1}; \quad \sigma_{\theta 0} = \frac{y_0+\nu_0 x_0}{1-\nu_0}; \quad \sigma_{\theta 1} = \frac{y_1+\nu_1 x_1}{1-\nu_1}. \quad (6.10)$$

Также введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &Q(r,t) = -q\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_0}{E_0}\right) + (\varepsilon_{T,1} - \varepsilon_{T,0}) + (\varepsilon_{c,1} - \varepsilon_{c,0}) + \varepsilon_{cr,\theta 1} - \frac{h^*}{r}\gamma_{cr,rz}; \\ &\xi(r,t) = E_1\left[\frac{\varepsilon_{cr,r1} - \varepsilon_{cr,\theta 1}}{r} - \frac{\partial \varepsilon_{cr,\theta 1}}{\partial r}\right]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Третье и четвертое уравнение в (6.4) после замены переменных принимают вид:

$$y_0' = \frac{1+\nu_0}{r}x_0; \qquad y_1' = \frac{1+\nu_1}{r}x_1 + \xi. \tag{6.12}$$

Штрихом здесь и далее будем обозначать производную по радиусу. Первые два уравнения в (6.4) записываются в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-\nu_0}(x_0' + y_0') + \frac{x_0}{r} + \frac{\tau}{h_0} = 0; \\ &\frac{1}{1-\nu_1}(x_1' + y_1') + \frac{x_1}{r} - \frac{\tau}{\bar{h}_1} = 0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Подставив (6.12) в (6.13), после небольших преобразований получим:

$$\left(r^2 x_0\right)' = -\frac{(1-\nu_0)\,r^2}{h_0}\tau; \tag{6.14}$$

$$\left(r^2 x_1\right)' = \frac{(1-\nu_1)\,r^2}{\bar{h}_1}\tau - \xi r^2. \tag{6.15}$$

Равенство (6.8) переписывается в виде:

$$\frac{h^*}{G}\frac{\tau}{r} = \frac{y_1}{E_1} - \frac{y_0}{E_0} + Q. \tag{6.16}$$

Далее уравнение (6.16) дифференцируется по r:

$$\frac{h^*}{G}\left(\frac{\tau}{r}\right)' = \frac{y_1'}{E_1} - \frac{y_0'}{E_0} + Q' = \frac{1+\nu_1}{rE_1}x_1 - \frac{1+\nu_0}{rE_0}x_0 + \frac{\xi}{E_1} + Q'. \tag{6.17}$$

Домножим (6.17) на $r^3 G/h^*$ и еще раз продифференцируем по r. В итоге после некоторых преобразований получим основное разрешающее уравнение относительно τ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial r} - \tau\left(\frac{1}{r^2} + c^2\right) = \frac{G}{h^*}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left[\varepsilon_{cr,r1} - \varepsilon_{cr,\theta 1}\right]\right) - \\ - \frac{G}{h^*}\frac{\xi(r,t)(1+\nu_1)}{E_1} - G\left(\frac{\partial^2 \gamma_{cr,rz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{cr,rz}}{\partial r} - \frac{\gamma_{cr,rz}}{r^2}\right), \end{aligned} \tag{6.18}$$

где $c^2 = \dfrac{G}{h^*}\left(\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1\bar{h}_1} + \dfrac{1-\nu_0^2}{E_0 h_0}\right)$.

В работе [198] в окончательном разрешающем уравнении отсутствуют последние 2 слагаемых в правой части (6.18).

Рассмотрим граничные условия. Из симметрии задачи следует, что при $r = 0$ $\tau = 0$. Для нормальных напряжений граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} r = 0: &\quad \sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0}, \quad \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1}; \\ r = R: &\quad \sigma_{r0} = 0, \quad \sigma_{r1} = 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Чтобы получить второе граничное условие относительно касательного напряжения, выразим τ из уравнения (6.15) через x_1 и подставим затем в (6.14):

$$\left(r^2 x_0\right)' = -\frac{1-\nu_0}{1-\nu_1}\frac{\bar{h}_1}{h_0}\left(r^2 x_1\right)' - \frac{\bar{h}_1}{h_0}\frac{1-\nu_0}{1-\nu_1}\xi(r,t) r^2. \tag{6.20}$$

Проинтегрируем далее это равенство:

$$r^2 x_0 = -\frac{1-\nu_0}{1-\nu_1}\frac{\bar{h}_1}{h_0}\left[r^2 x_1 + \int\limits_0^r \xi(v,t) v^2\, \mathrm{d}v\right] + F(t). \tag{6.21}$$

При $r \to 0$ $x_0 \to 0$, $x_1 \to 0$, откуда следует, что $F(t) = 0$.

При $r = R$ равенство (6.21) принимает вид:

$$x_0 = -\frac{1-\nu_0}{1-\nu_1}\frac{\bar{h}_1}{h_0} x_1 - \frac{1-\nu_0}{1-\nu_1}\frac{\bar{h}_1}{h_0}\theta(R,t), \tag{6.22}$$

где $\theta(R,t) = \dfrac{1}{R^2}\int\limits_0^R \xi(r,t) r^2\, \mathrm{d}r$.

Условия (6.19) при $r = R$ представляются в виде:

$$x_0 + y_0 = 0; \quad x_1 + y_1 = 0. \tag{6.23}$$

Добавив к (6.22) и (6.23) равенства (6.16) и (6.17), путем преобразований получим следующее граничное условие при $r = R$:

$$m\tau' + (1-m)\frac{\tau}{R} = \frac{G}{h^*}\left(Q(R) - f(R,t) + mR\left[\frac{\xi(R)}{E_1} + Q'(R)\right] + m(1+\nu_0) f(R,t)\right), \tag{6.24}$$

где $m = \dfrac{G}{h^* c^2}\left(\dfrac{1-\nu_1}{\bar{h}_1 E_1} + \dfrac{1-\nu_0}{h_0 E_0}\right)$, $f(R,t) = \dfrac{(1-\nu_0)\bar{h}_1}{E_0(1-\nu_1)h_0}\theta(R,t)$.

В работе [198] условие (6.24) имело такой же вид, но отсутствовали слагаемые с $f(R,t)$.

6.1.3 Методика расчёта

Решение уравнения (6.18) выполняется численно при помощи метода конечных разностей. Временной интервал, на котором исследуется процесс ползучести, разбивается на заданное количество шагов. При использовании закона ползучести в дифференциальной форме деформации ползучести на каждом шаге определяются по деформациям и напряжениям на предыдущем шаге при помощи метода Эйлера или Рунге-Кутты. Определив, касательные напряжения в пограничных слоях, функции x_1 и y_1 можно найти из (6.15) и (6.12) по формулам:

$$r^2 x_1 = \int\limits_0^r \left(\frac{1-\nu_1}{\bar{h}_1}\tau(v) - \xi(v,t) \right) v^2\, \mathrm{d}v + C_1; \tag{6.25}$$

$$y_1 = \int\limits_0^r \left[(1+\nu_1)\frac{x_1(v)}{v}\, \mathrm{d}v + \xi(v,t) \right] \mathrm{d}v + C_2. \tag{6.26}$$

Подставив в (6.25) $r = 0$, получим, что $C_1 = 0$. Константа C_2 определяется из второго условия в (6.23):

$$y_1(R) + x_1(R) = 0 \to C_2 = -\int\limits_0^R \left[(1+\nu_1)\frac{x_1(r)}{r} dr + \xi(r,t) \right] \mathrm{d}r - x_1(R). \tag{6.27}$$

Интегрирование в формулах (6.25)–(6.27) не может быть выполнено аналитически и выполнялось численно.

6.1.4 Результаты и обсуждение

Был выполнен расчет адгезионного соединения, в котором в качестве субстрата выступал алюминий, а в качестве адгезива — эпоксидная смола ЭДТ-10. Принимались следующие исходные данные: $R = 12$ мм, $E_0 = 210^5$ МПа, $E_1 = 2685$ МПа, $h_0 = 1.2$ мм, $\nu_0 = 0.33$, $\nu_1 = 0.37$, $G/h^* = 9600$ МПа/мм. В качестве закона ползучести ЭДТ-10 использовалось обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Деформации ползучести в этом уравнении представляются в виде суммы составляющих спектра времён релаксации:

$$\varepsilon_{cr,ij} = \sum_{s=1}^{n} (\varepsilon_{cr,ij})_s, \quad i = r, \theta, z. \tag{6.28}$$

При решении практических задач, как правило, ограничиваются одним-двумя членами спектра. Скорости роста деформаций ползучести связаны с напряжениями зависимостями:

$$\frac{\partial \left(\varepsilon_{cr,ij}\right)_s}{\partial t} = \frac{\left(f^*_{ij}\right)_s}{\eta^*_s}. \tag{6.29}$$

Здесь $\left(f_{ij}^*\right)_s$ — функции напряжений, η_s^* — релаксационные вязкости, определяемые по формулам:

$$\left(f_{ij}^*\right)_s = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}\right) - E_{\infty s}\left(\varepsilon_{cr,ij}\right)_s;$$
$$\eta_s^* = \eta_{0s}\exp\left\{-\frac{\left[\frac{3}{2}(\sigma_{pp} - p) - E_{\infty s}(\varepsilon_{cr,pp})_s\right]_{\max}}{m_s^*}\right\}. \quad (6.30)$$

В формулах (6.30) $p = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3$ — среднее напряжение, $E_{\infty s}$ — модуль высокоэластичности, η_{0s} — начальная релаксационная вязкость, m_s^* — модуль скорости, δ_{ij} — символ Кронекера. Индексы «pp» соответствуют главным напряжениям.

Отметим, что $\gamma_{cr,rz} = 2\varepsilon_{cr,rz}$.

Значения реологических параметров полимера принимались равными: $E_\infty = 2310$ МПа, $m^* = 4.44$ МПа, $\eta_0 = 8.95 \cdot 10^9$ МПа $\cdot$ ч. На рисунке 6.2 приведён график изменения во времени максимальных касательных напряжений в пограничном слое (при $r = R$), построенный при $q = 10$ МПа. Из представленного графика видно, что касательные напряжения возрастают, но их рост носит затухающий характер. При $t = 0$ они составляют по абсолютному значению 2.34 МПа, а при $t = 2000$ ч — 2.94 МПа.

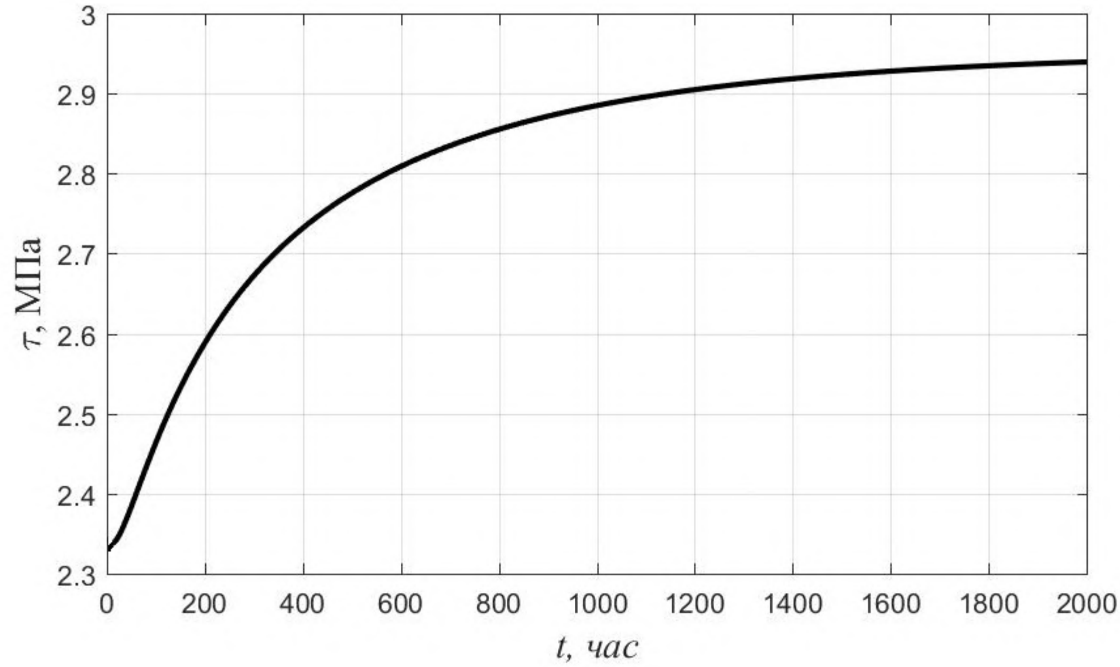


Рисунок 6.2 — Изменение во времени максимальных касательных напряжений в пограничном слое

Для контроля правильности результатов проанализируем уравнения (6.28)–(6.30) при $t \to \infty$. Если в конце процесса ползучести напряжения и деформации стремятся к конечному значению, то при $t \to \infty$ должны быть равны нулю скорости роста всех составляющих деформации ползучести, а значит и соответствующие им функции напряжений:

$$\left(f_{ij}^*\right)_s = 0 \to \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}\right) - E_{\infty s}\left(\varepsilon_{cr,ij}\right)_s = 0. \tag{6.31}$$

Из (6.31) можно найти составляющие деформаций ползучести при $t \to \infty$ по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr,r,s} &= \frac{1}{E_{\infty,s}}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{2}\right); \quad \varepsilon_{cr,\theta,s} = \frac{1}{E_{\infty,s}}\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2}\right); \\ \varepsilon_{cr,z,s} &= \frac{1}{E_{\infty,s}}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}\right); \quad \varepsilon_{cr,rz,s} = \frac{3}{2}\frac{\tau_{rz}}{E_{\infty,s}}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Полные деформации при отсутствии температурных воздействий при $t \to \infty$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\right) + \left(\sigma_r - \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{2}\right)\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{E_{\infty s}}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\right) + \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2}\right)\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{E_{\infty s}}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right) + \left(\sigma_z - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}\right)\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{E_{\infty s}}; \\ \gamma_{rz} &= 2\varepsilon_{rz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{rz} + 3\tau_{rz}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{E_{\infty s}}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Представим равенства (6.33) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \alpha^*\sigma_r - \beta^*\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right); \\ \varepsilon_\theta &= \alpha^*\sigma_\theta - \beta^*\left(\sigma_r + \sigma_z\right); \\ \varepsilon_z &= \alpha^*\sigma_z - \beta^*\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right); \\ \gamma_{rz} &= 2\left(\alpha^* + \beta^*\right)\tau_{rz}, \end{aligned} \tag{6.34}$$

где $\alpha^* = \frac{1}{E} + \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{1}{E_{\infty s}}$, $\beta^* = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{1}{E_{\infty s}}$.

Введем величины $\tilde{E} = 1/\alpha^*$, $\tilde{\nu} = \beta^*/\alpha^*$. Тогда формулы (6.34) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r - \tilde{\nu}\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)}{\tilde{E}}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \tilde{\nu}\left(\sigma_r + \sigma_z\right)}{\tilde{E}}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \tilde{\nu}\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)}{\tilde{E}}; \quad \gamma_{rz} = \frac{2(1+\tilde{\nu})}{\tilde{E}}\tau_{rz}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Из формул (6.35) видно, что величины $\tilde{E}$ и $\tilde{\nu}$ представляют длительный модуль упругости и длительный коэффициент Пуассона. Таким образом, чтобы получить решение в конце процесса ползучести, достаточно заменить в упругом решении постоянные E и ν на длительные $\tilde{E}$ и $\tilde{\nu}$. На рисунке 6.3 представлены графики изменения касательных напряжений в пограничном слое по радиусу при $t = 0$ и $t \to$, полученные указанным способом. Вследствие явно выраженного краевого эффекта показана только зона, непосредственно примыкающая к точке $r = R$. В конце процесса ползучести максимальные касательные напряжения составили 2.96 МПа, что практически совпадает со значением, указанным ранее для момента времени 2000 ч.

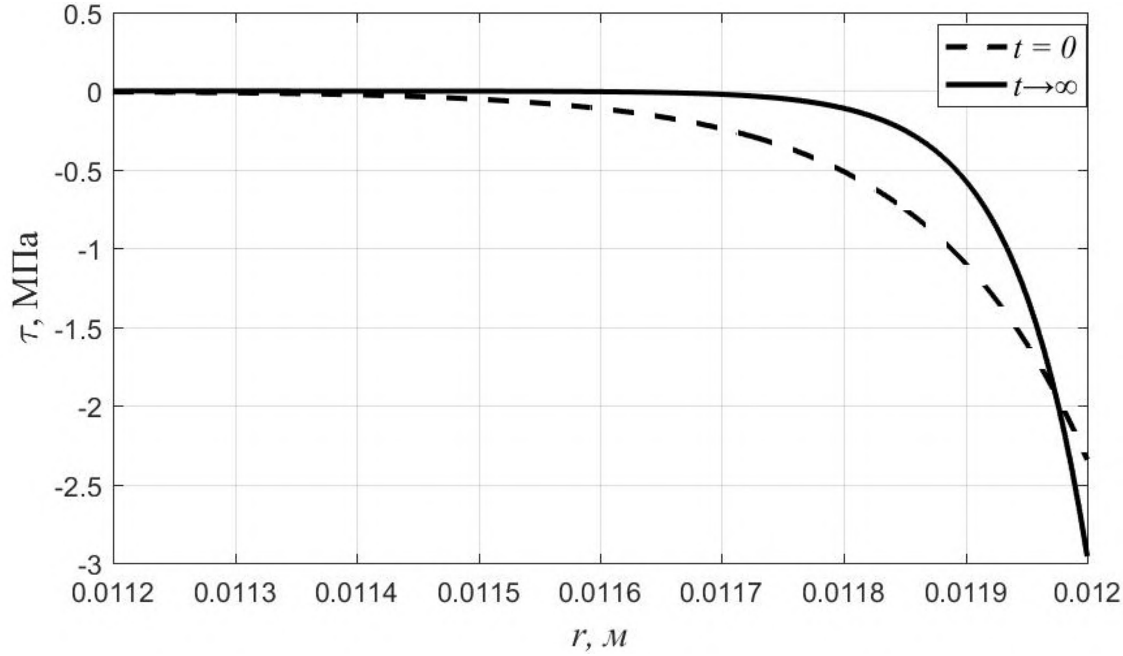


Рисунок 6.3 — Изменение касательных напряжений в пограничном слое по радиусу в начале и в конце процесса ползучести

Показано, что модель адгезионного соединения, представленная в работе А. С. Фрейдина и Р. А. Турусова, не учитывает сдвиговые деформации ползучести пограничного слоя, которые согласно принятых ими гипотез равны нулю. Выполнены необходимые корректировки в системе исходных уравнений и получено окончательное разрешающее уравнение и граничные условия относительно касательных напряжений в пограничном слое. В результате расчета адгезионного соединения установлено, что касательные напряжения в пограничных слоях возрастают, но их рост носит ограниченный характер.

Из анализа уравнения Максвелла-Гуревича при $t \to \infty$ выведены величины длительного модуля упругости и длительного коэффициента Пуассона адгезива, позволяющие получить решение в конце процесса ползучести путем замены в упругом решении мгновенных упругих постоянных на длительные. Подтверждена достоверность результатов решением задачи с использованием введенных постоянных материала.

На рисунке 6.4 показано изменение касательных напряжений при различном уровне нагружения соединения.

В работах [156, 158, 197, 198] приводится расчёт адгезионного соединения на длительную прочность при растягивающем напряжении $q = 70$ МПа. Согласно этим вычислениям, происходим разрушение адгезионного соединения в течение длительного периода времени, равного порядка 2 годам.

а

б

в

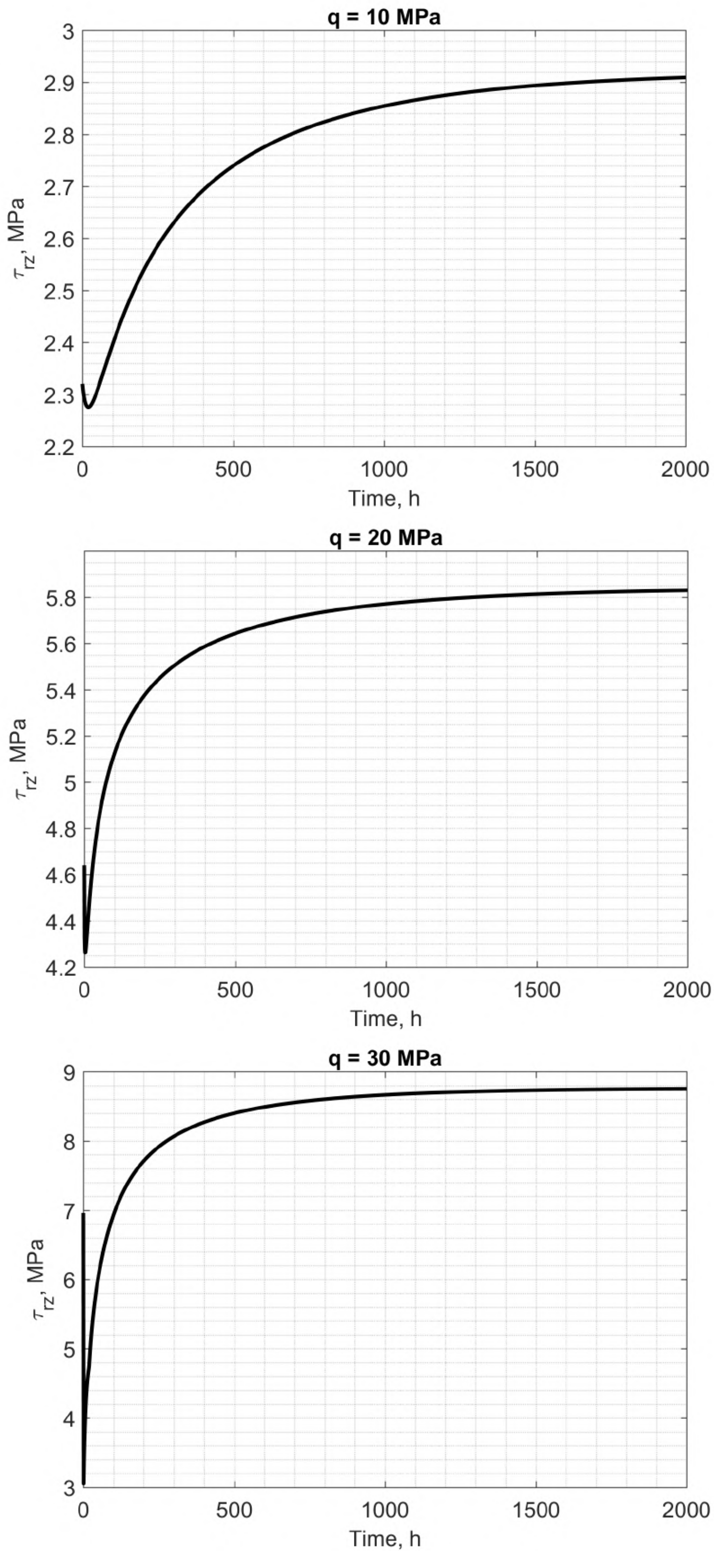


Рисунок 6.4 — Изменение касательных напряжений в адгезионном соединении при различных уровнях нагружений (уточнённый метод пограничного слоя)

Анализ рисунков 6.4 показывает, что учёт слагаемых с $f(R,t)$ в выражении (6.24), в отличие от работ [156, 158, 197, 198], приводит к значительному росту высокоэластических деформаций и разрушение должно произойти при значительно меньших нагрузках. Так, если при растягивающей нагрузке в $q = 10$ МПа наблюдается слабовыраженный уровень неустановившихся высокоэластических деформаций, то при нагрузке $q = 30$ МПа касательные напряжения за счёт неустановившейся высокоэластической деформации изменяются более чем на 50 %. При уровне нагружения $q = 40$ МПа наблюдается на столько быстрый рост высокоэластических деформаций, что разрушение должно произойти практически мгновенно.

6.2 Решение задачи при помощи метода конечных элементов

Проводится исследование прочности адгезионого соединения в двухмерной постановке двух цилиндрический тел (субстратов), постановка задачи представлена на рисунке 6.5 (стр. 209). Алгоритм моделирования адзегионного соединения реализован в пакете прикладных программ, на которое получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [55] (приложение В.3, на стр. 282). В программе реализованы конечный элемент и вектор нагрузок, полученные в главе 5.

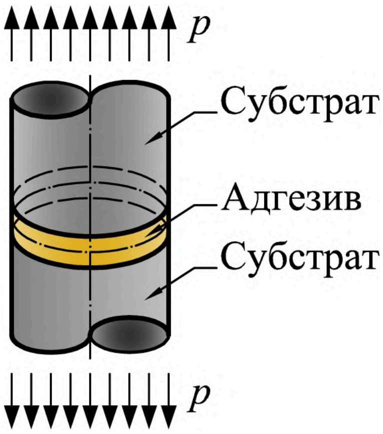


Рисунок 6.5 — Постановка задачи расчёта адгезивного соединения

Исходная условия задачи следующие:

— **Субстрат** — стальные диски толщиной 1.2 мм;

— **Адгезив** — сетчатый полимер — эпоксидная смола ЭДТ-10, компонентами которой являются КДА/ТЭАТ/Спирт/Ацетон в весовых частях 50/5/30/15.

Расчётная схема поставленной задачи представлена на рисунке 6.6 (стр. 210). Красным цветом показан конечный элемент, в котором по результатам последующих расчётов возникают наибольшие касательные напряжения. Поскольку задача симметрична относительно середины адгезива, рассчётная схема состоит только из одной половины.

Физико-механические параметры субстрата и адгезива:

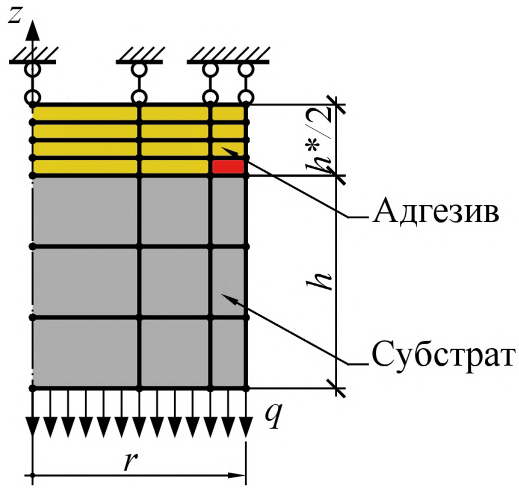


Рисунок 6.6 — Расчётная схема расчёта адгезивного соединения

Адгезив — изменение физико-механических параметров принято согласно [140, 156], где T_K — температура в градусах Кельвина:

$$
\begin{aligned}
E(T) &= -18.2T_K + 8\,200\,\text{МПа};\\
E_{\infty 1}(T) &= \begin{cases} 2.4\cdot 10^6\dfrac{1}{T_K} - 6120\,\text{МПа для } T_K < 370\,K;\\ 2.23T_K - 640\,\text{МПа для } T_K \geq 370\,K;\end{cases}\\
E_{\infty 2}(T) &= 0.1E_{\infty 1}(T);\\
m_1^*(T) &= m_2^*(T) = -0.0155T_K + 7.73\,\text{МПа};\\
\eta_{01}^*(T) &= 36\,000\exp\left(\frac{9\,500}{T_K} - 20\right)\,\text{МПа}\cdot\text{с};\\
\eta_{02}^*(T) &= 36\,000\exp\left(\frac{35\,400}{T_K} - 90\right)\,\text{МПа}\cdot\text{с};\\
\nu(T) &= \text{const} = 0.37.
\end{aligned}
$$

Субстрат

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \text{const} = 2\cdot 10^5\,\text{МПа};\\
\nu(T) &= \text{const} = 0.33.
\end{aligned}
$$

Как видно из представленных физико-механических параметров адгезива, учёт ползучести полимера ведётся при помощи двух спектров времён релаксации, «старшего» $\varepsilon_{cr,I}$ и «младшего» $\varepsilon_{cr,II}$:

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr,I} + \varepsilon_{cr,II}.$$

Расчётные параметры поставленной задачи: температура субстрата и адгезива $T = 30\,^\circ\text{C}$; внешний радиус соединения $r = 12\,\text{мм}$; высота субстрата $h = 1.2\,\text{мм}$; половина высоты адгезива

$h^*/2 = 0.09 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = 0.09\,\text{мм}$; весь расчётный период представлен 251 узлом (количество интервалов по времени $N_t = 250$); отношение последнего интервала времени к самому первому принято $k_t = \dfrac{t_{Nt} - t_{Nt-1}}{t_2 - t_1} = 10^6$; отношение ширины конечного элемента, находящегося вблизи торца цилиндра, к ширине конечного элемента, находящегося в центре рассчитываемого объекта, $k_r = \dfrac{r_{N_r} - r_{Nr-1}}{r_2 - r_1} = 0.01$; по высоте в пределах каждого слоя конечные элементы имеют одинаковую высоту.

Для оценки достоверности результатов, выдаваемых программным комплексом, они были представлены в таблице 6.1 при различных значениях количества конечных элементов по радиусу h_r и высоте адгезива h_z, а также величине растягивающей нагрузки равной $q = 10\,\text{МПа}$.

В курсе теории упругости и сопротивления материалов говорится, что в случае центрального растяжения (сжатия) наибольшие касательные напряжения на произвольных площадках равны половине растягивающей нагрузки, т. е.

$$\tau_{\max} = \frac{q}{2}.$$

Согласно данной формуле наибольшие касательные напряжения для рассматриваемого случая должны составлять 5 МПа.

Анализ данных в таблице 6.1 показывает, что при значительном росте h_r и h_z решение становится неустойчивым. Связано это с тем, что согласно аналитическим выкладкам в месте стыка адгезива и субстрата на свободном торце должна образовываться сингулярность, что указано в работе [198]. В методе конечных элементов, как и любом численном методе, необходимо выбрать оптимальные размеры конечных элементов и их количество, при которых результаты буду близки к ожидаемым. В дальнейших расчётах будут использованы следующие параметры $h_r = 50$ и $h_z = 40$, при которых $\tau_{rz} = 5.03\,\text{МПа}$, что весьма близко к теоретическим 5 МПа в упругой постановке.

Таблица 6.1 — Результат расчёта упругой стадии при растягивающей нагрузке $q = 10$ МПа и различном количестве конечных элементов по радиусу h_r и высоте h_z адгезива: первая строка — касательные напряжения τ_{rz} по модулю; вторая строка — сдвиговые деформации γ_{rz} по модулю; третья строка — время расчёта; н/р — расчёт не производился

h_z	h_r						
	10	20	50	100	200	500	2000
1	1.5326 МПа	1.8158 МПа	2.0502 МПа	2.1431 МПа	2.1928 МПа	2.2237 МПа	2.2354 МПа
	0.0016	0.0019	0.0021	0.0022	0.0022	0.0023	0.0023
	0.311 с	0.3585 с	0.516 с	0.898 с	1.80 с	11.32 с	246.8 с
10	3.7173 МПа	3.7173 МПа	4.202 МПа	4.2692 МПа	4.0724 МПа	3.6169 МПа	н/р
	0.0038	0.0038	0.0043	0.0044	0.0042	0.0037	
	0.625 с	0,559 с	0.7000 с	1.51 с	3.63 с	41.315552 с	
20	3.9605 МПа	3.9605 МПа	4.7146 МПа	5.1052 МПа	5.2246 МПа	4.8260 МПа	н/р
	0.0040	0.0040	0.0048	0.0052	0.0053	0.0049	
	0.3743 с	0,513 с	1.3 с	2.35 с	14.97 с	90.80 с	
50	4.1242 МПа	4.1242 МПа	5.1068 МПа	5.8620 МПа	6.5316 МПа	6.3566 МПа	н/р
	0.0042	0.0042	0.0052	0.0060	0.0067	0.0065	
	0.887 с	0,89 с	2.2 с	10.5 с	52.99 с	346.6 с	
100	4.1822 МПа	4.1822 МПа	5.2566 МПа	6.1798 МПа	7.1970 МПа	5.8861 МПа	н/р
	0.0043	0.0043	0.0054	0.0063	0.0073	0.0060	
	1.55 с	1.63 с	9.4 с	44.4 с	180.2 с	1 141 с	
200	4.2120 МПа	4.2120 МПа	5.3360 МПа	6.3466 МПа	7.5740 МПа	$9.7066 \cdot 10^{-6}$ МПа	н/р
	0.0043	0.0043	0.0054	0.0065	0.0077	0.0095	
	3.39 с	3.28 с	41.5 с	164 с	661.4 с	4 226 с	
500	4.2299 МПа	4.2299 МПа	5.3850 МПа	6.3490 МПа	7.9530 МПа	16.7586 МПа	н/р
	0.0043	0.0043	0.0055	0.0065	0.0081	0.0171	
	37.9 с	39.4 с	253 с	1 014 с	3 967 с	25 103 с	

Для оценки достоверности проделанных выводов выполнено моделирование задачи в упругой постановке при помощи программного комплекса ANSYS, результаты представлены на рисунке 6.7. Моделирование проводилось как прямоугольными конечными элементами (тип 82), так и треугольными (тип 2). Оно показало, что эпюра распределения касательных напряжений в субстрате и адгезиве сплошная по двум материалам до уровня $\tau = q/2$. Значения напряжений касательных напряжений росли при уменьшении размера конечного элемента (при увеличении их числа).

а

б

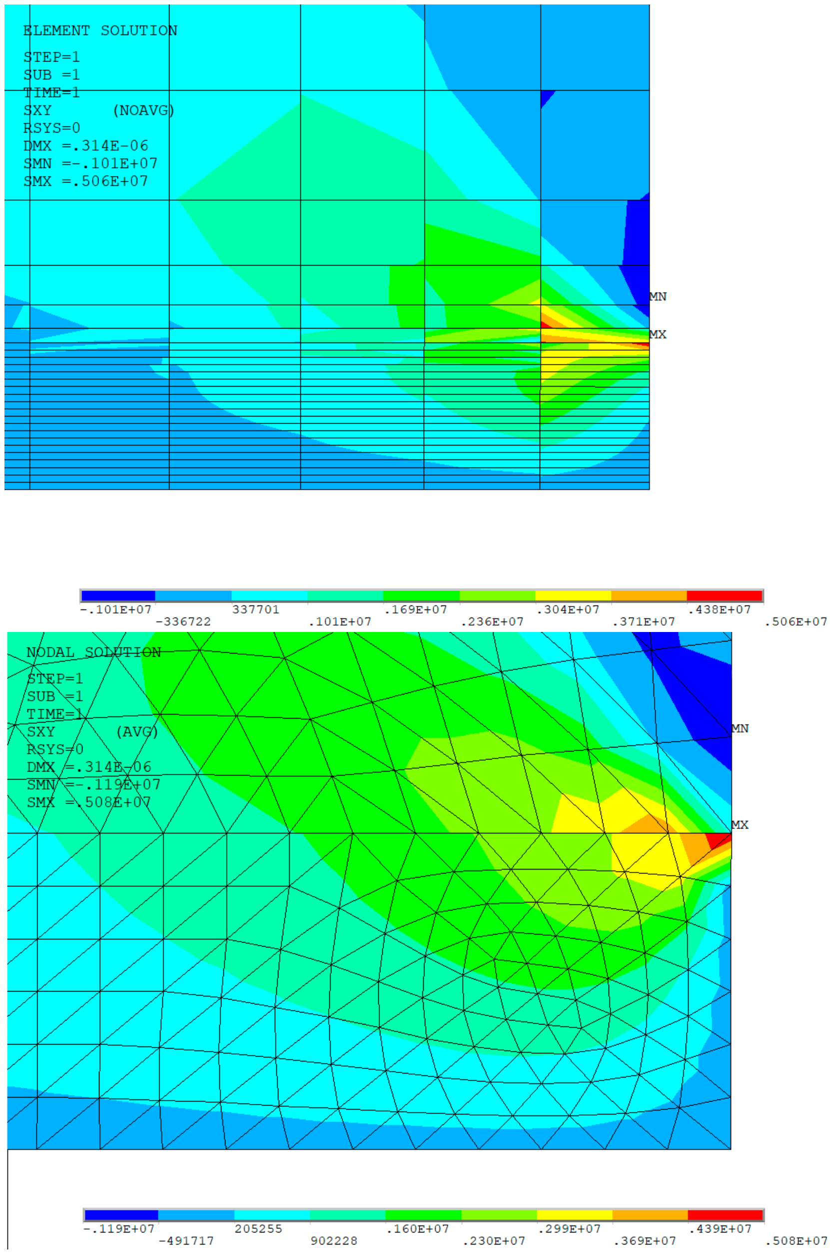


Рисунок 6.7 — Определение касательных напряжений в программном комплексе ANSYS на первом упругом этапе

При этом при бесконечном росте числа конечных элементов появляется сингулярность. Кроме того, превышение касательными напряжениями уровня $\tau = q/2$ приводит к разрывы эпюры τ_{rz}, что говорит о том, что подобного допускать нельзя.

Проведена попытка моделирования пограничного слоя путём аппроксимации адгезива одним единственным конечным элементом по его высоте. Рассмотрим результат решения при $h_r = 2000$ и $h_z = 1$, при котором $\tau_{rz} = 2.24$ МПа. В случае метода пограничного слоя при той же растягивающей нагрузке уровень касательных напряжений составил $\tau_{rz} = 2.32$ МПа, что согласуется в результатом МКЭ и говорит о достоверности полученных результатов. Вывод уравнений метода пограничного слоя базировался на уравнениях теории упругости в точке примыкания адгезива и субстрата, в случае МКЭ напряжения определялись в конечном элементе, соответствующем субстрату, имеющему определённую толщину, чем и объясняется отличие в уровне найденных касательных напряжений.

Следующим этапом проведены результаты прочности адгезионного соединения при $h_z = 1$ с учётом высокоэластических деформаций, которые представлены на рисунках 6.8–6.11 (стр. 216–219) при различных растягивающих напряжениях q.

В сравнении с методом пограничного слоя наблюдается отличие и в характере изменения касательных напряжений. Так при уровне растягивающей нагрузки $q = 10$ МПа и $q = 40$ МПа касательные напряжения стабилизируются и принимают значение по уровню ниже, чем на первом шаге, соответствующем упругой задаче. В методе пограничного слоя напряжения стабилизировались и были по уровню выше, чем на первом этапе. Также необходимо отметить, что в методе пограничного слоя расчёт мог быть произведён до уровня растягивающего усилия меньше, чем $q = 40$ МПа; в методе конечных элементов данный уровень выше и решение может быть получено при уровне напряжений $q = 70$ МПа. Различие объясняется также тем, что напряжения и деформации в методе пограничного слоя определяются по точкам на границе стыка адгезива и субстрата, а МКЭ даёт значения по конечному элементу, имеющему некоторую толщину.

Поскольку, как говорилось ранее, максимально точное значение дает результат, полученный при количестве конечных элементов, равному $h_r = 50$ и $h_z = 40$, проведено моделирование изменения касательных напряжений с учетом развития высокоэластических напряжений. Результаты расчёта представлены на рисунках 6.12–6.15 (стр. 220–223)

На графиках касательных напряжений 6.12 также наблюдается первоначальное снижение их уровня (неустановившаяся ползучесть), последующий значительный их рост и релаксация. Уровень релаксации при этом незначительно ниже максимального наблюдаемого значения касательных напряжений.

Максимальный уровень напряжений, при которых возможен расчет составляет в данном случае 54.2 МПа. При этом наблюдается резкое изменение главных напряжений σ_1 и σ_3.

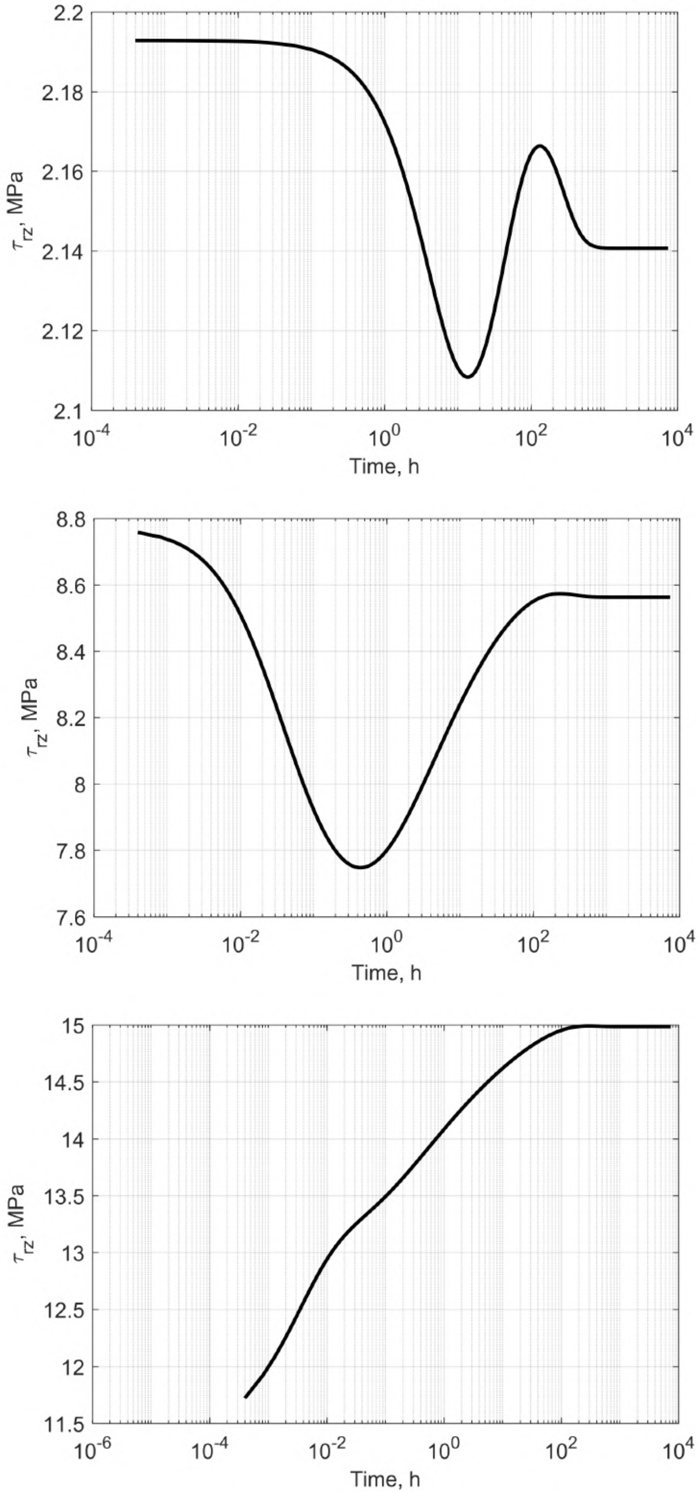
Таком образом можно сделать вывод, что рост касательных напряжений ограничивается некоторым максимальным значением, после которого наблюдается их релаксация. Данные выводы полностью совпадают с уточнённым методом пограничного слоя, приведённым в параграфе 6.1 по характеру изменения касательных напряжений, но не по их интенсивности. Объясняется это тем, что работа адгезива моделируется более точно в связи с большим числом конечных элементов по его высоте.

Тем не менее, полученные результаты значительно отличаются от приведённых в работах [156, 158, 197, 198], в которых касательные напряжения с течением времени растут по нарастающей. Данное расхождение объясняется тем, что в работах [156, 158, 197, 198] использована гипотеза, согласно которой сдвиговые касательные напряжения пренебрежимо малы и не учитывались в выводе разрешающих уравнений. Применение данной гипотезы приводит к тому, что в разрешающие уравнения не учитывают быстрый рост сдвиговых высокоэластических деформаций при высокй интенсивности растягивающего усилия, что позволяет получить решение при более высоких уровнях q. Кроме того, анализ вышеуказанных трудов показывает, что в них не соблюдается условие на начальном этапе времени $\tau = q/2$. Резюмируя вышесказанное, исследования настоящей работы являются уточнением и расширением исследований, приводимых в трудах [156, 158, 197, 198].

На графике 6.16 (стр. 224) представлено распределение касательных напряжений по адгезиву. Отчётливо виден резкий рост уровня касательных напряжений к внешнему краю цилиндра, что хорошо согласовывается с уточненным методом пограничного слоя и с трудами [156, 158, 197, 198] по характеру. Изменение касательных напряжений по высоте нелинейное и не может быть описано ни уточнённым методом пограничного слоя, ни исследованиями в работах [156, 158, 197, 198]

Также некоторой косвенной оценкой достоверности полученного решения может служить сравнение результатов решения по нелинеаризованной и линеаризованной теориям. В случае линеаризованной теории, как говорилось ранее, коэффициент релаксационной вязкости η^* принимается постоянным и равным коэффициенту начальной вязкости η_0^*. На рисунке 6.17 (стр. 225) представлены результаты расчёта.

Решение по нелинеаризованной теории имеет выраженную неустановившуюся ползучесть на начальном этапе. Решение по линеаризованной теории даёт более высокие максимальные значения касательного напряжения. Однако, и по нелинеаризованной, и по линеаризованной теориям релаксация напряжений наблюдается в один момент и имеет один постоянный во времени уровень. Данные результаты также говорят в пользу их достоверности.



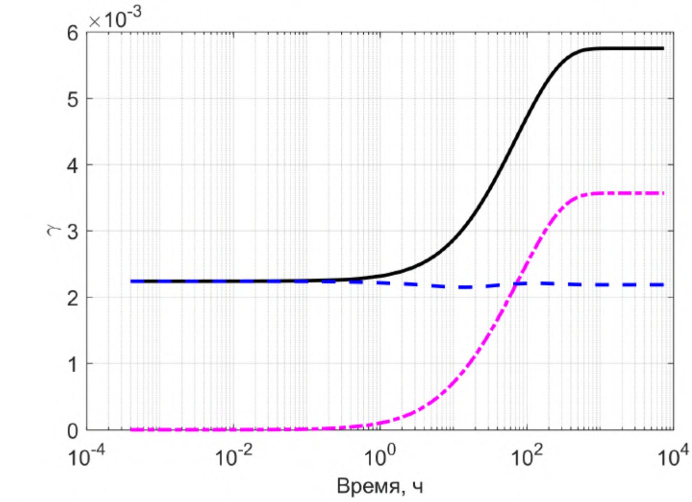
а

б

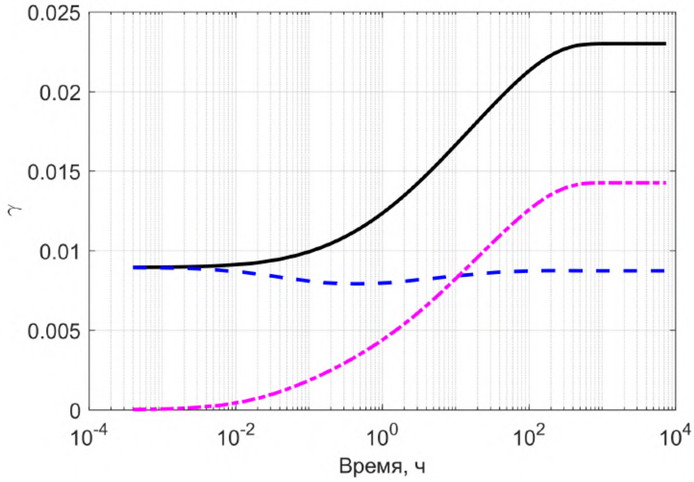
в

Рисунок 6.8 — Изменение касательных напряжений τ_{rz} в адгезиве с течением времени при $h_z = 1$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 40$ МПа; в — $q = 70$ МПа

а



б



в

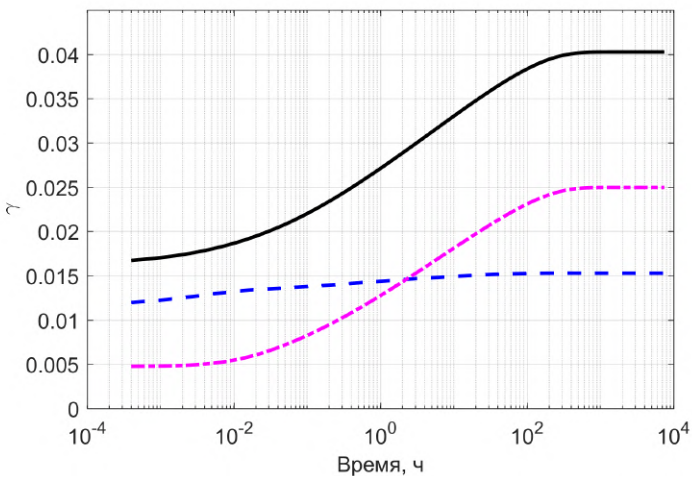


Рисунок 6.9 — Изменение сдвиговых деформаций γ в адгезиве с течением времени при $h_z = 1$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 40$ МПа; в — $q = 70$ МПа; линии: сплошная чёрная — полная деформация $\gamma = \gamma_{el} + \gamma_{cr}$; пунктирная синяя — упругая деформация γ_{el}; штрихпунктирная красная — высокоэластическая деформация $\gamma_{cr} = \gamma_{cr1} + \gamma_{cr2}$

а

б

в

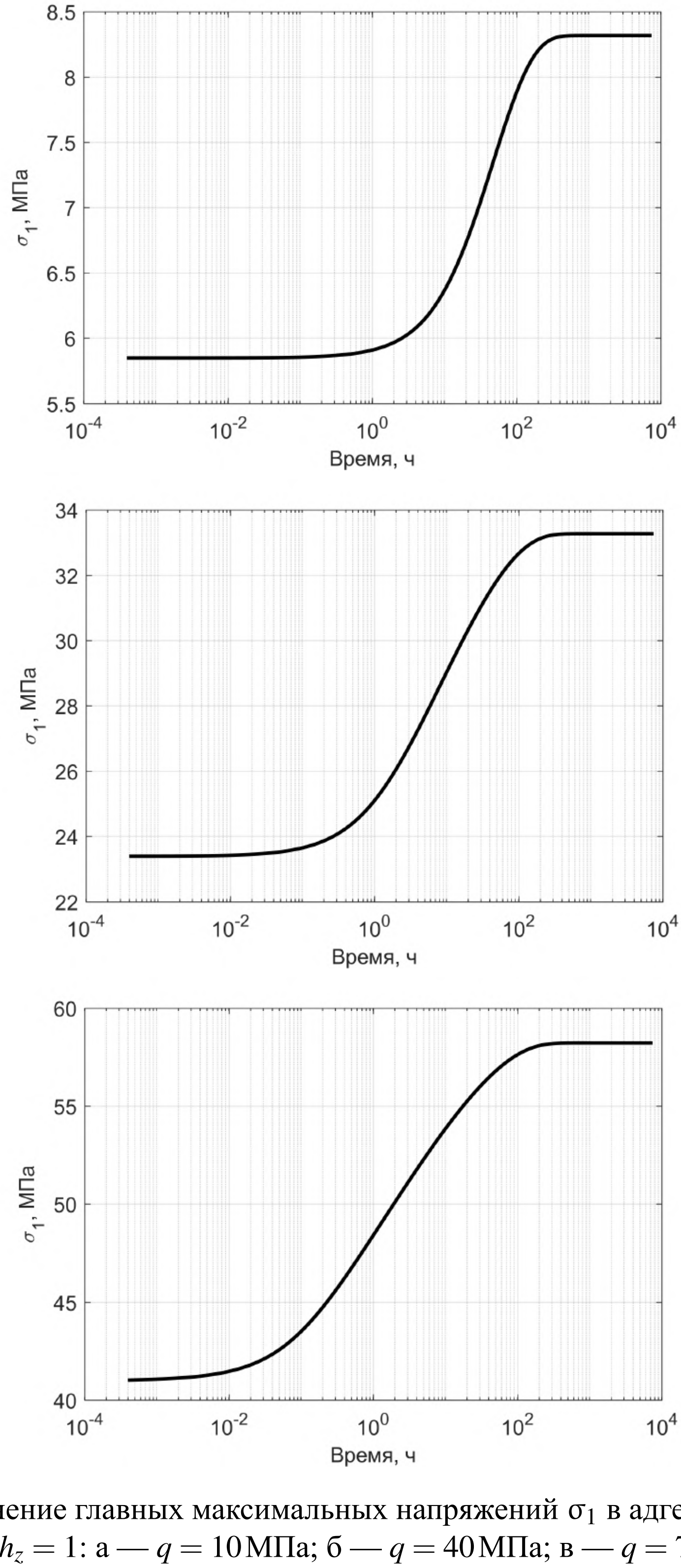


Рисунок 6.10 — Изменение главных максимальных напряжений σ_1 в адгезиве с течением времени при $h_z = 1$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 40$ МПа; в — $q = 70$ МПа

а

б

в

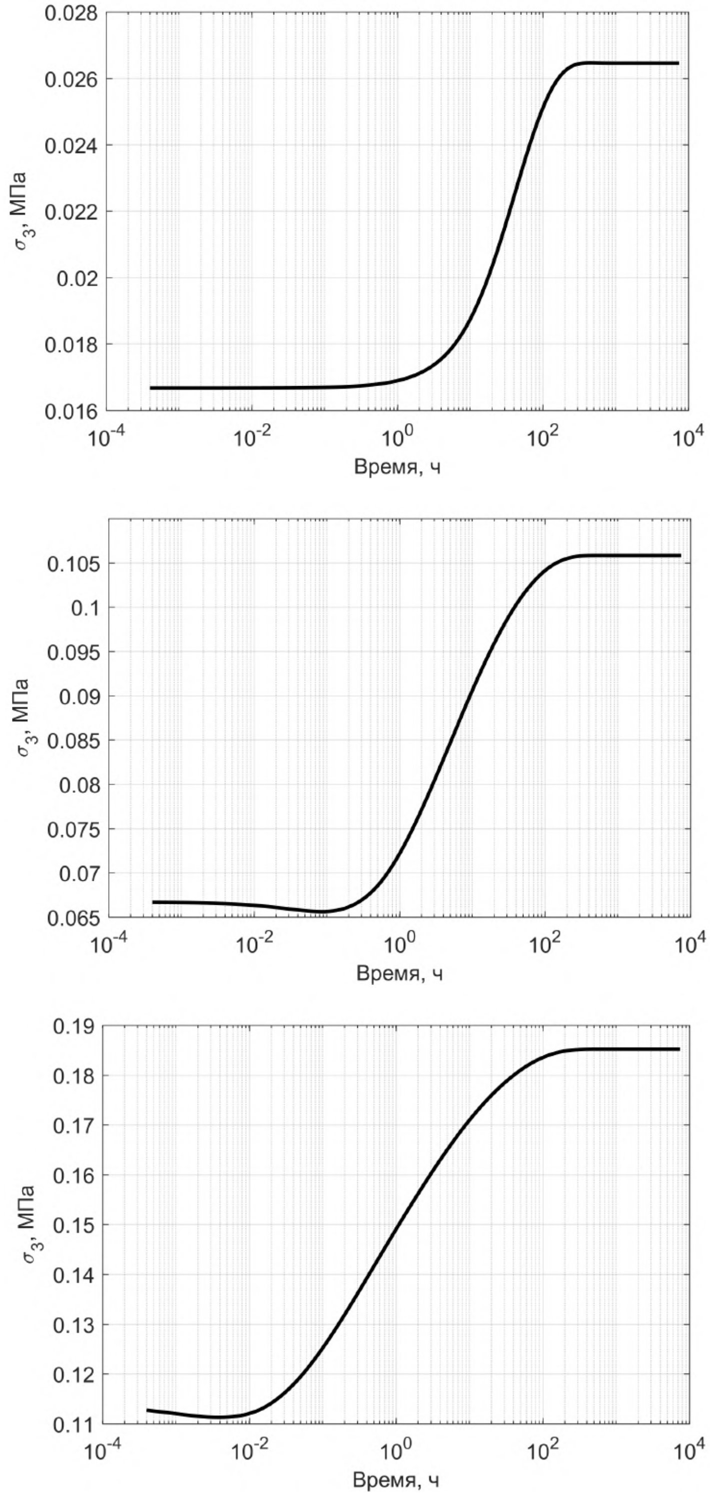


Рисунок 6.11 — Изменение главных минимальных напряжений σ_3 в адгезиве с течением времени при $h_z = 1$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 40$ МПа; в — $q = 70$ МПа

а

б

в

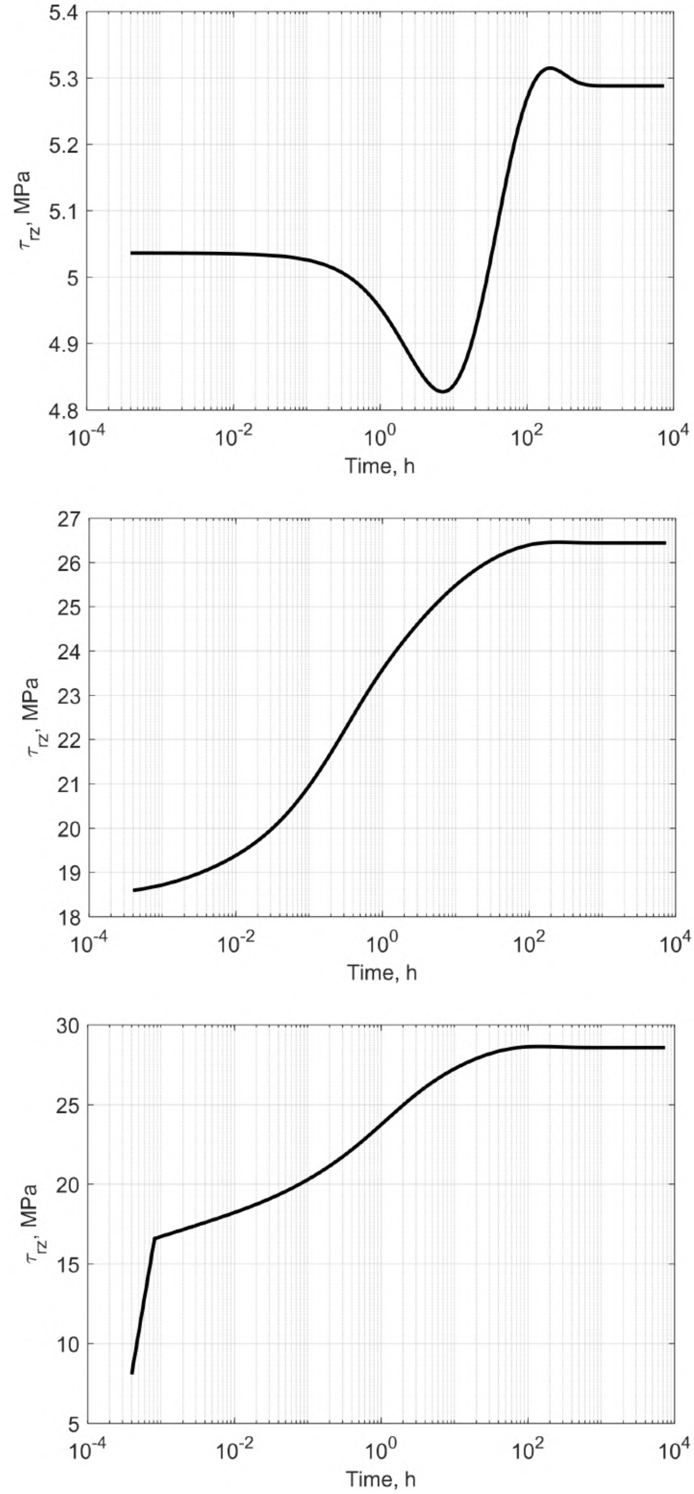


Рисунок 6.12 — МКЭ: Изменение касательных напряжений τ_{rz} в адгезиве с течением времени при $h_z = 40$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 50$ МПа; в — $q = 54.2$ МПа

а

б

в

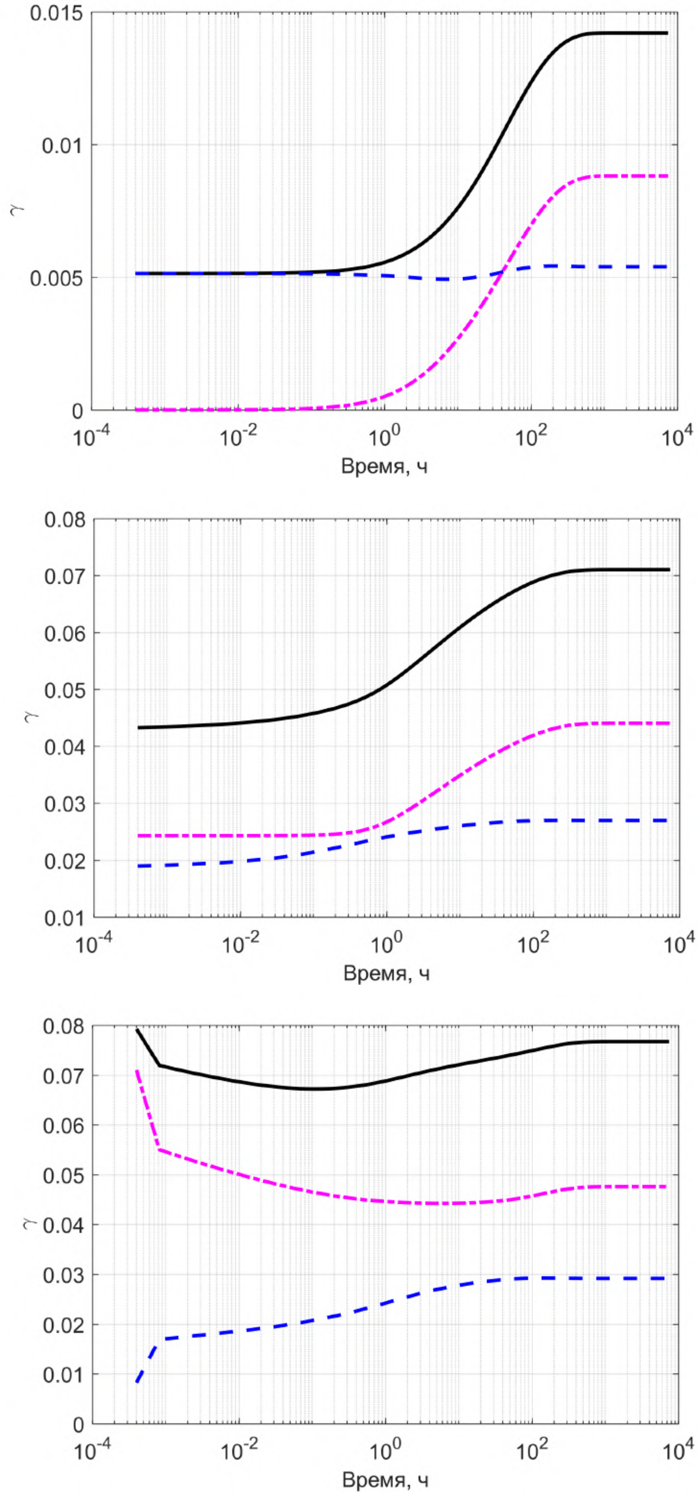


Рисунок 6.13 — МКЭ: Изменение сдвиговых деформаций γ в адгезиве с течением времени при $h_z = 40$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 50$ МПа; в — $q = 54.2$ МПа; линии: сплошная чёрная — полная деформация $\gamma = \gamma_{el} + \gamma_{cr}$; пунктирная синяя — упругая деформация γ_{el}; штрихпунктирная красная — высокоэластическая деформация $\gamma_{cr} = \gamma_{cr1} + \gamma_{cr2}$

а

б

в

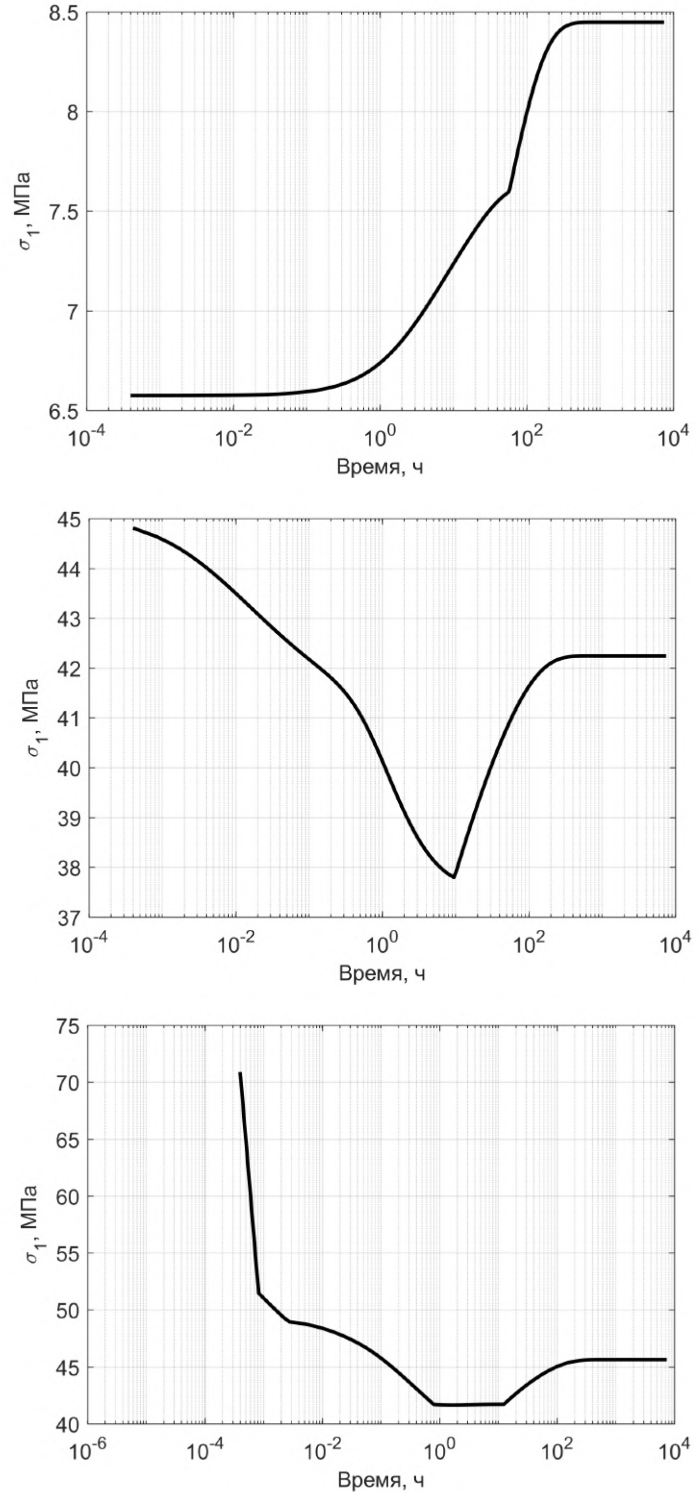
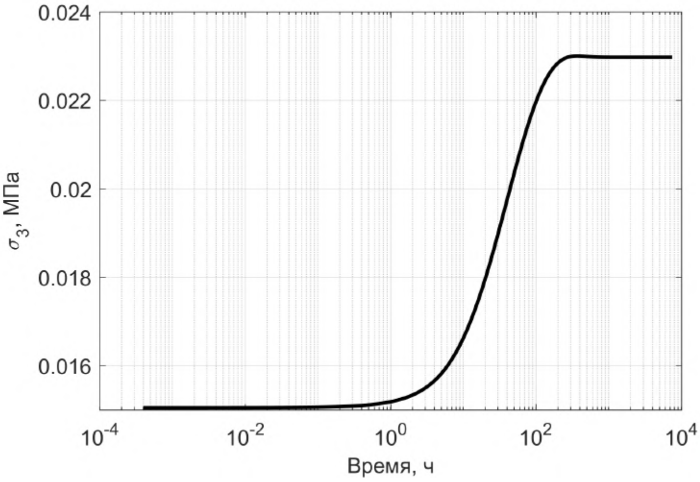
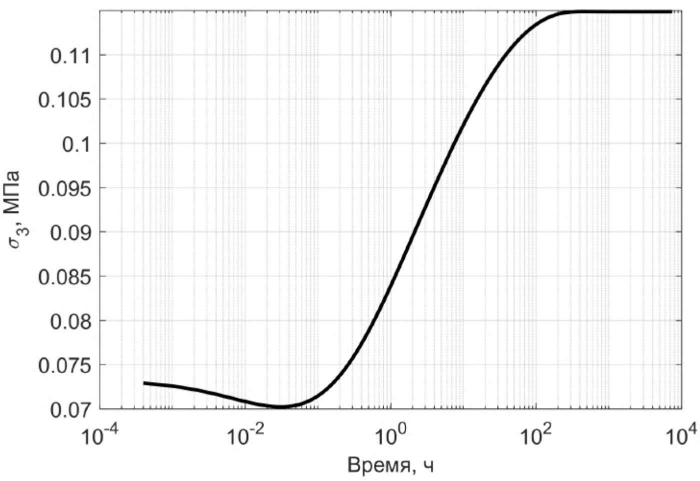


Рисунок 6.14 — МКЭ: Изменение главных максимальных напряжений σ_1 в адгезиве с течением времени при $h_z = 40$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 50$ МПа; в — $q = 54.2$ МПа

а



б



в

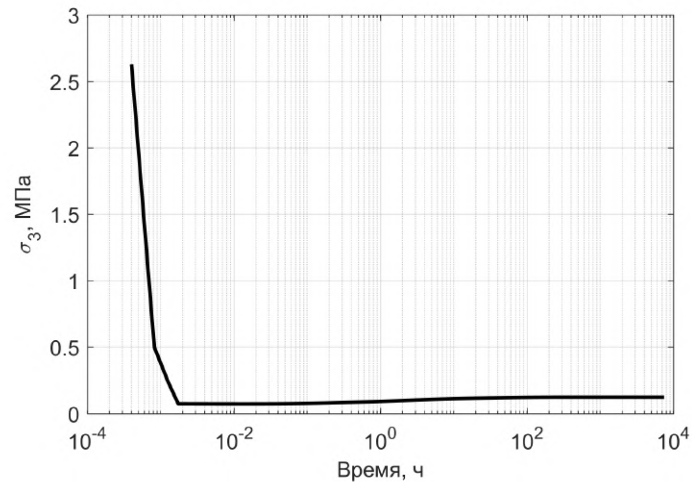


Рисунок 6.15 — МКЭ: Изменение главных минимальных напряжений σ_3 в адгезиве с течением времени при $h_z = 40$: а — $q = 10$ МПа; б — $q = 50$ МПа; в — $q = 54.2$ МПа

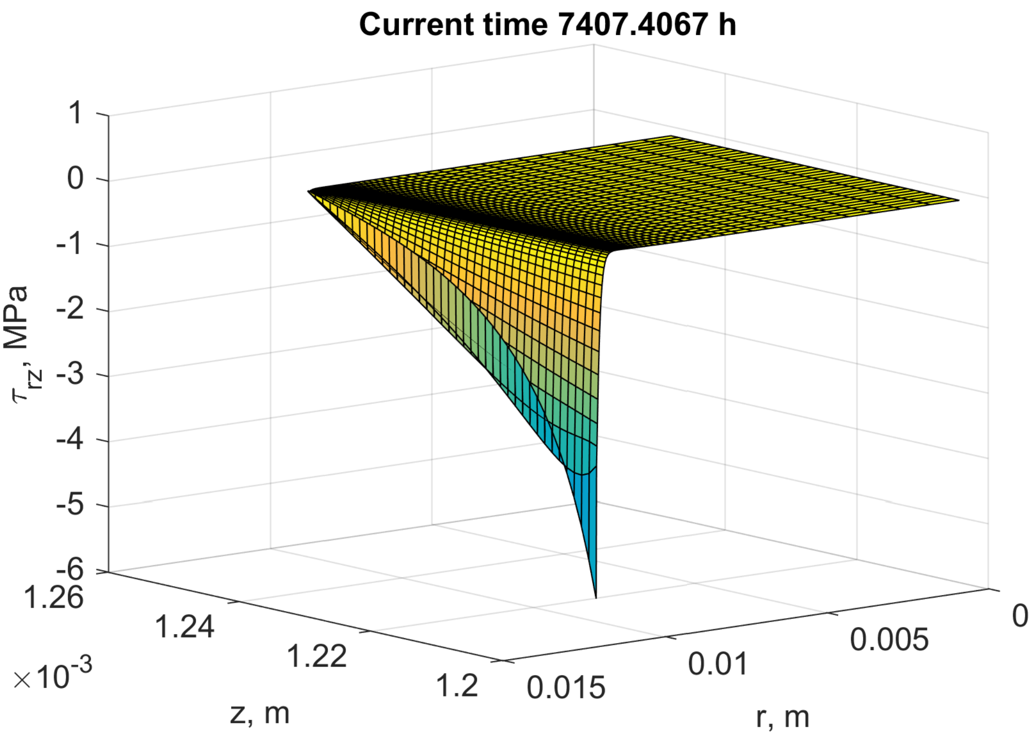


Рисунок 6.16 — Распределение касательных напряжений в адгезиве при $q = 10\,\text{МПа}$

а

б

в

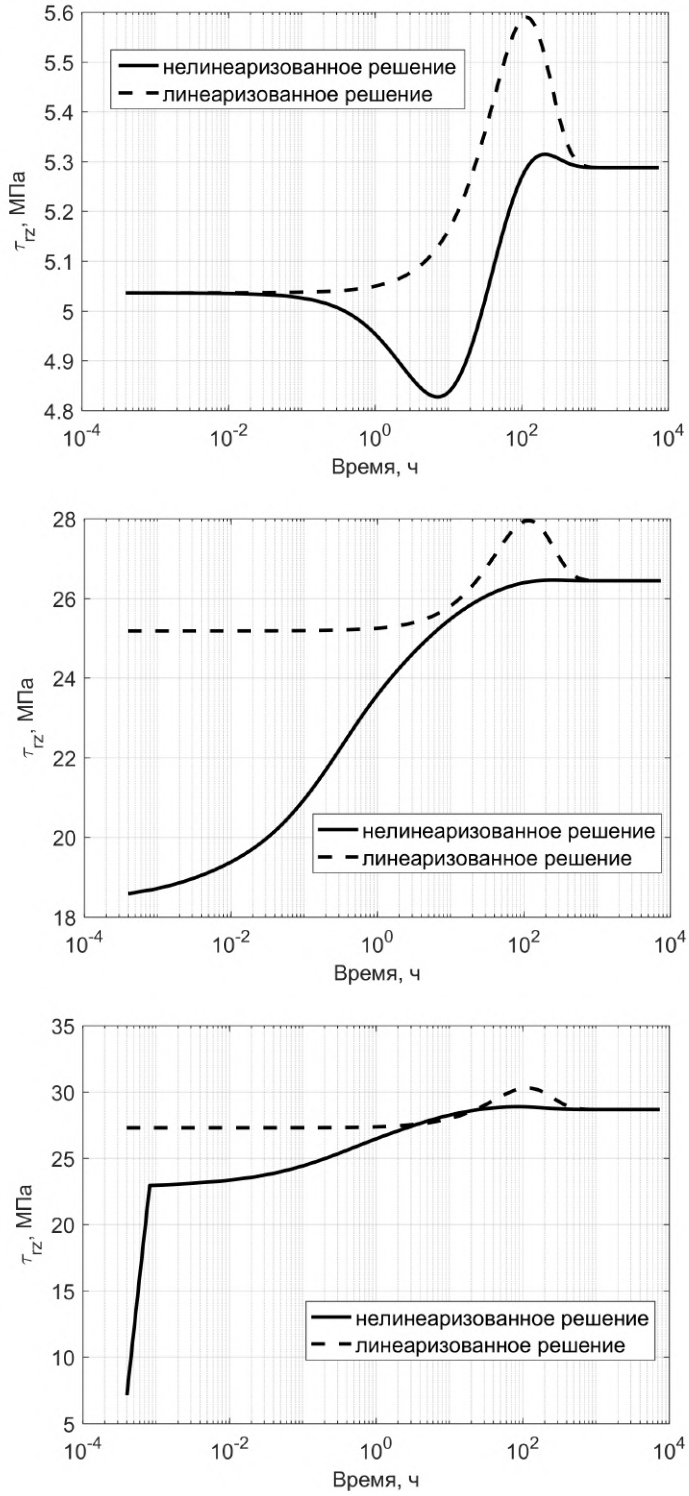


Рисунок 6.17 — Сравнение роста касательных напряжений, полученных по нелинеаризованной и линеаризованной теориям в адгезиве с течением времени при $h_z = 40$: а — $q = 10\,$МПа; б — $q = 50\,$МПа; в — $q = 54.2\,$МПа

6.3 Прочность адгезионного соединения при различных температурах

Поскольку физико-механические параметры адгезива, согласно выражению (6.2), являются значительными функциями температуры, был проведен расчет напряженно-деформированного состояния адгезионного соединения при интенсивности растягивающего усилия $q = 10$ МПа и следующих неизменных во времени температурных режимах: 0, 10, 20 и 30 °C. При больших температурах происходило значительное снижение физико-механических параметров, в результате чего задача приобретала геометрическую нелинейность, которую в рамках диссертационной работы не учитывают. Результаты расчёта изменения касательных напряжений в адгезиве в нелинейной и линеаризованной постановках с течением времени представлены на рисунке 6.18

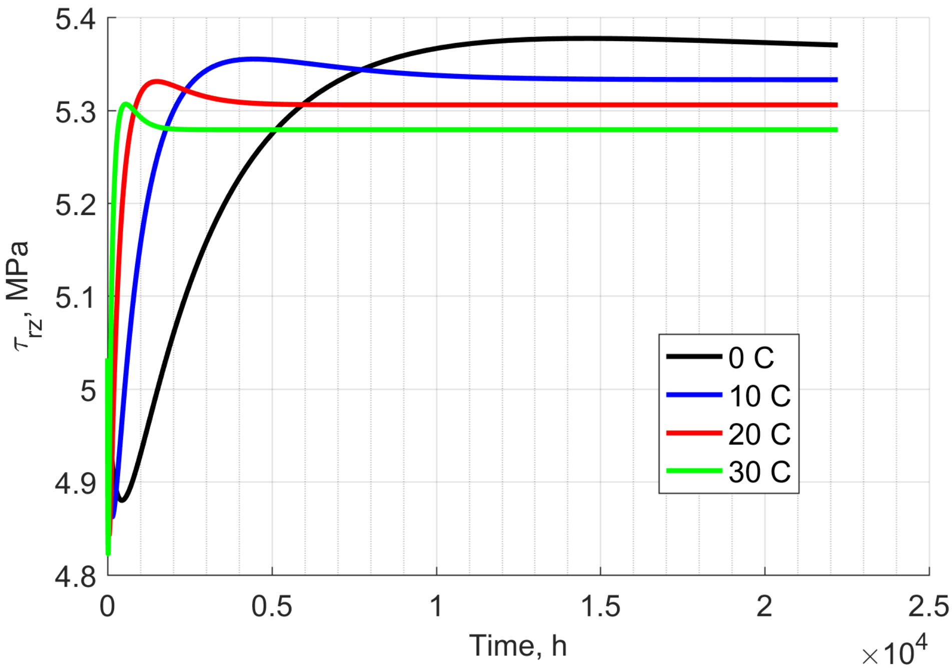


Рисунок 6.18 — Изменение интенсивности касательных напряжений при $q = 10$ МПа и различных температурах: чёрная линия — 0 °C; синяя линия — 10 °C; красная линия — 20 °C, зелёная линия — 30 °C

Изменение температуры от 0 до 30 °C практически не сказывается на величине максимального напряжения, однако влияет на период, когда стабилизируется максимальное касательное напряжение; при росте температуры напряжение стабилизируется при меньшем времени. Так, при температуре 0 °C время стабилизации напряжения даже выходит за исследуемый период времени.

6.4 Экспериментальная апробация расчётной модели

Для апробации расчётной конечно-элементной модели проведены опытные исследования. Из алюминиевой болванки изготовлено 10 пар заготовок для соединения их адгезивом (рисунок 6.19, а). Узкая часть образцов принята такой же, как и в работах проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова [156, 158, 197, 198], а также во время конечно-элементного моделирования в параграфе 6.2, т. е. $d = 2.4$ см (рисунок 6.19, б).

Поскольку толщина адгезива очень мала (примерно $h^*/2 = 0.09 \cdot 10^{-3}$ м $= 0.09$ мм), то необходимо оценить шероховатость поверхности алюминиевых образцов. Для этого использовался профилометр модели 130 (рисунок 6.20, а). Испытания показали среднее арифметическое из абсолютных значений отклонений профиля в пределах базовой длины $Ra = 1.9295$ мкм (рисунок 6.20, б). Значение параметра Ra более чем на порядок меньше толщины слоя адгезива, что позволяет говорить о работоспособности применённой конечно-элементной модели и пренебрежения учёта шероховатости в ней.

В качестве адгезива использована эпоксидная смола ЭДТ-10, компонентами которой являются КДА/ТЭАТ/Спирт/Ацетон в весовых частях 50/5/30/15 (рисунок 6.21).

Для испытания подготовленных образцов на нормальный отрыв использовалась универсальная испытательная машина WP-300 с компьютерной системой сбора и обработки данных GUNT (рисунок 6.22). Для обеспечения постоянства внешних факторов испытания проводились в климатической камере НТКК-1.8/2/2 при постоянной температуре 20°C. Изготовлены 10 алюминиевых болванок, залитых эпоксидной смолой (рисунок 6.23).

Выполнена серия испытаний 10 образцов на растяжение, в результате которой получена средняя нагрузка, приводящая к разрушению адгезионного соединения, равная 4.9 кН (рисунок 6.24, а), что соответствует среднему напряжению в образцах на месте соприкосновения алюминия с эпоксидной смолой равному $p = 10.8314$ МПа. Исследование образца после испытания демонстрирует явное адгезионное разрушение (рисунок 6.24, б). Математическое моделирование показало, что разрушающее напряжение при этом составляет $\tau_{adhezive} = 4.10$ МПа.

Произведён прогноз теоретического времени разрушения. Полученный уровень напряжения $\tau_{adhezive}$ был принят за допускаемый уровень, превышение которого приводит к разрушению адгезионного соединения. Далее от уровня нагружения, приводящего к моментальному разрушению адгезионного соединения $F = 4.9$ кН происходило постепенное снижение нагрузки с шагом 0.05 кН. Параллельно путем математического конечно-элементного моделирования определялось теоретическое время разрушения образца. Снижение нагрузки продолжалось до тех пор, пока согласно математической модели или время разрушения не превысит 24 часа, или в результате релаксации максимальные касательные напряжения через некоторый момент времени начнут уменьшать свой уровень в результате чего разрушение не произойдёт вовсе. Имея теоретическое время разрушения, были проведены испытания над реальными образцами, результаты которых приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 — Результаты проведения испытаний адгезионного соединения на нормальный отрыв

Приложенная растягивающая нагрузка, кН	Теоретическое время разрушения, ч	Фактическое среднее время разрушения, ч	Проведённое количество испытаний, шт	δ, %
4.90	0.00	0.00	10	0
4.85	2.00	2.10	10	5
4.80	4.50	4.75	10	6
4.75	8.00	8.40	5	5
4.70	11.80	12.50	5	6
4.65	16.50	18.00	3	9
4.60	22.30	24.75	3	11

Анализ полученных результатов показывает, что моделирование адгезионного соединения в пределах 24 часов даёт весьма хорошее согласование теории и эксперимента.

Погрешность определения времени разрушения адгезионного соединения выросла при увеличении теоретического времени разрушения соединения, что может быть связано с многими причинами: снижением количества проводимых испытаний, отличием реальных физико-механических параметров адгезива от заложенных в математической модели, погрешностью в образцах при их заливке, времени отверждения и т.д.

Необходимо отметить и явные недостатки проведенных испытаний и дать рекомендации будущим исследователям к их устранению.

Математическая модель учитывает два спектра времён релаксации полимера: «старший» и «младший». При этом второй спектр начинает проявляться лишь при длительных периодах испытаний — свыше 100 часов. Таким образом в эксперименте оценена прочность адгезионного соединения исключительно на основании развития высокоэластических деформаций полимера «старшего» спектра.

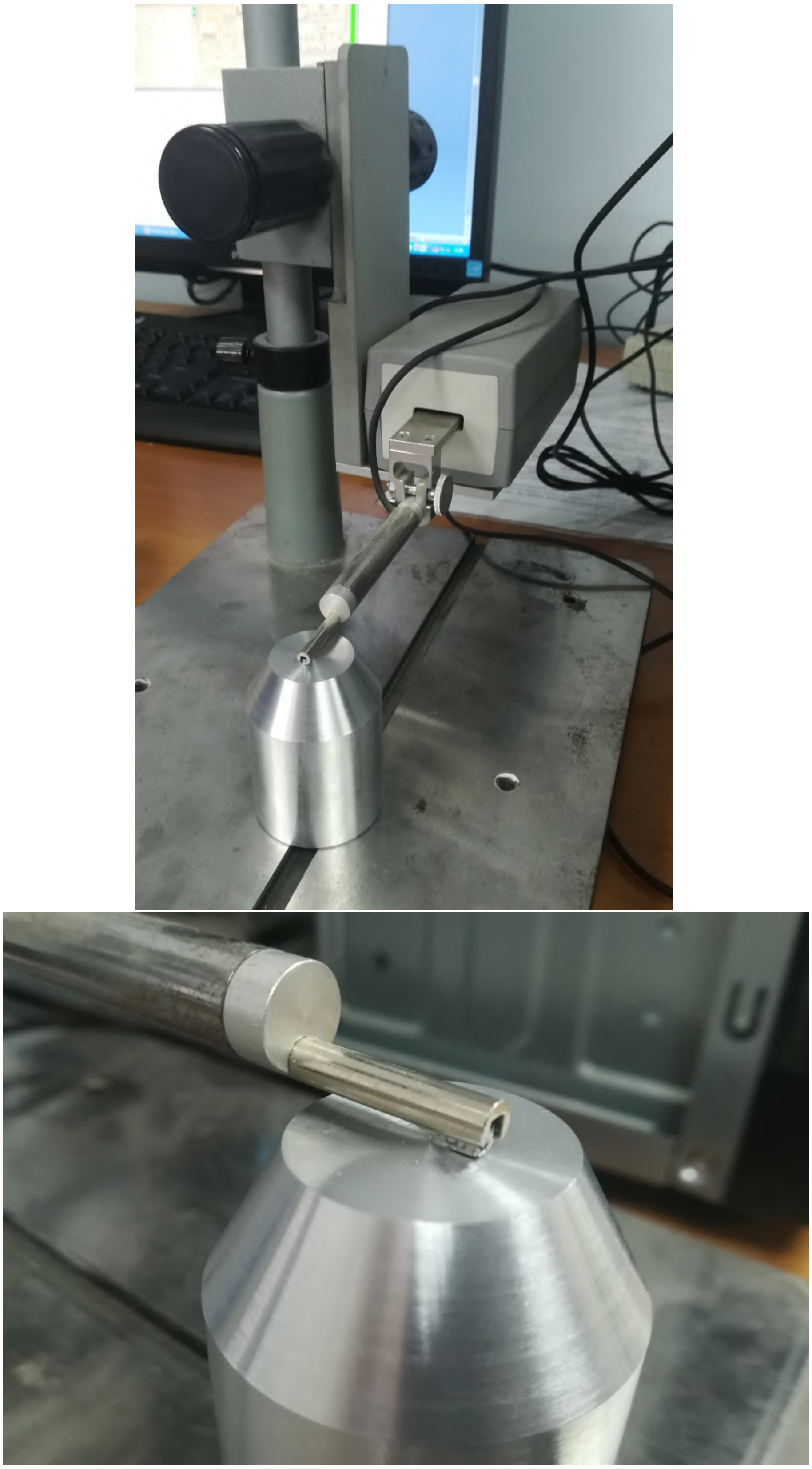
Имеющаяся зависимость физико-механических параметров полимера позволяет учитывать высокоэластические деформации в широком спектре температур. Описанные выше испытания проводились при постоянной температуре окружающей среды 20°C. Представляет большой научный интерес исследование прочности адгезионного соединения и при других температурных режимах, в том числе и непостоянных во времени.

Прочность адгезионного соединения оценивалась только по одному параметру — предполагаемому времени разрушения. Провести сопоставление теории с экспериментом можно и по иным параметрам: развитию перемещений в адгезиве, оценке уровня напряжений в полимере, в том числе и поляризационным методом. Однако для этого требуются специализированная лаборатория и в рамках типового лабораторного оборудования не может быть реализовано.

а

б

Рисунок 6.19 — Алюминиевая болванка (а) и заготовки из неё (б)



а

б

Рисунок 6.20 — Определение шероховатости поверхности цилиндрических образцов: а — профилометр модели 130; б — проведение испытания

Рисунок 6.21 — Эпоксидная смола и отвердитель для проведения испытания

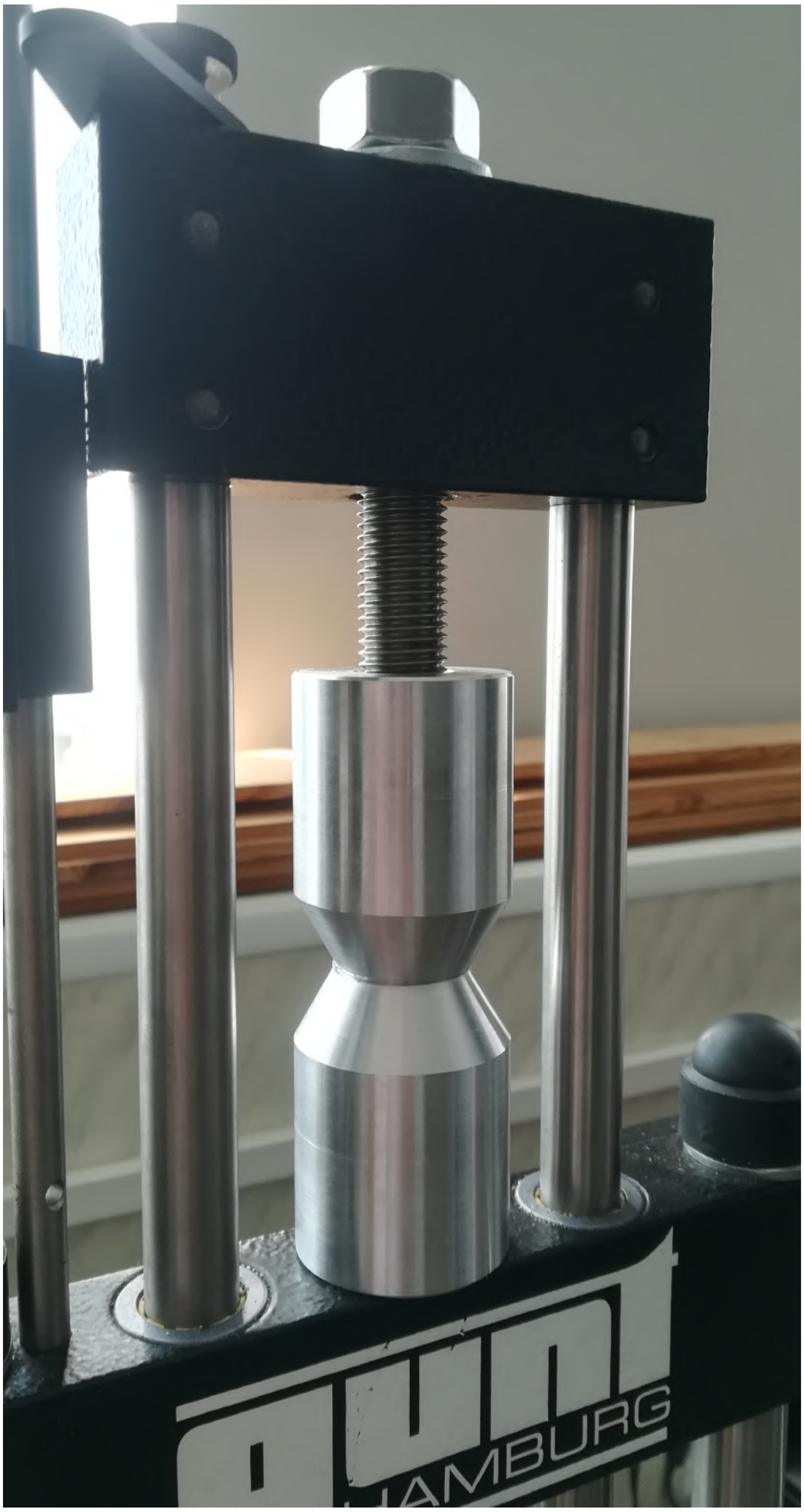


Рисунок 6.22 — Универсальная испытательная машина WP-300 с компьютерной системой сбора и обработки данных GUNT

Рисунок 6.23 — Начало проведения эксперимента

а

б

Рисунок 6.24 — Результат проведения эксперимента: уровень нагрузки в момент разрушения, кН (а) и адгезионное разрушение на поверхности алюминиевых образцов (б)

6.5 Выводы по главе

1. Уточнено решение адгезионного соединения при помощи метода конечных элементов, в результате чего оценка длительной прочности имеет иной результат, нежели при решении, полученном при помощи метода пограничного слоя.
2. Представлено влияние учёта развития сдвиговых высокоэластических деформаций в полимерном слое.
3. Доказано, что при оценке прочности адгезионного соединения допускается использовать линеаризованное уравнение вместо нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича для снижения времени и трудозатрат на получения решения.
4. Сделан вывод, что изменение температур не влияет на максимальное значение максимального касательного напряжения, однако значительно сказывается на времени, когда касательное напряжения приходит к некоторому конечному значению.
5. Экспериментально доказана работоспособность предложенной математической конечно-элементной модели по расчёту длительной прочности адгезионного соединения на нормальный отрыв.

Заключение

В результате проделанных исследований предложена математическая модель определения напряжённо–деформированного состояния полимерных тел на основании нелинейного обобщённого уравнения Максвелла–Гуревича и с учётом неоднородности материала, вызванной температурным полем. Путём непосредственного конечно–элементного моделирования произведена оценка длительной прочности адгезионного соединения.

На основании приведённых результатов можно сделать следующие выводы:

1. Усовершенствовано научное направление, связанное с методикой расчёта полимерных тел на прочность в термовязкоупругой постановке.

2. Доказана необходимость использования комплексного подхода к расчёту конструкций и их элементов из полимерных материалов, заключающегося не только в корректном моделировании конечно–элементной сетки по телу, но и во времени, а также использование моделей, учитывающих наличие обратимых деформаций ползучести с определением физико–механических параметров исследуемого полимера.

3. Разработана методика определения физико–механических параметров полимера как в зависимости от температуры, так и от содержания добавок и ионизирующего излучения. При этом физико–механические параметры полимера являются функцией от двух переменных.

4. Доказано, что для полноценной оценки напряжённо–деформированного состояний конструкций из полимера необходимо проведение испытаний с последующим определением физико–механических параметров для данных условий с учётом внешних факторов (температурное поле, химическая усадка, ионизирующее излучение и т.д.). Параметры полимера, полученные при нормальных условиях, могут быть использованы для определения напряжённо–деформированного только в приближённых инженерных расчётах.

5. Разработана методика определения теоретической неоднородности материала с целью создания равнопрочного полимерного тела, обусловленной воздействием на последнего физических полей или наличия добавок.

6. Разработан новый 4–узловой конечный элемент при помощи численно–аналитического решения заданной аппроксимирующей функции, учитывающий температурное воздействие и реологию полимера.

7. Разработана и реализована в виде пакета прикладных программ для программного комплекса MatLab методика расчёта гомогенных и гетерогенных систем в условиях термовязкоупругости при помощи разработанного ранее 4–узлового конечного элемента.

8. Предложено решение практически важной задачи определения напряжённо–деформированного состояния полимерного цилиндра, выходящего из экструдера с учётом переменного температурного поля.

9. Уточнена модель расчёта длительной прочности адгезионного соединения при помощи разработанного 4–узлового конечного элемента.

10. Доказана достоверность расчёта адгезионного соединения путем моделирования в нелинеаризированной и линеаризированной постановках.

11. Доказана необходимость использования полноценного моделирования конечными элементами адгезионного соединения вместо использования таких методов, как метод пограничного слоя.

Литература

1. Розовский, М. И. Ползучесть и длительное разрушение материалов [Текст] / М. И. Розовский // Техн. физика. — 1951, — Т. XXI. — М.: Мир, 1972. — 418 с.

2. Ильюшин, А. А. Упруго-пластические деформации полых цилиндров [Текст] / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 277 с.

3. Малмейстер, А. К. Сопротивление жестких полимерных материалов [Текст] / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. — Рига: Зинатнс, 1972. — С. 498.

4. Дудник, А. Е. Нестационарная задача теплопроводности для электрического кабеля с ПВХ изоляцией [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2015. —№ 6. — С. 49–51.

5. Дудник, А. Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Пластические массы. — 2016. — № 1–2. — С. 30–33.

6. Дудник, А. Е. Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости [Электронный ресурс] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, А. С. Денего // Инженер. вестник Дона. — 2015. — № 2, ч. 2. — URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063 (дата обращения: 19.12.2018).

7. Курачев, Р. М. Моделирование напряженно-деформированного состояния корпуса высокого давления с учетом воздействия физических полей [Электронный ресурс] / Р. М. Курачев, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Соврем. наукоемкие технологии. — 2016. — № 2–3. — С. 430–434. — URL: http://top-technologies.ru/ru/article/view?id=35647 (дата обращения: 19.12.2018).

8. Литвинов, С. В. Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра [Текст] / С. В. Литвинов // Материалы III Междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2007. — С. 27–32.

9. Литвинов, С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела из модифицированного ПЭВП [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, С. Б. Языев, И. М. Зотов // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 7. — С. 118–122. — URL: http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1488 (дата обращения: 01.10.2019).

10. Литвинов, С. В. Моделирование процессов деформирования многослойных цилиндрических тел при термомеханических нагрузках: монография [Текст] / С. В. Литвинов, С. Б. Языев. — Ростов н/Д.: Рост. гос. строит. ун-т, 2009. — 96 с.

11. Литвинов, С. В. Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. Е. Дудник // Инженер. вестник Дона. — 2016. — № 2. — URL: http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560 (дата обращения: 19.12.2018).

12. Литвинов, С. В. Напряженно-деформированное состояние многослойных поли-мерных труб с учетом ползучести материала [Текст] / С. В. Литвинов, Г. М. Данилова–Волковская, А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко // Соврем. наука и инновации. — 2015. — № 3 (11). — С. 71–78.

13. Литвинов, С. В. Нелинейная ползучесть неоднородных многослойных цилиндров и сфер [Текст]: дис. …канд. техн. наук: 01.02.04 / Литвинов Степан Викторович. — М., 2010. — 200 с.

14. Литвинов, С. В. Осесимметричная термоупругая деформация цилиндра с учетом двухмерной неоднородности материала при воздействии теплового и радиационного нагружений [Текст] / С. В. Литвинов, Ю. Ф. Козельский, Б. М. Языев // Вестник МГСУ. — 2012. — № 11. — С. 82–87.

15. Литвинов, С. В. Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учетом нелинейной ползучести [Текст] / С. В. Литвинов, С. Б. Языев, С. Б. Языева // Вестник МГСУ. — 2010. — № 1. — С. 128–132.

16. Литвинов, С. В. Ползучесть полимерного цилиндра, находящегося в стадии охлаждения [Текст] / С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16, вып. 6. — С. 1089.

17. Литвинов, С. В. Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Ю. Ф. Козельский, Б. М. Языев // Инженер. вестник Дона. — 2012. — № 3. — URL: http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/954 (дата обращения: 19.12.2018).

18. Литвинов, С. В. Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. А. Савченко, С. Б. Языев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 5. — С. 78–83. — URL: http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1261/783 (дата обращения: 22.05.2019).

19. Литвинов, С. В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Б. М. Языев, А. Н. Бескопыльный // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 4. — URL: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4y2011/704 (дата обращения: 19.12.2018).

20. Чепурненко, А. С. Уточнение решения задачи о длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве [Текст] / А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, С. Б. Языев, Л. С. Сабитов // Строительная механика и расчёт сооружений. — 2020. — № 3. — С. 26–31.

21. Языев, Б. М. Задача термоупругости для многослойного неоднородного цилиндра [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Строительство–2007: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2007. — С. 86–87.

22. Языев, Б. М. Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра (часть 1) [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Пластические массы. — 2007. — № 9. — С. 36–38.

23. Языев, Б. М. Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра (часть 2) [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Пластические массы. — 2007. — № 12. — С. 44–46.

24. Языев, Б. М. Напряженно–деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, М. Ю. Козельская // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 3. — С. 759–763.

25. Языев, Б. М. Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей [Электронный ресурс] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов, Ю. Ф. Козельский // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 2. — URL: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1616 (дата обращения: 19.12.2018).

26. Языев, Б. М. Плоскодеформированное и плосконапряженное состояние непрерывно неоднородного цилиндра под воздействием температурного поля [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Сборник трудов. — Ростов н/Д: РГСУ, 2006. — С. 25–27.

27. Языев, Б. М. Построение модели равнопрочного толстостенного цилиндра при силовых и температурных воздействиях [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, А. А. Аваков // Научное обозрение. — 2014. — № 9, ч. 3. — С. 863–866.

28. Языев, Б. М. Потери предварительного напряжения в железобетонном цилиндре за счет ползучести бетона [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, М. Ю. Козельская // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 2. — С. 445–449.

29. Языев, С. Б. Реология соляного массива со сферической полостью [Электронный ресурс] / С. Б. Языев, Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Инженер. вестник Дона. — 2012. — № 4, ч. 2. — URL: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1322 (дата обращения: 19.12.2018).

30. Козельский, Ю. Ф. Влияние физических полей на деформационные свойства железобетонных защитных конструкций: монография [Текст] / Ю. Ф. Козельский,

С. В. Литвинов, А. С. Чепурненко, Б. М. Языев. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. — 123 с.

31. Лесняк, Л. И. Моделирование остаточных напряжений в полимерном цилиндре, возникающих от вращения и остывания исходного материала [Текст] / Л. И. Лесняк, Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения: Материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф. / КБГУ. — Нальчик, 2020. — С. 245–250.

32. Литвинов, С. В. Модели равнопрочного толстостенного цилиндра при термосиловых воздействиях [Текст] / С. В. Литвинов, А. С. Чепурненко, А. А. Аваков, С. Б. Языев // Строительство–2014: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2014. — С. 204–205.

33. Литвинов, С. В. Определение напряженно-деформированного состояния вращающегося полимерного тела [Текст] / С. В. Литвинов и др. // Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения [Текст]: материалы XIV междунар. науч.–практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2018. — С. 112–117.

34. Литвинов, С. В. Особенности расчёта бетонных цилиндрических тел под темпера-турным нагружением [Текст] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш // Строительство–2015: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2015. — С. 115–117.

35. Литвинов, С. В. Равнопрочные и равнонапряжённые конструкции: преимущества и недостатки [Текст] / С. В. Литвинов, А. С. Чепурненко, Л. И. Труш // Строительство–2014: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2014. — С. 189–190.

36. Языев, Б. М. Задача термоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Материалы IV Междун. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2008. — С. 337–342.

37. Языев, С. Б. Моделирование вязкоупругого поведения жестких полимеров при циклическом изменении температуры [Текст] / С. Б. Языев, С. Б. Языева, С. В. Литвинов // Строительство–2009: материалы юбилейной Междунар. науч.–практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2009. — С. 167.

38. Litvinov, S. Determination of Rheological Parameters of Polymer Materials Using Nonlinear Optimization Methods [Электронный ресурс] / S. Litvinov, S. Yazyev, A. Chepurnenko, B. Yazyev // Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Architecture and Construction 2020. — Т. 130. — Springer, Singapore. — С. 587–594. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-981-33-6208-6_58. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-33-6208-6_58 (дата обращения: 29.12.2020).

39. Chepurnenko, A. S. Combined use of contsct layer and finite-element methods to predict the long-term strength of adhesive joints in nirmal separationc [Текст] / A. S. Chepurnenko, S. V. Litvinov, S. B. Yazyev // Mechanics of composite materials. — 2021. — Т. 57. — № 3. — С. 501–516.

40. Chepurnenko, A. Optimization of Thick-Walled Viscoelastic Hollow Polymer Cylinders by Artificial Heterogeneity Creation: Theoretical Aspects [Электронный ресурс] / A. Chepurnenko, S. Litvinov, B. Meskhi, A. Beskopylny // Polymers. — 2021. — Т. 13. — С. 2408. — URL: https://doi.org/10.3390/polym13152408 (дата обращения: 26.07.2021).

41. Dudnik, A. E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account [Электронный ресурс] / A. E. Dudnik, A. S. Chepurnenko, S. V. Litvinov // International Polymer Science and Technology. — 2017. — Т. 44 (1). — С. 30–33. — URL: http://www.polymerjournals.com/journals.asp?Search=YES&JournalID=102975&JournalType=ipsat (дата обращения: 19.12.2018).

42. Litvinov, S. Approbation of the Mathematical Model of Adhesive Strength with Viscoelasticity [Электронный ресурс] / S. Litvinov, X. Song, S. Yazyev, A. Avakov // Key Engineering Materials. — 2019. — Т. 816. — С. 96–101. — URL: https://www.scientific.net/KEM.816.96 (дата обращения: 01.10.2019).

43. Litvinov, S. V. Buckling of glass reinforced plastic rods of variable rigidity [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov и др. // Materials Science Forum. — Trans Tech Publications. — 2018. — Т. 931. — С. 133–138. — Решим доступа: https://www.scientific.net/MSF.931.133 (дата обращения: 19.12.2018).

44. Litvinov, S. V. Determination of physic and mechanical parameters of high-density polyethylene based on relaxation curves due to the presence of hydroxyapatite and ionizing radiation [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, S. B. Yazyev, D. A. Vysokovskiy // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2018. — Т. 196. — С. 01013. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2018/55/matecconf_rsp2018_01013/matecconf_rsp2018_01013.html (дата обращения: 19.12.2018).

45. Litvinov, S. V. Effecting of Modified HDPE Composition on the Stress-Strain State of Constructions [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, B. M. Yazyev, M. S. Turko // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2018. — Т. 463. — № 4. — С. 042063. — URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/463/4/042063/meta (дата обращения: 19.12.2018).

46. Litvinov, S., V. Flat Axisymmetrical Problem of Thermal Creepage for Thick- Walled Cylinder Made Of Recyclable PVC [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, L. I. Trush, S. B. Yazyev // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — С. 1686–1693. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816314734 (дата обращения: 19.12.2018).

47. Litvinov, S. Forecasting the Strength of an Adhesive Bond Over a Long Period of Time [Электронный ресурс] / S. Litvinov, A. Zhuravlev, S. Bajramukov, S. Yazyev // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intel-ligent Systems and Computing. — T. 692. — C. 902–907. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_97 (дата обращения: 19.12.2018).

48. Litvinov, S. V. Longitudinal bending of polymer rods with account taken of creep strains and initial imperfections [Текст] / S. V. Litvinov, E. S. Klimenko, I. I. Kulinich, S. B. Yazyeva // International Polymer Science and Technology. — 2015. — T. 42. — № 2. — C. 23–25.

49. Litvinov, S. V. Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, A. N. Beskopylny, L. I. Trush, S. B. Yazyev // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2017. — T. 106 (2017). — C. 04013. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/20/matecconf_spbw2017_04013.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

50. Litvinov, S. V. Some features in the definition of the temperature field in axisymmetric problems [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, L. I. Trush, A. A. Avakov // 2017 International Conference on Industrial En-gineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). — 2017. — C. 1–5. — URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/8076449 (дата обращения: 19.12.2018).

51. Trush, L. Optimization of the Solution of a Plane Stress Problem of a Polymeric Cylindrical Object in Thermoviscoelastic Statement [Электронный ресурс] / L. Trush, S. Litvinov, N. Zakieva, S. Bayramukov // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent Systems and Computing. — T. 692. — C. 885—893. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_95 (дата обращения: 19.12.2018).

52. Yanukyan, E. G. Calculation of the three-layer cylindrical shells taking into account the creep of the middle layer [Электронный ресурс] / E. G. Yanukyan, E. O. Lotoshnikova, A. S. Chepurnenko, B. M. Yazyev, S. V. Litvinov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2020. — T. 913. — № 2. — C. 022010. — URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/913/2/022010. — DOI: 10.1088/1757-899X/913/2/022010.

53. Yazyev, S. Energy method in solving the problems of stability for a viscoelastic polymer rods [Электронный ресурс] / S. Yazyev, M. Kozelskaya, G. Strelnikov, S. Litvinov // MATEC Web of Conferences. ICMTMTE 2017. — T. 129 (2017). — C. 05010. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/43/matecconf_icmtmte2017_05010.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

54. Yazyev, S. Rheological Aspects of Multilayered Thick-Wall Polymeric Pipes under the Influence of Internal Pressure [Электронный ресурс] / S. Yazyev, S. Litvinov, A. Dudnik, I. Doronkina // Key Engineering Materials. — 2020. — Т. 869. — С. 209–217. — URL: https://www.scientific.net/KEM.869.209.pdf.

55. Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616951 / Литвинов С. В., Дудник А. Е., Аваков А. А., Труш Л. И.; Дон. гос. техн. ун-т. — № 2018614101; заявл. 24.04.2018; зарег. 09.06.2018.

56. Определение напряжённо-деформированного состояния бетонных тел цилиндрической формы под действием физических полей и механического давления: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015611914 / Языев Б. М., Литвинов С. В., Пучков Е. В., Чепурненко А. С.; Рост. гос. строит. ун-т. — № 2014662825; заявл. 11.12.2014; зарег. 09.02.2015.

57. Оптимизация толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, испытывающих температурное и силовое воздействие: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015611906 / Языев Б. М., Литвинов С. В., Пучков Е. В., Чепурненко А. С.; Рост. гос. строит. ун-т. — № 2014662800; заявл. 10.12.2014; зарег. 09.02.2015.

58. Расчёт двухслойной армоцементных оболочек на силовые и температурные воздействия в условиях пожара: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2020619374 / Журтов А. В., Литвинов С. В., Хежев Т. А., Чепурненко А. С., Языев С. Б.; Кабардино-Балкарский гос. ун-т. — № 2020617814; заявл. 27.07.2020; зарег. 17.08.2020.

59. Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2020660684 / Хаширова С. Ю., Лесняк Л. И. Литвинов С. В., Языев С. Б., Молоканов Г. О., Чепурненко А. С.; Кабардино-Балкарский гос. ун-т. — № 2020617798; заявл. 27.07.2020; зарег. 09.09.2020.

60. Гагаринские чтения — 2016: XLII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: В 4 т. [Текст]. — М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016.

61. Пластмассы в машиностроении и приборостроении: сборник статей [Текст]. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961.

62. Саввина, А. В. Прочностные характеристики армированных полиэтиленовых труб при низких температурах [Текст]: дис. …канд. техн. наук: 01.02.06 / Саввина Александра Витальевна. — Якутск, 2017. — 101 с.

63. Архангельский, Б. А. Суда из пластмасс [Текст] / Б. А. Архангельский, И. М. Альшиц. — Л.: Судпромгиз, 1963.

64. Денисюк, М. Н. Структура, область применения, основные преимущества и недостатки современных композиционных материалов [Электронный ресурс] / М. Н. ДЕНИСЮК, В. В. Артемов, И. А. Прокопов // Вольский военный институт материального обеспечения. — 2015. — № 2 (36). — С. 161–163. — URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_25114187_54179818.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

65. Киселев, Б. А. Стеклопластики [Текст] / Б. А. Киселев. — М.: Госхимиздат, 1962.

66. Карпин, В. Л. Опыт применения пластмасс при изготовлении технологической оснастки [Текст] / В. Л. Карпин // Пластмассы в машиностроении и приборостроении. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961.

67. Тарасюк, А. П. Влияние качества поверхностного слоя волокнистых полимерных композитов после механической обработки на их эксплуатационные свойства [Текст] / А. П. Тарасюк // Високі технології в машинобудуванні (Высокие технологии в машиностроении). — Харьков: НТУ, 2012. — Вып. 1 (22). — С. 281–290.

68. Андреевская, Г. Д. Высокопрочные ориентированные стеклопластики [Текст] / Г. Д. Андреевская. — Наука, 1966. — 370 с.

69. Бейдер, Э. Я. Стеклопластики на термопластичной матрице [Текст] / Э. Я. Бейде и др. //Труды ВИАМ. — 2013. — №7. — С. 3.

70. Давыдова, И. Ф. Стеклопластики в конструкциях авиационной и ракетной техники [Текст] / И. Ф. Давыдов, Н. С. Кавун // Стекло и керамика. — 2012. — № 4. — С. 36–42.

71. Раскутин, А. Е. Углепластики и стеклопластики нового поколения [Текст] / А. Е. Раскутин, И. И. Соколов // Труды ВИАМ. — 2013. — № 4. — С. 9.

72. Иванов, А. Г. Влияние структуры армирования на предельную деформируемость и прочность оболочек из ориентированного стеклопластика при взрывном нагружении изнутри [Текст] / АГ. Иванов, М. А. Сырунин, А.Г. Федоренко // ПМТФ. — 1992. — Т. 33. — № 4. — С. 130.

73. Зеленский, Э. С. Армированные пластики–современные конструкционные материалы [Текст] / Э. С. Зеленский и др. // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д. И. Менделеева). — 2001. — Т. 45. — № 2. — С. 56–74.

74. Рабинович, А. Л. Уравнения связи при плоском напряженном состоянии ориентированных стеклопластиков [Текст] // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 153. — № 4.

75. Саркисян, Н. Е. Выносливость и деформативность ориентированного стеклопластика при высокой частоте нагружения [Текст] // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. — 1974. — Т. 27. — № 6. — С. 74–82.

76. Тарнопольский, Ю. М. Учет сдвигов при изгибе ориентированных стеклопластиков [Текст] / Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розу, В. А. Поляков // Механика полимеров. — 1965. — № 2. — С. 38.

77. Томашевский, В. Т. Ползучесть и длительная прочность при междуслойном сдвиге ориентированных стеклопластиков [Текст] / В. Т. Томашевский, А. А. Туник // Механика полимеров. — 1971. — № 6. — С. 1003.

78. Огибалов, П. М. Механика армированных пластиков [Текст] / П. М. Огибалов, Ю. В. Суворова. — М.: МГУ, 1965.

79. Шамбина, С. Л. Анизотропные композитные материалы и особенности расчета конструкций из них [Текст] / С. Л. Шамбина // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2005. — № 1.

80. Александров, А. П. Изучение полимеров. Высокоэластичная деформация полимеров [Текст] / А. П. Александров, Ю. С. Лазуркин // Журнал технической физики. — 1939. — Т. 9. — № 14.

81. Александров, А. П. Морозостойкость высокомолекулярных соединений [Текст] / А. П. Александров //Труды I и II конф. по высокомолекулярным соединениям. — М.–Л.: Изд-во АН СССР. — 1945. — С. 49–59.

82. Александров, К. С. Упругие свойства кристаллов (обзор) [Текст] / К. С. Александров, Т. В. Рыжова. — Кристаллография, вып. 2, 1961. — С. 289–314

83. Аскадский, А. А. Введение в физико-химию полимеров [Текст] / А. А. Аскадский, А. Р. Хохлов — М.: Научный мир, 2009. — 384 с.

84. Козлов, Г. В. Кластерная модель аморфного состояния полимеров [Текст] / Г. В. Козлов, В. У. Новиков // Успехи физических наук. — 2001. — Т. 171. — № 7. — С. 717–764.

85. Лазуркин, Ю. С. Механические свойства полимеров в стеклообразном состоянии [Текст]: дисс. …д-ра. физ.-матем. наук. — М.: Ин-т физических проблем им. С. И. Вавилова, 1954.

86. Лазуркин, Ю. С. О природе больших деформаций высокомолекулярных веществ в стеклообразном состоянии [Текст] / Ю. С. Лазуркин, Р. Л. Фогельсон // ЖТФ. — Т. 21, вып. 3. — 1951. — С. 267–286.

87. Лейбфриед, Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов [Текст] / Г. Лейбфриед., Б. Я. Мойжес. — Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963. — 312 с.

88. Слонимский, Г. Л. Краткие очерки по физико-химии полимеров [Текст] / Г. Л. Сломинский. — М.: Химия, 1967. — 231 с.

89. Тагер, А. А. Физико-химия полимеров [Текст] / А. А. Тагер. — М.: Рипол Классик, 1978. — 545 с.

90. Тобольский, А. Свойства и структура полимеров [Текст] / А. Тобольский. — М.: Химия, 1964. — 322 с.

91. Алфрей, Т. Механические свойства высокополимеров [Текст] / Т. Алфрей. — М.–Л.: ИЛ, 1952.

92. Трелоар, Л. Физика упругости каучука [Текст] / Л. Трелоар. — М.–Л., ИЛ, 1953. — 240 с.

93. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М., 1966. — 752 с.

94. Ильюшин, А. А. Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра [Текст] / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов // Механика полимеров. — 1966. — №2. — С. 170–189.

95. Гуревич, Г. И. О зависимости между напряжениями и перемещениями при больших деформациях в случае одномерной задачи [Текст] / Г. И. Гуревич, А. Л. Рабинович // Тр. ИФЗ АН СССР. — 1959. — № 2.

96. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров [Текст] / А. Л. Рабинович. М.: Наука, 1970. — 482 с.

97. Гуревич, Г. И. О законе деформации твердых и жидких тел [Текст] / Г. И. Гуревич // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17. — № 12. — С. 1491–1502.

98. Гуревич, Г. И. О соотношении упругих и остаточных деформаций в общем случае однородного напряженного состояния [Текст] / Г. И. Гуревич // Труды Геофиз. ин-та АН СССР. — 1953. — № 21. — С. 49–90.

99. Гуревич, Г. И. О зависимости между тензорами напряжений и скоростей деформации в общем случае больших и малых деформаций [Текст] / Г. И. Гуревич // Доклады Академии наук. — Российская академия наук, 1958. — Т. 120. — № 5. — С. 987–990.

100. Гуревич, Г. И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай трех измерений с учетом малых деформаций упругого последействия [Текст] / Г. И. Гуревич // Тр. Ин-та Физики Земли АН СССР. — 1959. — Т. 2. — С. 169.

101. Медведев, С. С. Изотопы и излучения в химии [Текст] / С. С. Медведев. — М.: изд-во АН СССР, 1958. — 85 с.

102. Карпов, В. Л. Радиационнохимические процесс и их осуществление в промышленности [Текст] / В. Л. Карпов // Атомная энергия: материалы всесоюзной научн.-технич. конференции «XX лет производства и применения изотопов и источников ядерных излучений в народном хозяйстве СССР». — М.: Атомиздат, 1969. — Т. 26, вып. 2. — С. 150–154.

103. Albano, C. Evaluation of a composite based on high-density polyethylene filled with surface-treated hydroxyapatite [Текст] / C. Albano и др. // Polymer Bulletin. — 2009. — Т. 62. — № 1. — С. 45–55.

104. Bonfield, W. Hydroxyapatite reinforced polyethylene—a mechanically compatible implant material for bone replacement [Текст] / W. Bonfield и др. // Biomaterials. — 1981. — Т. 2. — № 3. — С. 185–186.

105. Fang, L. Processing and mechanical properties of HA/UHMWPE nanocomposites [Текст] / L. Fang, Y. Leng, P.Gao // Biomaterials. — 2006. — Т. 27. — № 20. — С. 3701–3707.

106. Fang, L. Processing of hydroxyapatite reinforced ultrahigh molecular weight polyethylene for biomedical applications [Текст] / L. Fang, Y. Leng, P.Gao // Biomaterials. — 2005. — Т. 26. — № 17. — С. 3471–3478.

107. Husin, M. R. Effect of hydroxyapatite reinforced high density polyethylene composites on mechanical and bioactivity properties [Текст] / M. R. Husin и др. // Key Engineering Materials. — Trans Tech Publications, 2011. — Т. 471. — С. 303–308.

108. Joseph, R. Effect of hydroxyapatite morphology/surface area on the rheology and processability of hydroxyapatite filled polyethylene composites [Текст] / R. Joseph // Biomaterials. — 2002. — Т. 23. — № 21. — С. 4295–4302.

109. Sousa, R. A. Processing and properties of bone-analogue biodegradable and bioinert polymeric composites [Текст] / R. A. Sousa и др. // Composites science and technology. — 2003. — Т. 63. — № 3. — С. 389–402.

110. Wannomae, K. K. The effect of real-time aging on the oxidation and wear of highly cross-linked UHMWPE acetabular liners [Текст] / K. K. Wannomae и др. // Biomaterials. — 2006. — Т. 27. — № 9. — С. 1980–1987.

111. Zuo, Y. Novel bio-composite of hydroxyapatite reinforced polyamide and polyethylene: Composition and properties [Текст] / Y. Zuo и др. // Materials Science and Engineering: A. — 2007. — Т. 452. — С. 512–517.

112. Fouad, H. Assessment of function-graded materials as fracture fixation bone-plates under combined loading conditions using finite element modelling [Текст] / H. Fouad // Medical Engineering and Physics. — 2011. — Т. 33. — № 4. — С. 456–463.

113. Fouad, H. Effects of the bone-plate material and the presence of a gap between the fractured bone and plate on the predicted stresses at the fractured bone [Текст] / H. Fouad //Medical Engineering and Physics. — 2010. — Т. 32. — № 7. — С. 783–789.

114. Nagels, J. Stress shielding and bone resorption in shoulder arthroplasty [Текст] / J. Nagels, M. Stokdijk, P. M. Rozing // Journal of shoulder and elbow surgery. — 2003. — Т. 12. — № 1. — С. 35–39.

115. Albano, C. Prediction of mechanical properties of composites of HDPE/HA/EAA [Текст] / C. Albano и др. //Journal of the mechanical behavior of biomedical materials. — 2011. — Т. 4. — № 3. — С. 467–475.

116. Li, K. Preparation and mechanical and tribological properties of high-density polyethylene/hydroxyapatite nanocomposites [Текст] / K. Li, S. C. Tjong // Journal of Macromolecular Science, Part B. — 2011. — Т. 50. — № 7. — С. 1325–1337.

117. Pielichowska, K. Bioactive polymer/hydroxyapatite (nano) composites for bone tissue regeneration [Текст] / K. Pielichowska, S. Blazewicz // Biopolymers / Springer Berlin Heidelberg, 2010. — С. 97–207.

118. Tanner, K. E. Clinical applications of hydroxyapatite reinforced materials [Текст] / K. E. Tanner, R. N. Downes, W. Bonfield // British Ceramic Transactions. — 1994. — Т. 93. — № 3. — С. 104–107.

119. Younesi, M. Producing toughened PP/HA-LLDPE ternary bio-composite using a two-step blending method [Текст] / M. Younesi, M. E. Bahrololoom // Materials and Design. — 2009. — Т. 30. — № 10. — С. 4253–4259.

120. Fouad, H Characterization and processing of high density polyethylene/carbon nano-composites [Текст] / H. Fouad // Materials and Design. — 2011. — Т. 32. — № 4. — С. 1974–1980.

121. Fouad, H. High density polyethylene/graphite nano-composites for total hip joint replacements: Processing and in vitro characterization [Текст] / H. Fouad, R. Elleithy // Journal of the mechanical behavior of Biomedical materials. — 2011. — Т. 4. — № 7. — С. 1376–1383.

122. Fouad, H. Thermo-mechanical, wear and fracture behavior of high-density polyethylene/hydroxyapatite nano composite for biomedical applications: effect of accelerated ageing [Текст] / H. Fouad, R. Elleithy, O. Y. Alothman // Journal of Materials Science and Technology. — 2013. — Т. 29. — № 6. — С. 573–581.

123. Fouad, H. Effect of long?term natural aging on the thermal, mechanical, and viscoelastic behavior of biomedical grade of ultra high molecular weight polyethylene [Текст] / H. Fouad // Journal of applied polymer science. — 2010. — Т. 118. — № 1. — С. 17–24.

124. Mourad, A. H. Impact of some environmental conditions on the tensile, creep-recovery, relaxation, melting and crystallinity behaviour of UHMWPE-GUR 410-medical grade [Текст] / A. H. Mourad, H. Fouad, R. Elleithy // Materials and Design. — 2009. — Т. 30. — № 10. — С. 4112–4119.

125. Carmen, A. HDPE/HA composites obtained in solution: effect of the gamma radiation [Текст] / A. Carmen и др. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. — 2006. — Т. 247. — № 2. — С. 331–341.

126. Kane, R. J. Effects of the reinforcement morphology on the fatigue properties of hydroxyapatite reinforced polymers [Текст] / R. J. Kane, G. L. Converse, R. K. Roeder // Journal of the mechanical behavior of biomedical materials. — 2008. — Т. 1. — № 3. — С. 261–268.

127. Аменадзе, Ю. А. Теория упругости: учебник для университетов [Текст] / Ю. А. Аменадзе. — М.: Высшая школа, 1976. — 272 с.

128. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография [Текст] / В. И. Андреев. — М.: Издательство АСВ, 2002. — 288 с.

129. Баландин, М. Ю. Векторный метод конечных элементов: учебное пособие [Текст] / М. Ю. Баландин, Э. П. Шурина. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 2001. — 69 с.

130. Вайнберг, М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений [Текст] / М. М. Вайнберг. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

131. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: пер. с англ. [Текст] / Д. Гилбарг, Н. Трудингер, Л. П. Купцова. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

132. Калиткин, Н. Н. Численные методы: справочное пособие [Текст] / Н. Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

133. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

134. Миранда, К. Уравнения с частными производными эллиптического типа [Текст]: пер. с итал. яз. [Текст] / К. Миранда. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. — 256 с.

135. Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений [Текст] / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. — М.: Наука, 1976. — 352 с.

136. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

137. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов: учебное издание [Текст] / Л. Сегерлинд; под ред. Б. Е. Победри. — М.: Мир, 1979. — 392 с.

138. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. — М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003. — 632 с.

139. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие [Текст] / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 304 с.

140. Бабич, В. Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики жёстких сетчатых полимеров [Текст]: дис. …канд. физ.-матем. наук / Учен. совет по механике и материаловедению полимеров при науч.-исслед. физ.-хим. ин-те им. Л. Я. Карпова. — М., 1966.

141. Рабинович, А. Л. Некоторые механические характеристики плёнок, бутварфенольного полимера [Текст] / А. Л. Рабинович // Высокомол. соед. — 1959. — № 7.

142. Рабинович, А. Л. Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров [Текст]: автореф. д-ра ф.-м. наук. М. — 1965.

143. Советы и рекомендации по моделированию ползучести материалов в методе конечных элементов [Электронный ресурс] // Софт Инжиниринг Групп. — URL: https://www.ansys.soften.com.ua/about-ansys/blog/138-sovety-i-rekomendatsii-po-modelirovaniyu-polzuchesti-materialov-v-metode-konechnykh-elementov.html (дата обращения: 19.12.2018).

144. Viscoelasticity [Электронный ресурс] // SHARCNET. — URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_mat/evis.html (дата обращения: 19.12.2018).

145. Solid Works Simulation. Вязкоупругая модель [Электронный ресурс] // SOLIDWORKS Web Help. — URL: https://help.solidworks.com/2019/Russian/SolidWorks/cworks/c_Viscoelastic_Model.htm (дата обращения: 19.12.2018).

146. Solid Works Simulation. Модель ползучести [Электронный ресурс] // SOLIDWORKS Web Help. — URL: https://help.solidworks.com/2019/Russian/SolidWorks/cworks/c_Creep_Model.htm?id=90ac0cb6180d4b5f958dc1682659e7cc#Pg0 (дата обращения: 19.12.2018).

147. Бабич, В. Ф. К вопросу о корреляции между равновесным модулем высокоэластичности и числом сшивок в жёстких сетчатых полимерах [Текст] / В. Ф. Бабич, Ю. М. Сивергин, А. А. Берлин, А. Л. Рабинович // Механика полимеров. — 1966. — № 1.

148. Ишлинский, А. Ю. Продольные колебаний стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации [Текст] / А. Ю. Ишлинский // ПММ. — 1940. — № 4, вып. 1.

149. Ишлинский, А. Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластичных тел [Текст] / А. Ю. Ишлинский // Изв. АН СССР, ОТН. — 1945. — № 3.

150. Ферри, Д. Вязко-упругие свойства полимеров [Текст] / Д. Ферри. — М.: ИЛ, 1964.

151. Дудник, А. Е. Моделирование прочностных характеристик и прогнозирование несущей способности напорных труб из полиолефинов [Текст]: дис. …канд. техн. наук: 02.00.06 / Дудник Анастасия Евгеньевна. — Нальчик, 2016. — 133 с.

152. Chepurnenko, A. S. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures [Электронный ресурс] / A. S. Chepurnenko, V. I. Andreev, A. N. Beskopylny, B. M. Jazyev // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2016. — Т. 67. — С. 06059. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/30/matecconf_smae2016_06059.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

153. Языев, С. Б. Определение реологических параметров полимерных материалов с использованием методов нелинейной оптимизации [Электронный ресурс] / С. Б. Языев, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Строительные материалы и изделия. — 2020. — Т. 3. — № 5. — С. 15–23. — URL: http://bstu-journals.ru/archives/10782 (дата обращения: 31.12.2020).

154. Соловьева, Е. В. Исследование релаксационных свойств первичного и вторичного поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева, А. А. Аскадский, М. Н. Попова // Пластические массы. — 2013. — № 2. — С. 54–62.

155. Соловьева, Е. В. Экспериментальные исследования релаксации напряжения поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева // Наука, техника и образование. — 2015. — № 8. — С. 26–28.

156. Турусов, Р. А. Адгезионная механика: монография [Текст] / Р. А. Турусов. — 2-е изд. — М.: НИУ МГСУ, 2016. — 232 с.

157. Языев, Б. М. Некоторые задачи и методы механики вязкоупругой полимерной среды: монография [Текст] / Б. М. Языев, В. И. Андреев, Р. А. Турусов, А. К. Микитаев. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2009. — 208 с.

158. Турусов, Р. А. Механические явления в полимерах и композитах (в процессе формирования) [Текст]: дис. …д-ра физ.-мат. наук: 01.04.17 / Турусов Роберт Алексеевич. — М., 1983. — 363 с.

159. Андреев, В. И. Упругое и упругопластическое равновесие толстостенных цилиндрических и сферических непрерывно неоднородных тел [Текст]: дис. …д-ра техн. наук: 05.23.17 / Андреев Владимир Игоревич. — М., 1986. — 427 с.

160. Языев, Б. М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров [Текст]: дис. …канд. техн. наук: 01.02.04 / Языев Батыр Меретович. — М., 1990. — 171 с.

161. Язиев, Б. М. Особенности релаксационных свойств сетчатых и линейных полимеров и композитов на их основе [Текст]: дис. …д-ра техн. наук: 02.00.06 / Язиев Батыр Меретович. — Нальчик, 2009. — 352 с.

162. Новиченок, Л. Н. Теплофизические свойства полимеров [Текст] / Л. Н. Новиченок, Э. П. Шульман. — Минск: Наука и техника, 1971. — 120 с.

163. Выгодский, Я. Я. Справочник по элементарной математике [Текст] / Я. Я. Выгодский. — М.: Наука, 2006. — 509 с.

164. Alothman, O. Y. Thermal, creep-recovery and viscoelastic behavior of high density polyethylene/hydroxyapatite nano particles for bone substitutes: effects of gamma radiation [Электронный ресурс] / O. Y. Alothman и др. // Biomedical engineering online. — 2014. — Т. 13. — № 1. — С. 125. — URL: https://biomedical-engineering-online.biomedcentral.com/articles/10.1186/1475-925X-13-125 (дата обращения: 19.12.2018).

165. Потехин, И. А. Способ оптимизации конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел [Текст]: дис. …канд. техн. наук: 05.23.17 / Потехин Иван Александрович. — М., 2009. — 144 с.

166. Чепурненко, А. С. Построение модели равнонапряженного цилиндра на основе теории прочности Мора [Текст] / А. С. Чепурненко, В. И. Андреев, Б. М. Язиев // Вестник МГСУ. — 2013. — № 5. — С. 56–61.

167. Andreev, V. I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies [Текст] / V. I. Andreev // Computer Aided Optimum Design in Engineering. — 2012. — С. 189–202.

168. Андреев, В. И. Оптимизация по прочности толстостенных оболочек : монография / В. И. Андреев, И. А. Потехин. — Москва: МГСУ, 2011. — 86 с.

169. Andreev, V. I. Creation on the basis of the first theory of strength model equal stressed cylinder exposed to power and temperature loads [Текст] / V. I. Andreev, A. S. Minaeva // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2011. — Т. 7, Ч. 1. — С. 71–75.

170. Andreev, V. I. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion [Текст] / V. I. Andreev, A. S. Chepurnenko, B. M. Jazyjev // Advanced Materials Research. — Trans Tech Publications, 2014. — Т. 887–888. — С. 869–872.

171. Язиев, Б. М. Оптимизация толстостенной железобетонной оболочки на основе решения обратной задачи механики неоднородных тел [Электронный ресурс] / Б. М. Язиев, А. С. Чепурненко, А. В. Муханов // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 3. — URL: http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1891 (дата обращения: 19.12.2018).

172. Язьев, Б. М. Оптимизация толстостенной сферической оболочки на основе теории прочности Мора [Электронный ресурс] / Б. М. Язьев, А. С. Чепурненко, А. В. Муханов // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 3. — URL: http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890 (дата обращения: 19.12.2018).

173. Язьев, Б. М. Оптимизация предварительно напряженного толстостенного железобетонного цилиндра [Электронный ресурс] / Б. М. Язьев, А. С. Чепурненко, А. В. Муханов // Науковедение: электронный журнал. — 2013. — № 5. — URL: http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu513.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

174. Filon, L. N. G. On the elastic Equilibrium of Circular Cylinder under Certain Plastical Systems of load [Текст] // Phil. Trans. of the Royal Society of London. — 1902. — Ser. A. — T. 198, №4. — C. 147–233.

175. Колтунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел [Текст] / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. — М.: Высш. школа, 1975. — 526 с.

176. Дубровский, В. Б., Кириллов А.П. Строительство атомных электростанций: Учебник для вузов [Текст] / В. Б. Дубровский, А. П. Кириллов // Под ред. В. Б. Дубровского. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатом-издат, 1987. — 248 с.

177. Дубровский, В. Б. Строительные материалы и конструкции защит от ионизирующих излучений: Совм. сов.--пол. изд. [Текст] / В. Б. Дубровский, З. Облевич; под ред. В. Б. Дубровского. — М.: Стройиздат, 1983. — 240 с.

178. Дубровский, В. Б. Радиационная стойкость строительных материалов [Текст] / В. Б. Дубровский. — М.: Стройиздат, 1977. — 278 с.

179. Радиационная стойкость материалов. Справочник [Текст] / Под. ред. В. Б. Дубровского. — М.: Атомиздат, 1973. — 264 с.

180. Андреев, В. И. Учёт неоднородности материала при расчёте сухой защиты реактора [Текст] / В. И. Андреев, А. В. Дубровский // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Проектирование и строительство. — М., 1982. — Вып. 3(13). — С. 3–8.

181. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости [Текст] / А. Д. Коваленко. — Киев: Наук. думка, 1970. — 307 с.

182. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьев. — М.: Наука, 1975. — 575 с.

183. Смолов, А. В. Напряжённо-деформированное состояние неоднородных упругих цилиндров под действием силовых и температурных нагрузок [Текст]: Спец. 01.02.03 — Строительная механика: Дисс. …кандидата технических наук. — М. 1987. — 184 с.

184. Беляев, Н. М. Методы теории теплопроводности. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов [Текст] / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. — В 2-х частях. — М.: Высш. школа. 1982. — 327 с.

185. Пергаменщик, Б. К. Температурное поле в толстостенном цилиндре с внутренними источниками тепловыделений [Текст] / Б. К. Пергаменщик, Г. А. Лавданская // Материалы и конструкции защит ядерных установок: Сб. трудов № 56. /МИСИ им. В. В. Куйбышева. М., 1968. — С. 35–42.

186. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики [Текст] / Г. И. Марчук. — М.: Наука, 1977. — 534 с.

187. Жолдак, Г. И. Конструкции сухой защиты ядерного реактора АЭС [Текст] / Г. И. Жолдак, В. Н. Иванов // Вопросы атомной науки и техники. Проектирование и строительство. — М., 1984. — Вып. 2 (18). — С. 25–30.

188. СНиП 2.03.04–84. Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур [Текст] / Госстрой СССР. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. — 54 с.

189. Корягин, С. И. Анализ методов оценки трещиностойкости клеевых соединений [Текст] / С. И. Корягин, С. В. Буйлов, Е. С. Минкова // Инновационная наука. — 2015. — № 6. — С. 61–70. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-metodov-otsenki-treschinostoykosti-kleevyh-soedineniy (дата обращения: 19.12.2018).

190. Мокина, А. А. Основы адгезии полимеров [Текст] / А. А. Мокина // Master's Journal. — 2016. — № 1. — С. 84–88.

191. Раухваргер, А. Б. Модель разрушения адгезионного соединения металл-полимер [Электронный ресурс] / А. Б. Раухваргер, В. А. Язев, М. Е. Соловьев // Химическая физика и мезоскопия. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 88–92. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/model-razrusheniya-adgezionnogo-soedineniya-metall-polimer (дата обращения: 19.12.2018).

192. Фроленкова, Л. Ю. Инженерные методы определения адгезионной прочности соединения твердых тел [Текст] / Л. Ю. Фроленкова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2009. — № 1. — С. 53–60. — URL: http://library.oreluniver.ru/polnotekst/IzvestiyaOrelGTU/fund_2009_1.pdf#page=53 (дата обращения: 19.12.2018).

193. Чалых, А. А. Влияние деформационнопрочностных характеристик на их адгезионные свойства [Текст]: дис. …к-та хим. наук: 02.00.04 / Чалых Анна Анатольевна. — М., 2003. — 170 с.

194. Ferrante, J. Theory of metallic adhesion [Текст] / J. Ferrante, J. R. Smith // Physical Review B. — 1979. — Т. 19, № 8. — С. 3911. — URL: https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.19.3911 (дата обращения: 19.12.2018).

195. Kendall, K. The adhesion and surface energy of elastic solids [Электронный ресурс] / K. Kendall // Journal of Physics D: Applied Physics. — 1971. — Т. 4, № 8. — С. 1186. — Решим доступа: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/4/8/320 (дата обращения: 19.12.2018).

196. Yang, Q. D. Elastic–plastic mode-II fracture of adhesive joints [Электронный ресурс] / Q. D. Yang, M. D. Thouless, S. M. Waed // International journal of solids and structures. — 2001. — Т. 38, № 18. — С. 3251–3262. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768300002213 (дата обращения: 19.12.2018).

197. Турусов, Р. А. Длительная проность адгезионных соединений при нормальном отрыве [Текст] / Р. А. Турусов, А. Я. Горенберг, Б. М. Языев // Клеи. Герметики, Технологии. — 2011. — № 7. — С. 17–25.

198. Фрейдин, А. С. Свойства и расчёт адгезионных соединений [Текст] / А. С. Фрейдин, Р. А. Турусов. — М.: Химия, 1990. — 256 с.: ил.

199. Турусов, Р. А. Термодинамические и структурные свойства граничных слоев полимеров [Текст] / Р. А. Турусов, К. Т. Вуба, А. С. Фрейдин. — Киев: Наукова думка, 1976. — С. 88–94.

200. Андреев, В. И. Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением метода контактного слоя [Текст] / В. И. Андреев, Р. А. Турусов, Н. Ю. Цыбин // Вестник МГСУ. — 2016. — № 4. — С. 17–26.

201. Турусов, Р. А. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье [Текст] / Р. А. Турусов, В. И. Андреев, Н. Ю. Цыбин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2017. — № 4. — С. 34–42.

202. Andreev, V. The edge effects in layered beams [Электронный ресурс] / V. Andreev, R. Turusov, N. Tsybin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2018. — Т. 365. — № 4. — С. 042049. — URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/365/4/042049 (дата обращения: 14.12.2019).

Приложения

Глава А. Условные обозначения и основные математические операции

А.1 Условные обозначения

$$\nabla\Phi(r,\theta,z) = \operatorname{grad}\Phi(r,\theta,z) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e_z}.$$

$$\Delta\Phi = \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi$$

А.2 Дифференцирование матричных соотношений

Процедуры минимизации, рассмотренные в диссертационной работе, подразумевают дифференцирование матричных произведений [137]

$$\left[N\right]\left\{\Phi\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\Phi\right\}^T\left[A\right]\left\{\Phi\right\}$$

по $\left\{\Phi\right\}$. Здесь $\left[N\right]$ — вектор-строка; $\left[A\right]$ — квадратная матрица.

Пусть значение скалярной величины определяется соотношением:

$$\varphi = \left[N\right]\left\{\Phi\right\}, \tag{А.1}$$

где

$$\left[N\right] = \left[N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_r\right], \quad \left[\Phi\right]^T = \left[\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \ldots \quad \Phi_r\right].$$

Тогда производная φ по Φ может быть записана вектор-столбцом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} \end{Bmatrix}. \tag{А.2}$$

Элементы вектор-столбца (А.2) вычисляются при помощи записанного в развёрнутом виде произведения (А.1):

$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + \ldots + N_r\Phi_r. \tag{А.3}$$

Проводя операцию дифференцирования выражения (А.3), получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} = N_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} = N_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_r} = N_r. \tag{А.4}$$

После подстановки полученных выражений в (А.2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{Bmatrix} = \left\{ N \right\}^T. \tag{А.5}$$

Операция дифференцирования выражения $\left\{\Phi\right\}^T \left[N\right]^T$ проводится аналогичным образом и результат приводит к тому же самому выражению.

При выводе уравнений метода конечных элементов, с целью сохранения размерности полученных выражений, можно записать следующие правила дифференцирования:

$$\text{пусть} \quad \varphi_1 = \left\{U\right\}^T \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \left\{\varepsilon^*\right\}^T \left[D\right] \left[B\right] \left\{U\right\}$$

с учётом правила транспонирования матриц $([A][B][C])^T = [C]^T [B]^T [A]^T$, дифференциал принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\left\{U\right\}} = \frac{\partial \varphi_2}{\left\{U\right\}} = \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\}. \tag{А.6}$$

Здесь принималось, что матрица $\left[D\right]$ — симметричная, т. е. $\left[D\right] = \left[D\right]^T$.

В случае, если рассматривается произведение

$$\varphi = \left\{\Phi\right\}^T \left[A\right] \left\{\Phi\right\},$$

где

$$\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left\{\Phi\right\}^T = \left\{\Phi_1 \quad \Phi_2\right\},$$

можно записать с учётом условия симметрии $a_{12} = a_{21}$

$$\varphi = a_{11}\Phi_1^2 + 2a_{12}\Phi_1\Phi_2 + a_{22}\Phi_2^2.$$

Тогда в процесс дифференцирования получаются выражения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} = 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} = 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2.$$

Окончательно в матричном виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \left\{\Phi\right\}} = 2\begin{bmatrix} 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2 \\ 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \left\{\Phi\right\}} \left(\left\{\Phi\right\}^T \left[A\right] \left\{\Phi\right\} \right) = 2\left[A\right]\left\{\Phi\right\}. \tag{A.7}$$

А.3 Значения коэффициентов выражений (5.21) и (5.22)

Значения коэффициентов выражения (5.21):

$$\begin{aligned} k_{11}^{(e)} = & -\frac{E}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\big(3R_i^4 - 8R_i^3R_k - \\ & - R_k^4 + 6R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 + 8R_i^2Z_k^2 + 8R_k^2Z_i^2 + 8R_k^2Z_k^2 + \\ & + 8R_k^2Z_i^2\ln R_i - 8R_k^2Z_i^2\ln R_k + 8R_k^2Z_k^2\ln R_i - 8R_k^2Z_k^2\ln R_k - \\ & - 16R_iR_kZ_i^2 - 16R_iR_kZ_k^2 - 16R_i^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_i + \\ & + 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_k + 32R_iR_kZ_iZ_k\big) - \\ & - \frac{E\nu}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\big(16R_i^3R_k - 6R_i^4 + 2R_k^4 - \\ & - 12R_i^2R_k^2 - 8R_k^2Z_i^2\ln R_i + 8R_k^2Z_i^2\ln R_k - 8R_k^2Z_k^2\ln R_i + \\ & + 8R_k^2Z_k^2\ln R_k + 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_i - 16R_k^2Z_iZ_k\ln Rk\big); \end{aligned}$$

$$k_{12}^{(e)} = -\frac{E(2R_i-5R_k)}{72(\nu+1)} - \frac{E(4R_i-R_k)}{36(2\nu-1)};$$

$$\begin{aligned} k_{13}^{(e)} = & \frac{E\nu}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\big(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k + \\ & + 2R_i^4 - 2R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2\ln R_i + 8R_iR_kZ_i^2\ln R_k - 8R_iR_kZ_k^2\ln R_i + \\ & + 8R_iR_kZ_k^2\ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k\ln R_i - 16R_iR_kZ_iZ_k\ln R_k\big) - \\ & - \frac{E}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\big(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k + \\ & + R_i^4 - R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2\ln R_i + 8R_iR_kZ_i^2\ln R_k - 8R_iR_kZ_k^2\ln R_i + \\ & + 8R_iR_kZ_k^2\ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k\ln R_i - 16R_iR_kZ_iZ_k\ln R_k\big); \end{aligned}$$

$$k_{14}^{(e)} = -\frac{E(4\nu-1)(2R_i+R_k)}{24(2\nu^2+\nu-1)};$$

$$k_{15}^{(e)} = \frac{E}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)} \big(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k +$$
$$+ R_i^4 - R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k + 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i -$$
$$-4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i + 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k\big) -$$
$$- \frac{E\nu}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)} \big(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k +$$
$$+ 2R_i^4 - 2R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k + 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i -$$
$$-4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i + 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k\big)\,/;$$

$$k_{16}^{(e)} = \frac{E(2R_i+R_k)}{24(2\nu^2+\nu-1)};$$

$$k_{17}^{(e)} = \frac{E\nu}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)} \big(16R_i^3R_k - 6R_i^4 +$$
$$+ 2R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 + 4R_k^2Z_i^2 \ln R_i - 4R_k^2Z_i^2 \ln R_k + 4R_k^2Z_k^2 \ln R_i -$$
$$-4R_k^2Z_k^2 \ln R_k - 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_i + 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_k\big) -$$
$$- \frac{E}{24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)} \big(8R_i^3R_k - 3R_i^4 +$$
$$+ R_k^4 - 6R_i^2R_k^2 + 4R_i^2Z_i^2 + 4R_i^2Z_k^2 + 4R_k^2Z_i^2 + 4R_k^2Z_k^2 +$$
$$+ 4R_k^2Z_i^2 \ln R_i - 4R_k^2Z_i^2 \ln R_k + 4R_k^2Z_k^2 \ln R_i - 4R_k^2Z_k^2 \ln R_k -$$
$$- 8R_iR_kZ_i^2 - 8R_iR_kZ_k^2 - 8R_i^2Z_iZ_k - 8R_k^2Z_iZ_k - 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_i +$$
$$+ 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k\big);$$

$$k_{18}^{(e)} = \frac{E(14R_i+R_k)}{72(\nu+1)} + \frac{E(4R_i-R_k)}{36(2\nu-1)};$$

$$k_{22}^{(e)} = -\frac{1}{(R_i-R_k)(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)} \Bigg[\frac{E}{12}\big(3R_i^3 - 5R_i^2R_k +$$
$$+ R_iR_k^2 + R_iZ_i^2 - 2R_iZ_iZ_k + R_iZ_k^2 + R_k^3 + R_kZ_i^2 - 2R_kZ_iZ_k + R_kZ_k^2\big) -$$
$$- \frac{E\nu}{12}\big(3R_i^3 - 5R_i^2R_k + R_iR_k^2 + 2R_iZ_i^2 - 4R_iZ_iZ_k +$$
$$+ 2R_iZ_k^2 + R_k^3 + 2R_kZ_i^2 - 4R_kZ_iZ_k + 2R_kZ_k^2\big)\Bigg];$$

$$k_{23}^{(e)} = \frac{E(4\nu-1)(R_i+2R_k)}{24(2\nu^2+\nu-1)};$$

$$k_{24}^{(e)} = \frac{1}{(R_i-R_k)(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\left[\frac{E}{12}(R_i+R_k)(-R_i^2+2R_iR_k- \right.$$
$$-R_k^2+Z_i^2-2Z_iZ_k+Z_k^2)-$$
$$\left. -\frac{E\nu}{12}(R_i+R_k)(-R_i^2+2R_iR_k-R_k^2+2Z_i^2-4Z_iZ_k+2Z_k^2)\right];$$

$$k_{25}^{(e)} = \frac{E(R_i+2R_k)}{24(2\nu^2+\nu-1)};$$

$$k_{26}^{(e)} = \frac{1}{(R_i-R_k)(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\left[\frac{E}{24}(R_i+R_k)(2R_i^2-4R_iR_k+ \right.$$
$$+2R_k^2+Z_i^2-2Z_iZ_k+Z_k^2)-$$
$$\left. -\frac{E\nu}{24}(R_i+R_k)(2R_i^2-4R_iR_k+2R_k^2+2Z_i^2-4Z_iZ_k+2Z_k^2)\right];$$

$$k_{27}^{(e)} = -\frac{E(14R_i+R_k)}{72(\nu+1)} - \frac{E(4R_i-R_k)}{36(2\nu-1)};$$

$$k_{28}^{(e)} = \frac{1}{(R_i-R_k)(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1)}\left[\frac{E}{24}(6R_i^3-10R_i^2R_k+2R_iR_k^2- \right.$$
$$-R_iZ_i^2+2R_iZ_iZ_k-R_iZ_k^2+2R_k^3-R_kZ_i^2+2R_kZ_iZ_k-R_kZ_k^2)-$$
$$-\frac{E\nu}{24}(6R_i^3-10R_i^2R_k+2R_iR_k^2-2R_iZ_i^2+4R_iZ_iZ_k-$$
$$\left. -2R_iZ_k^2+2R_k^3-2R_kZ_i^2+4R_kZ_iZ_k-2R_kZ_k^2)\right];$$

$$k_{33}^{(e)} = (E(3R_k^4 - R_i^4 - 8R_iR_k^3 + 6R_i^2R_k^2 +$$
$$+ 8R_i^2Z_i^2 + 8R_i^2Z_k^2 + 8R_k^2Z_i^2 + 8R_k^2Z_k^2 - 8R_i^2Z_i^2 \ln R_i +$$
$$+ 8R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 8R_i^2Z_k^2 \ln R_i + 8R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 16R_iR_kZ_i^2 -$$
$$- 16R_iR_kZ_k^2 - 16R_i^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k + 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_i -$$
$$- 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_k - 32R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) +$$
$$+ (E\nu(16R_iR_k^3 + 2R_i^4 - 6R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 \ln R_i - 8R_i^2Z_i^2 \ln R_k + 8R_i^2Z_k^2 \ln R_i -$$
$$- 8R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_i +$$
$$+ 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{34}^{(e)} = -(E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1)) - (E(5R_i - 2R_k))/(72(\nu + 1));$$

$$k_{35}^{(e)} = (E(8R_iR_k^3 + R_i^4 - 3R_k^4 - 6R_i^2R_k^2 + 4R_i^2Z_i^2 +$$
$$+ 4R_i^2Z_k^2 + 4R_k^2Z_i^2 + 4R_k^2Z_k^2 - 4R_i^2Z_i^2 \ln R_i +$$
$$+ 4R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 4R_i^2Z_k^2 \ln R_i + 4R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_i^2 -$$
$$- 8R_iR_kZ_k^2 - 8R_i^2Z_iZ_k - 8R_k^2Z_iZ_k + 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_i - 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_k +$$
$$+ 16R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) -$$
$$- (E\nu(16R_iR_k^3 + 2R_i^4 - 6R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 - 4R_i^2Z_i^2 \ln R_i +$$
$$+ 4R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 4R_i^2Z_k^2 \ln R_i + 4R_i^2Z_k^2 \ln R_k + 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_i -$$
$$- 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{36}^{(e)} = (E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1)) - (E(R_i + 14R_k))/(72(\nu + 1));$$

$$k_{37}^{(e)} = (E(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k + R_i^4 - R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k +$$
$$+ 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i +$$
$$+ 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) -$$
$$- (E\nu(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k + 2R_i^4 - 2R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k +$$
$$+ 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i +$$
$$+ 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{38}^{(e)} = -(E(R_i + 2R_k))/(24(2nu^2 + nu - 1));$$

$$\begin{aligned}k_{44}^{(e)} = -((E(R_i^3 + R_i^2 R_k - 5R_i R_k^2 + R_i Z_i^2 - 2R_i Z_i Z_k + R_i Z_k^2 + 3R_k^3 + \\ + R_k Z_i^2 - 2R_k Z_i Z_k + R_k Z_k^2))/12 - (E\nu(R_i^3 + R_i^2 R_k - 5R_i R_k^2 + 2R_i Z_i^2 - \\ - 4R_i Z_i Z_k + 2R_i Z_k^2 + 3R_k^3 + 2R_k Z_i^2 - 4R_k Z_i Z_k + \\ + 2R_k Z_k^2))/12)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$k_{45}^{(e)} = (E(R_i + 14R_k))/(72(\nu + 1)) - (E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1));$$

$$\begin{aligned}k_{46}^{(e)} = -((E(-2R_i^3 - 2R_i^2 R_k + 10R_i R_k^2 + R_i Z_i^2 - 2R_i Z_i Z_k + \\ + R_i Z_k^2 - 6R_k^3 + R_k Z_i^2 - 2R_k Z_i Z_k + R_k Z_k^2))/24 - (E\nu(-2R_i^3 - 2R_i^2 R_k + \\ + 10R_i R_k^2 + 2R_i Z_i^2 - 4R_i Z_i Z_k + 2R_i Z_k^2 - 6R_k^3 + 2R_k Z_i^2 - 4R_k Z_i Z_k + \\ + 2R_k Z_k^2))/24)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$k_{47}^{(e)} = -(E(2R_i + R_k))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$\begin{aligned}k_{48}^{(e)} = ((E(R_i + R_k)(2R_i^2 - 4R_i R_k + 2R_k^2 + Z_i^2 - 2Z_i Z_k + Z_k^2))/24 - \\ - (E\nu(R_i + R_k)(2R_i^2 - 4R_i R_k + 2R_k^2 + 2Z_i^2 - 4Z_i Z_k + \\ + 2Z_k^2))/24)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$k_{55}^{(e)} = (E(3R_k^4 - R_i^4 - 8R_iR_k^3 + 6R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 + 8R_i^2Z_k^2 +$$
$$+ 8R_k^2Z_i^2 + 8R_k^2Z_k^2 - 8R_i^2Z_i^2 \ln R_i + 8R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 8R_i^2Z_k^2 \ln R_i +$$
$$+ 8R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 16R_iR_kZ_i^2 - 16R_iR_kZ_k^2 - 16R_i^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k +$$
$$+ 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_i - 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_k +$$
$$+ 32R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) +$$
$$+ (E\nu(16R_iR_k^3 + 2R_i^4 - 6R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 \ln R_i - 8R_i^2Z_i^2 \ln R_k +$$
$$+ 8R_i^2Z_k^2 \ln R_i - 8R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_i +$$
$$+ 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{56}^{(e)} = (E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1)) + (E(5R_i - 2R_k))/(72(\nu + 1));$$

$$k_{57}^{(e)} = (E\nu(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k + 2R_i^4 - 2R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_i +$$
$$+ 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i -$$
$$- 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) -$$
$$- (E(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k + R_i^4 - R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_k -$$
$$- 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i -$$
$$- 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{58}^{(e)} = -(E(4\nu - 1)(R_i + 2R_k))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{66}^{(e)} = -((E(R_i^3 + R_i^2R_k - 5R_iR_k^2 + R_iZ_i^2 - 2R_iZ_iZ_k + R_iZ_k^2 + 3R_k^3 +$$
$$+ R_kZ_i^2 - 2R_kZ_iZ_k + R_kZ_k^2))/12 - (E\nu(R_i^3 + R_i^2R_k - 5R_iR_k^2 + 2R_iZ_i^2 -$$
$$- 4R_iZ_iZ_k + 2R_iZ_k^2 + 3R_k^3 + 2R_kZ_i^2 - 4R_kZ_iZ_k +$$
$$+ 2R_kZ_k^2))/12)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{67}^{(e)} = (E(4\nu - 1)(2R_i + R_k))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$
\begin{aligned}
k_{68}^{(e)} = ((E(R_i+R_k)(-R_i^2+2R_iR_k-R_k^2+Z_i^2-2Z_iZ_k+Z_k^2))/12- \\
-(E\nu(R_i+R_k)(-R_i^2+2R_iR_k-R_k^2+2Z_i^2-4Z_iZ_k+ \\
+2Z_k^2))/12)/((R_i-R_k)(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{77}^{(e)} = -(E(3R_i^4-8R_i^3R_k-R_k^4+6R_i^2R_k^2+8R_i^2Z_i^2+8R_i^2Z_k^2+8R_k^2Z_i^2+ \\
+8R_k^2Z_k^2+8R_k^2Z_i^2\ln R_i-8R_k^2Z_i^2\ln R_k+8R_k^2Z_k^2\ln R_i-8R_k^2Z_k^2\ln R_k- \\
-16R_iR_kZ_i^2-16R_iR_kZ_k^2-16R_i^2Z_iZ_k-16R_k^2Z_iZ_k-16R_k^2Z_iZ_k\ln R_i+ \\
+16R_k^2Z_iZ_k\ln R_k+32R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1))- \\
-(E\nu(16R_i^3R_k-6R_i^4+2R_k^4-12R_i^2R_k^2-8R_k^2Z_i^2\ln R_i+ \\
+8R_k^2Z_i^2\ln R_k-8R_k^2Z_k^2\ln R_i+8R_k^2Z_k^2\ln R_k+16R_k^2Z_iZ_k\ln R_i- \\
-16R_k^2Z_iZ_k\ln R_k))/(24(R_i-R_k)^2(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1));
\end{aligned}
$$

$$
k_{78}^{(e)} = (E(2R_i-5R_k))/(72(\nu+1))+(E(4R_i-R_k))/(36(2\nu-1));
$$

$$
\begin{aligned}
k_{88}^{(e)} = -((E(3R_i^3-5R_i^2R_k+R_iR_k^2+R_iZ_i^2-2R_iZ_iZ_k+R_iZ_k^2+R_k^3+ \\
+R_kZ_i^2-2R_kZ_iZ_k+R_kZ_k^2))/12-(E\nu(3R_i^3-5R_i^2R_k+R_iR_k^2+ \\
+2R_iZ_i^2-4R_iZ_iZ_k+2R_iZ_k^2+R_k^3+2R_kZ_i^2-4R_kZ_iZ_k+ \\
+2R_kZ_k^2))/12)/((R_i-R_k)(Z_i-Z_k)(2\nu^2+\nu-1));
\end{aligned}
$$

Значения коэффициентов выражения (5.22):

$$
\begin{aligned}
f_1^{(e)} = (E(3R_k^2\gamma_{cr,RZ} - 6R_i^2\gamma_{cr,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,RZ} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,r} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\theta} + \\
+ 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,r} - 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,r} + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\theta} + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\theta} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,r} - \\
- 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\theta} - 8R_iT_iZ_i\alpha - 4R_iT_jZ_i\alpha + 8R_iT_iZ_k\alpha - 2R_iT_kZ_i\alpha + \\
+ 2R_kT_iZ_i\alpha + 4R_iT_jZ_k\alpha - 4R_iT_lZ_i\alpha - 2R_kT_jZ_i\alpha + 2R_iT_kZ_k\alpha - \\
- 2R_kT_iZ_k\alpha - R_kT_kZ_i\alpha + 18R_iT_{min}Z_i\alpha + 4R_iT_lZ_k\alpha + 2R_kT_jZ_k\alpha + \\
+ R_kT_lZ_i\alpha + R_kT_kZ_k\alpha - 18R_iT_{min}Z_k\alpha - \\
- R_kT_lZ_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - (E\nu(6R_k^2\gamma_{cr,RZ} - \\
- 12R_i^2\gamma_{cr,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,RZ} + 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,Z} - 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,r} + 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,\theta} - \\
- 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,Z} + 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,r} - 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,\theta} + 8R_iT_iZ_i\alpha + 4R_iT_jZ_i\alpha - \\
- 8R_iT_iZ_k\alpha + 2R_iT_kZ_i\alpha - 2R_kT_iZ_i\alpha - 4R_iT_jZ_k\alpha + 4R_iT_lZ_i\alpha + \\
+ 2R_kT_jZ_i\alpha - 2R_iT_kZ_k\alpha + 2R_kT_iZ_k\alpha + R_kT_kZ_i\alpha - 18R_iT_{min}Z_i\alpha - \\
- 4R_iT_lZ_k\alpha - 2R_kT_jZ_k\alpha - R_kT_lZ_i\alpha - R_kT_kZ_k\alpha + 18R_iT_{min}Z_k\alpha + \\
+ R_kT_lZ_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2^{(e)} = (E(4R_k^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} - 3R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} + 3R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} - \\
- 3R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} + 3R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - R_i^2T_k\alpha + \\
+ R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha + \\
+ R_k^2T_l\alpha - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - \\
- 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) + (E\nu(8R_i^2\varepsilon_{cr,Z} - \\
- 8R_i^2\varepsilon_{cr,\theta} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_k^2\varepsilon_{cr,Z} + \\
+ 4R_iR_k\varepsilon_{cr,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} + 6R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} - 6R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} + \\
+ 6R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} - 6R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - R_i^2T_k\alpha + \\
+ R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha + \\
+ R_k^2T_l\alpha - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3^{(e)} = (E\nu(6R_i^2\gamma_{cr,RZ} - 12R_k^2\gamma_{cr,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,RZ} - 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,r} + 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\theta} +\\
+ 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,r} - 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\theta} + 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,Z} - 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,Z} + 2R_iT_iZ_i\alpha -\\
- 2R_iT_jZ_i\alpha - 2R_iT_iZ_k\alpha - R_iT_kZ_i\alpha + 4R_kT_iZ_i\alpha + 2R_iT_jZ_k\alpha + R_iT_lZ_i\alpha +\\
+ 8R_kT_jZ_i\alpha + R_iT_kZ_k\alpha - 4R_kT_iZ_k\alpha + 4R_kT_kZ_i\alpha - R_iT_lZ_k\alpha - 8R_kT_jZ_k\alpha +\\
+ 2R_kT_lZ_i\alpha - 4R_kT_kZ_k\alpha - 18R_kT_{min}Z_i\alpha - 2R_kT_lZ_k\alpha +\\
+ 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - (E(3R_i^2\gamma_{cr,RZ} -\\
- 6R_k^2\gamma_{cr,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,RZ} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,r} + 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\theta} + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,r} -\\
- 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,r} - 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\theta} - 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\theta} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,r} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\theta} -\\
- 2R_iT_iZ_i\alpha + 2R_iT_jZ_i\alpha + 2R_iT_iZ_k\alpha + R_iT_kZ_i\alpha - 4R_kT_iZ_i\alpha - 2R_iT_jZ_k\alpha -\\
- R_iT_lZ_i\alpha - 8R_kT_jZ_i\alpha - R_iT_kZ_k\alpha + 4R_kT_iZ_k\alpha - 4R_kT_kZ_i\alpha + R_iT_lZ_k\alpha +\\
+ 8R_kT_jZ_k\alpha - 2R_kT_lZ_i\alpha + 4R_kT_kZ_k\alpha + 18R_kT_{min}Z_i\alpha +\\
+ 2R_kT_lZ_k\alpha - 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4^{(e)} = -(E(4R_i^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} - 3R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} + 3R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} -\\
- 3R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} + 3R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} + R_i^2T_i\alpha + R_i^2T_j\alpha + R_i^2T_k\alpha - R_k^2T_i\alpha +\\
+ R_i^2T_l\alpha - 3R_k^2T_j\alpha - 3R_k^2T_k\alpha - 4R_i^2T_{min}\alpha - R_k^2T_l\alpha + 8R_k^2T_{min}\alpha +\\
+ 2R_iR_kT_j\alpha + 2R_iR_kT_k\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) -\\
- (E\nu(4R_i^2\varepsilon_{cr,r} + 4R_i^2\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_i^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,r} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,\theta} + 8R_k^2\varepsilon_{cr,Z} +\\
+ 4R_iR_k\varepsilon_{cr,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} + 6R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} - 6R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} +\\
+ 6R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} - 6R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} + R_i^2T_i\alpha + R_i^2T_j\alpha + R_i^2T_k\alpha - R_k^2T_i\alpha +\\
+ R_i^2T_l\alpha - 3R_k^2T_j\alpha - 3R_k^2T_k\alpha - 4R_i^2T_{min}\alpha - R_k^2T_l\alpha + 8R_k^2T_{min}\alpha +\\
+ 2R_iR_kT_j\alpha + 2R_iR_kT_k\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5^{(e)} = (E(&3R_i^2\gamma_{cr,RZ} - 6R_k^2\gamma_{cr,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,RZ} + 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,r} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\theta} - \\
&- 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,r} + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,r} + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\theta} + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\theta} - 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,r} - \\
&- 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\theta} + R_iT_iZ_i\alpha - R_iT_jZ_i\alpha - R_iT_iZ_k\alpha - 2R_iT_kZ_i\alpha + \\
&+ 2R_kT_iZ_i\alpha + R_iT_jZ_k\alpha + 2R_iT_lZ_i\alpha + 4R_kT_jZ_i\alpha + 2R_iT_kZ_k\alpha - 2R_kT_iZ_k\alpha + \\
&+ 8R_kT_kZ_i\alpha - 2R_iT_lZ_k\alpha - 4R_kT_jZ_k\alpha + 4R_kT_lZ_i\alpha - 8R_kT_kZ_k\alpha - 18R_kT_{min}Z_i\alpha - \\
&- 4R_kT_lZ_k\alpha + 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
&- (E\nu(6R_i^2\gamma_{cr,RZ} - 12R_k^2\gamma_{cr,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,RZ} + 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,r} - 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\theta} - \\
&- 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,r} + 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\theta} - 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,Z} + 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,Z} - R_iT_iZ_i\alpha + \\
&+ R_iT_jZ_i\alpha + R_iT_iZ_k\alpha + 2R_iT_kZ_i\alpha - 2R_kT_iZ_i\alpha - R_iT_jZ_k\alpha - 2R_iT_lZ_i\alpha - \\
&- 4R_kT_jZ_i\alpha - 2R_iT_kZ_k\alpha + 2R_kT_iZ_k\alpha - 8R_kT_kZ_i\alpha + 2R_iT_lZ_k\alpha + \\
&+ 4R_kT_jZ_k\alpha - 4R_kT_lZ_i\alpha + 8R_kT_kZ_k\alpha + 18R_kT_{min}Z_i\alpha + 4R_kT_lZ_k\alpha - \\
&- 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_6^{(e)} = (E(&4R_i^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} + 3R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} - 3R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} + \\
&+ 3R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} - 3R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} + R_i^2T_i\alpha + R_i^2T_j\alpha + R_i^2T_k\alpha - R_k^2T_i\alpha + \\
&+ R_i^2T_l\alpha - 3R_k^2T_j\alpha - 3R_k^2T_k\alpha - 4R_i^2T_{min}\alpha - R_k^2T_l\alpha + 8R_k^2T_{min}\alpha + \\
&+ 2R_iR_kT_j\alpha + 2R_iR_kT_k\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) + \\
&+ (E\nu(4R_i^2\varepsilon_{cr,r} + 4R_i^2\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_i^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,r} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,\theta} + \\
&+ 8R_k^2\varepsilon_{cr,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} - \\
&- 6R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} + 6R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} - 6R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} + 6R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} + R_i^2T_i\alpha + \\
&+ R_i^2T_j\alpha + R_i^2T_k\alpha - R_k^2T_i\alpha + R_i^2T_l\alpha - 3R_k^2T_j\alpha - 3R_k^2T_k\alpha - \\
&- 4R_i^2T_{min}\alpha - R_k^2T_l\alpha + 8R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_j\alpha + 2R_iR_kT_k\alpha - \\
&- 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_7^{(e)} = {} & (E\nu(6R_k^2\gamma_{cr,RZ} - 12R_i^2\gamma_{cr,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,RZ} - 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,Z} + 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,r} - \\
& - 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,\theta} + 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,Z} - 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,r} + 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_iT_iZ_i\alpha - \\
& - 2R_iT_jZ_i\alpha + 4R_iT_iZ_k\alpha - 4R_iT_kZ_i\alpha + R_kT_iZ_i\alpha + 2R_iT_jZ_k\alpha - 8R_iT_lZ_i\alpha - \\
& - R_kT_jZ_i\alpha + 4R_iT_kZ_k\alpha - R_kT_iZ_k\alpha - 2R_kT_kZ_i\alpha + 18R_iT_{min}Z_i\alpha + \\
& + 8R_iT_lZ_k\alpha + R_kT_jZ_k\alpha + 2R_kT_lZ_i\alpha + 2R_kT_kZ_k\alpha - 18R_iT_{min}Z_k\alpha - \\
& - 2R_kT_lZ_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - (E(3R_k^2\gamma_{cr,RZ} - \\
& - 6R_i^2\gamma_{cr,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,RZ} + 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,r} + 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\theta} - 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,r} + \\
& + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,r} - 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\theta} - 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\theta} - 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,r} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\theta} + \\
& + 4R_iT_iZ_i\alpha + 2R_iT_jZ_i\alpha - 4R_iT_iZ_k\alpha + 4R_iT_kZ_i\alpha - R_kT_iZ_i\alpha - 2R_iT_jZ_k\alpha + \\
& + 8R_iT_lZ_i\alpha + R_kT_jZ_i\alpha - 4R_iT_kZ_k\alpha + R_kT_iZ_k\alpha + 2R_kT_kZ_i\alpha - 18R_iT_{min}Z_i\alpha - \\
& - 8R_iT_lZ_k\alpha - R_kT_jZ_k\alpha - 2R_kT_lZ_i\alpha - 2R_kT_kZ_k\alpha + 18R_iT_{min}Z_k\alpha + \\
& + 2R_kT_lZ_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_8^{(e)} = {} & -(E(4R_k^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} + 3R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} - 3R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} + \\
& + 3R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} - 3R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - R_i^2T_k\alpha + \\
& + R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha + R_k^2T_l\alpha - \\
& - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
& - (E\nu(8R_i^2\varepsilon_{cr,Z} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,\theta} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,\theta} - \\
& - 4R_k^2\varepsilon_{cr,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\theta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,Z} - 6R_iZ_i\gamma_{cr,RZ} + \\
& + 6R_iZ_k\gamma_{cr,RZ} - 6R_kZ_i\gamma_{cr,RZ} + 6R_kZ_k\gamma_{cr,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - \\
& - R_i^2T_k\alpha + R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha + \\
& + R_k^2T_l\alpha - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - \\
& - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

Глава Б. Код модулей к программным комплексам MatLab и Octave

Б.1 Код модуля определения НДС полимерного диска из главы 4

Listing Б.1 — Some Code

```
clc;
clear all;
tic
qnIntT   = 20;        %число интерваловразбиенияповремени
qnPtsT   = qnIntT + 1;    %число расчётныхточекповремени
GlobalS1 = zeros(qnPtsT,5);
GlobalS3 = zeros(qnPtsT,5);
for GaPHI = 1:5
  if GaPHI == 1
    ga = 0
    PHI = 0
  elseif GaPHI == 2
    ga = 0.3
    PHI = 0
  elseif GaPHI == 3
    ga = 0
    PHI = 70
  elseif GaPHI == 4
    ga = 0.15
    PHI = 35
  elseif GaPHI == 5
    ga = 0.3
    PHI = 70
  end;
PrA      = 0; %Давление навнутреннейграницилиндра    , МПа
PrB      = 0; %Давление навнешнейграницилиндра    , МПа
PrD      = 0; %Давление нанижнемторцецилиндра    , МПа
PrU      = -10; %Давление наверхнемторцецилиндра    , МПа
Ra       = 0.01; %Внутренний радиус, м
Rb       = 0.050; %Внешний радиус, м
Zmin     = 0; %Координата нижнейточки  , м
Zmax     = 0.005; %Координата верхнейточки  , м
limTime  = 10; %ч. Максимальноевремя , докоторогопроисходитрасчёт
vTime    = zeros(qnPtsT, 1); %Вектор текущеговремени
%Формируем вектоpотекущемвремени
%В случаеравномерногошагаповремени
kg = 10^2; %во сколькоразпоследнийэлементбольшепервого
q = kg^(1/(qnIntT-1));
b1 = (limTime)*(1-q)/(1-q^qnIntT);
vTime(1) = 0;
for i = 1:qnIntT
```

```
  %vR(i) = Ra + (i-1)*(Rb-Ra)/qnFeR;
  vTime(i+1) = vTime(i) + b1*q^(i-1);
end;
sizeFrac = 10; %Максимальное количествореберэлементаповысотеилирадиусу
%Создаём область, описывающуюрассчитываемоетело . Ход - противчс ..
%Первый элементвстолбцеопределяеттипсегмента (2 —отрезокпрямой );
%2, 3 (4, 5) строкиопределяют x (y) координатыначальнойиконечнойточки
%соответственно; 6, 7 строки—номеробластислеваисправапонаправлению
%обхода. Дляотрезковпрямыхследующиестрокиненужныизадаютсянулями ;
%для эллипса 8, 9 строкиопределяют x и y координатыцентраэллипса ,
%а 10, 11 строки—его x и y полуосидля ( окружностионисовпадаютиравны
%радиусу окружности); 12 строкаопределяетуголповоротаэллипсавокруг
%центра противчасовойстрелкив ( радианах). 1)

g = [ 2     2     2     2
      Ra    Rb    Rb    Ra
      Rb    Rb    Ra    Ra
      Zmin  Zmin  Zmax  Zmax
      Zmin  Zmax  Zmax  Zmin
      1     1     1     1
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0 ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%p - массивузловконечноэлементнойсеткистолбцам ( соответствуютузлы ):
%- перваястрока - горизонтальныекоординатыузлов ,
%- втораястрокавертикальные - координатыузлов ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%e - матрицаграничныхэлементовнаграницахразделазонсм (. pdegeom):
%столбцам соответствуютграничныеэлементысტороны ( конечныхэлементов ,
    принадлежащиеграницамразделазонилигранницерасчётнойобласти );
%первые двестроки - номераномераначальныхиконечныхузловграничныхэлементов ;
%строки 3, 4 - длинадуги «»
    отначалаграничногосегментадоначальногоиконечногоузлаграничногоэлемента ,
    отнесённаякдлинедуги «» граничногосегмента ;
%строка 5 - номераграничныхсегментов , которымпринадлежатграничныеэлементы ;
%строки 6, 7 - номеразон , примыкающихслеваисправакграничнымэлементам ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%t - матрицатреугольныхконечныхэлементовстолбцам ( соответствуюттреугольники ):
%- t(1:3,ie) - глобальныеномераузловтреугольникасномером ie,
%- t(4,ie) - номерзоны , которойпринадлежиттреугольниксномером ie.
%Проводим%% заменупеременныхнаболеечитаемоудобные
%p -> nds от nodes - матрицаузловКЭсетки
```

```
%e -> edges – матрицаграничныхэлементовнаграницахраздела
%t -> fel от finite element – матрицатреугольныхконечныхэлементов
Hm = min([(Rb–Ra)/sizeFrac (Zmax–Zmin)/sizeFrac])
[nds, edges, fel] = initmesh(g, 'Hmax', Hm);
pdemesh(nds, edges, fel), axis equal
qnNds      = size(nds,2);    %Всего унасузлов
qnEdges    = size(edges,2);  %Всего унасрёбер
qnFel      = size(fel,2);    %Всего унасконечныхэлементов
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Формируем глобальныематрицысинформациейонапряжениях , перемещениях,
%физикомеханических– параметрахматериалаитд ..
glU        = zeros(qnPtsT, 2*qnNds); % перемещения u и w
Sr         = zeros(qnPtsT, qnFel);   % радиальныенапряжения
St         = zeros(qnPtsT, qnFel);   % окружныенапряжения
Sz         = zeros(qnPtsT, qnFel);   % осевыенапряжения
S1         = zeros(qnPtsT, qnFel);   % Максимальныеглавныенапряжения
S3         = zeros(qnPtsT, qnFel);   % Минимальныеглавныенапряжения
Trz        = zeros(qnPtsT, qnFel);   % касательныенапряжения
mEpsCrR    = zeros(qnPtsT, qnFel); % деформацииползучестивдольоси r
mEpsCrT    = zeros(qnPtsT, qnFel); % деформацииползучестивдольоси theta
mEpsCrZ    = zeros(qnPtsT, qnFel); % деформацииползучестивдольоси z
mGamCrRZ   = zeros(qnPtsT, qnFel); % сдвиговыедеформацийползучести
mUng       = zeros(qnPtsT, qnFel); % модульупругости , МПа
mNu        = zeros(qnPtsT, qnFel); % коэффициентпуассона
mE1unlim   = zeros(qnPtsT, qnFel); % модульвысокоэластичностиго 1– спектра, МПа
mM1cr      = zeros(qnPtsT, qnFel); % модульскоростиго 1– спектра, МПа
mN01cr     = zeros(qnPtsT, qnFel); % кт– начальнойрелакс . вязкостиго 1– спектра, МПачас*
mE2unlim   = zeros(qnPtsT, qnFel); % модульвысокоэластичностиго 2– спектра, МПа
mM2cr      = zeros(qnPtsT, qnFel); % модульскоростиго 2– спектра, МПа
mN02cr     = zeros(qnPtsT, qnFel); % кт– начальнойрелакс . вязкостиго 2– спектра, МПачас*
%Начинаем переборкаждогоэтапавремени
for t = 1:qnPtsT
  %Формируем глобальнуюматрицужёсткостиивекторнагрузоквтекущий
  %момент времени
  Kglob = zeros(2*qnNds);
  Fglob = zeros(2*qnNds,1);
  %Присваиваем физикомеханические– параметрыматериалакаждомуКЭ
  for e = 1:qnFel
    if fel(4,e) == 1
      mUng(t,e)      = 694 + 1251*ga + 2.908*PHI –4.498*ga*PHI; %МПа
      mNu(t,e)       = 0.3; % коэффициентпуассона
      mE1unlim(t,e)  = 228.9 + 1093*ga + 2.276*PHI –1.5*ga*PHI; %МПа
      mM1cr(t,e)     = 5.545 + 8.501*ga + 0.01283*PHI + 0.05456*ga*PHI; %МПа
      mN01cr(t,e)    = 1113 + 2398*ga + 8.877*PHI –32.64*ga*PHI; %МПачас*
      mE2unlim(t,e)  = 0;
      mM2cr(t,e)     = 0;
      mN02cr(t,e)    = 1e100; %МПачас*
```

```
        end;
    end;
    disp(fprintf(1,'Провожу расчётНДС , шагвремени %g из %g',t,qnPtsT));
    for e = 1:qnFel
        indNds = zeros(3,1); %Номера узловтекущегоКЭ
        for i = 1:3
            indNds(i) = fel(i,e);
        end;
        %Определяем координатыкаждогоузлаКЭ
        Ri = nds(1, indNds(1));
        Rj = nds(1, indNds(2));
        Rk = nds(1, indNds(3));
        Zi = nds(2, indNds(1));
        Zj = nds(2, indNds(2));
        Zk = nds(2, indNds(3));
        %Определяем положениецентратяжестиКЭвдольосей r и z
        r = (Ri + Rj + Rk)/3;
        z = (Zi + Zj + Zk)/3;
        EE = mUng(t,e);
        NN = mNu(t,e);
        Area = matAreaTr(Ri,Rj,Rk,Zi,Zj,Zk);
        BB   = matBtr(r,Ri,Rj,Rk,z,Zi,Zj,Zk);
        DD   = matDtr(EE, NN);
        Kel  = BB'*DD*BB*r*Area;
        %Переносим элементыизлокальнойматрицыжёсткостивглобальную
        for jj = 1:3
            for ii = 1:3
                for rr = 0:1
                    for cc = 0:1
                        Kglob(2*indNds(jj)-rr,2*indNds(ii)-cc) = ...
                            Kglob(2*indNds(jj)-rr,2*indNds(ii)-cc) + Kel(2*jj-rr,2*ii-cc);
                    end; %cc = 0:1
                end; %of rr = 0:1
            end; %of ii = 1:3
        end; %of jj = 1:3
        ecrR  = mEpsCrR(t,e);
        ecrT  = mEpsCrT(t,e);
        ecrZ  = mEpsCrZ(t,e);
        gcrRZ = mGamCrRZ(t,e);
        eCR = [ecrR; ecrT; ecrZ; gcrRZ];
        Fel = BB'*DD*(eCR)*r*Area;
        %Переносим элементыизлокальноговекторанагрузоквглобальный
        for jj = 1:3
            for rr = 0:1
                Fglob(2*indNds(jj)-rr) = Fglob(2*indNds(jj)-rr) + Fel(2*jj-rr);
            end; %of rr = 0:1
        end; %of jj = 1:4
```

```
  end; %for e = 1:qnFel
  %Накладываем граничныеусловия
  for ed = 1:qnEdges
    indNodes = zeros(2,1);
    indNodes(1) = edges(1,ed);
    indNodes(2) = edges(2,ed);
    Ri = nds(1, indNodes(1));
    Rj = nds(1, indNodes(2));
    Zi = nds(2, indNodes(1));
    Zj = nds(2, indNodes(2));
    %Прикладываем вертикальнуюнагрузкунаверхнююгрань
    if (Zi==Zmax)&&(Zj==Zmax)
      r = (Ri+Rj)/2;
      len = abs(Ri-Rj)/2;
      Fglob(2*indNodes(1)) = Fglob(2*indNodes(1)) + PrU*r*len;
      Fglob(2*indNodes(2)) = Fglob(2*indNodes(2)) + PrU*r*len;
    end;
    %Зануляем вертикальныеперемещениянаосисемметрии
    if (Zi==Zmin)&&(Zj==Zmin)
      for i = 1:2
        Kglob(2*indNodes(i),:) = 0;
        Kglob(:,2*indNodes(i)) = 0;
        Kglob(2*indNodes(i),2*indNodes(i)) = 1;
        Fglob(2*indNodes(i)) = 0;
      end;
    end;
    %Зануляем горизонтальныеперемещнияподгрузом
    if (Zi==Zmax)&&(Zj==Zmax)
      for i = 1:2
        Kglob(2*indNodes(i)-1,:) = 0;
        Kglob(:,2*indNodes(i)-1) = 0;
        Kglob(2*indNodes(i)-1,2*indNodes(i)-1) = 1;
        Fglob(2*indNodes(i)-1) = 0;
      end;
    end;
  end;
  UU = Kglob\Fglob;
  %Переносим результатырасчётавглобальнуюматрицуперемещений
  for i = 1:qnNds*2
    glU(t,i) = UU(i);
  end
  %Определяем напряжениявкаждомКЭ
  for e = 1:qnFel
    indNds = zeros(3,1); %Номера узловтекущегоКЭ
    for i = 1:3
      indNds(i) = fel(i,e);
    end;
```

```
%Определяем координатыкаждогоузлаКЭ
Ri = nds(1, indNds(1));
Rj = nds(1, indNds(2));
Rk = nds(1, indNds(3));
Zi = nds(2, indNds(1));
Zj = nds(2, indNds(2));
Zk = nds(2, indNds(3));
%Определяем положениецентратяжестиКЭвдольосей r и z
r = (Ri + Rj + Rk)/3;
z = (Zi + Zj + Zk)/3;
Area = matAreaTr(Ri,Rj,Rk,Zi,Zj,Zk);
BB   = matBtr(r,Ri,Rj,Rk,z,Zi,Zj,Zk);
DD   = matDtr(mUng(t,e), mNu(t,e));
%Переносим перемещенияизглобальнойматрицывлокальныйвектор
Uel = zeros(6,1);
for jj = 1:3
  for rr = 0:1
    Uel(2*jj-rr) = glU(t, 2*indNds(jj)-rr);
  end; %of rr = 0:1
end; %of jj = 1:4
epsFull = BB*Uel;
ecrR  = mEpsCrR(t,e);
ecrT  = mEpsCrT(t,e);
ecrZ  = mEpsCrZ(t,e);
gcrRZ = mGamCrRZ(t,e);
epsCreep = [ecrR; ecrT; ecrZ; gcrRZ];
S = DD*(epsFull - epsCreep);
Sr(t,e)   = S(1);
St(t,e)   = S(2);
Sz(t,e)   = S(3);
Trz(t,e)  = S(4);
TTT = [ Sr(t,e)   0        Trz(t,e)
        0         St(t,e)  0
        Trz(t,e)  0        Sz(t,e)];
[RR, DD] = eig(TTT);
SS1 = DD(1,1);
if SS1<DD(2,2)
  SS1 = DD(2,2);
elseif SS1<DD(3,3)
  SS1 = DD(3,3);
end;
SS3 = DD(1,1);
if SS3>DD(2,2)
  SS3 = DD(2,2);
elseif SS3>DD(3,3)
  SS3 = DD(3,3);
end;
```

```
      S1(t,e)    = SS1;
      S3(t,e)    = SS3;
      if t<qnPtsT
        Eunl  = mE1unlim(t,e);
        ms    = mM1cr(t,e);
        n0s   = mN01cr(t,e);
        pe    = (Sr(t,e) + St(t,e) + Sz(t,e)) / 3;
        frs   = 3/2*(Sr(t,e) - pe) - Eunl * ecrR;
        fts   = 3/2*(St(t,e) - pe) - Eunl * ecrT;
        fzs   = 3/2*(Sz(t,e) - pe) - Eunl * ecrZ;
        frzs  = 3/2*(Trz(t,e)) - Eunl * gcrRZ;
        fmax = abs(frs);
        if fmax < abs(fts)
          fmax = abs(fts);
        end;
        if fmax < abs(fzs)
          fmax = abs(fzs);
        end;
        dt = (vTime(t+1)-vTime(t));
        mEpsCrR(t+1,e)  = mEpsCrR(t,e) + frs/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
        mEpsCrT(t+1,e)  = mEpsCrT(t,e) + fts/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
        mEpsCrZ(t+1,e)  = mEpsCrZ(t,e) + fzs/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
        mGamCrRZ(t+1,e) = mGamCrRZ(t,e) + frzs/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
      end;
  end;%for e = 1:qnFel
end; %for t = 1:qnPtsT
toc
%Определяем главныенапряжениявкаждыймоментвремени
vMaxSr = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxSt = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxSt = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxTrz = zeros(qnPtsT,1);
vMinTrz = zeros(qnPtsT,1);
for t=1:qnPtsT
  maxSr = Sr(t,1,1);
  minSr = Sr(t,1,1);
  maxSt = Sr(t,1,1);
  minSt = Sr(t,1,1);
  maxSz = Sr(t,1,1);
  minSz = Sr(t,1,1);
  maxTrz = Sr(t,1,1);
  minTrz = Sr(t,1,1);
  maxS1 = S1(t,1,1);
  minS1 = S1(t,1,1);
```

```
maxS3 = S3(t,1,1);
minS3 = S3(t,1,1);
%Заполняем матрицусфизикомеханическими — параметрамиматериала
ind = 0;
for l = 1:qnLayersZ
  qn = qnFeLayer(l);
  for i = 1:qn
    ind = ind+1;
    mUng(:,ind,:)       = ELayer(l);
    mNu(:,ind,:)        = nuLayer(l);
    mEunlim(:,ind,:)    = Eu1Layer(l);
    mMcr(:,ind,:)       = m1Layer(l);
    mN0cr(:,ind,:)      = n1Layer(l);
    mE2unlim(:,ind,:)   = Eu2Layer(l);
    mM2cr(:,ind,:)      = m2Layer(l);
    mN02cr(:,ind,:)     = n2Layer(l);
  end;
end;
for e=1:qnFel
  %for i = 1:qnFeR
    if maxSr<Sr(t,e)
      maxSr = Sr(t,e);
    end;
    if minSr>Sr(t,e)
      minSr = Sr(t,e);
    end;
    if maxSt<St(t,e)
      maxSt = St(t,e);
    end;
    if minSt>St(t,e)
      minSt = St(t,e);
    end;
    if maxSz<Sz(t,e)
      maxSz = Sz(t,e);
    end;
    if minSz>Sz(t,e)
      minSz = Sz(t,e);
    end;
    if maxTrz<Trz(t,e)
      maxTrz = Trz(t,e);
    end;
    if minTrz>Trz(t,e)
      minTrz = Trz(t,e);
    end;
    if maxS1<S1(t,e)
      maxS1 = S1(t,e);
    end;
```

```
        if minS3>S3(t,e)
          minS3 = S3(t,e);
        end;
        vMaxSr(t) = maxSr;
        vMinSr(t) = minSr;
        vMaxSt(t) = maxSt;
        vMinSt(t) = minSt;
        vMaxSz(t) = maxSz;
        vMinSz(t) = minSz;
        vMaxTrz(t) = maxTrz;
        vMinTrz(t) = minTrz;
        vMaxS1(t) = maxS1;
        vMinS1(t) = minS1;
        vMaxS3(t) = maxS3;
        vMinS3(t) = minS3;
        GlobalS1(t,GaPHI) = maxS1;
        GlobalS3(t,GaPHI) = minS3;
     %end;
  end;
end;
t = 1
vSr=zeros(qnFel,1);
vSt=zeros(qnFel,1);
vSz=zeros(qnFel,1);
vTrz=zeros(qnFel,1);
vS1=zeros(qnFel,1);
vS3=zeros(qnFel,1);
for e=1:qnFel
  vSr(e) = Sr(t,e);
  vSt(e) = St(t,e);
  vSz(e) = Sz(t,e);
  vS1(e) = S1(t,e);
  vS3(e) = S3(t,e);
  vTrz(e) = Trz(t,e);
end;
```

Глава В. Свидетельства регистрации программ ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015611906

Оптимизация толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, испытывающих температурное и силовое воздействие

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет» (РГСУ) (RU)***

Авторы: ***Язьев Батыр Меретович (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Пучков Евгений Владимирович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)***

Заявка № **2014662800**

Дата поступления **10 декабря 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 февраля 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Рисунок В.1 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611906 от 09 февраля 2015 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015611914

Определение напряжённо-деформированного состояния бетонных тел цилиндрической формы под действием физических полей и механического давления

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет» (РГСУ) (RU)***

Авторы: ***Языев Батыр Меретович (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Пучков Евгений Владимирович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)***

Заявка № **2014662825**

Дата поступления **11 декабря 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 февраля 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Рисунок В.2 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611914 от 09 февраля 2015 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018616951

Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков

Правообладатель: ***федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)***

Авторы: ***Литвинов Степан Викторович (RU), Дудник Анастасия Евгеньевна (RU), Аваков Артур Артурович (RU), Труш Любовь Ивановна (RU)***

Заявка № **2018614101**

Дата поступления **24 апреля 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 июня 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Рисунок В.3 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018616951 от 09 июня 2018 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020619374

Расчет двухслойных армоцементных оболочек на силовые и температурные воздействия в условиях пожара

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ) (RU)***

Авторы: ***Журтов Артур Владимирович (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Хежев Толя Амирович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU), Языев Сердар Батырович (RU)***

Заявка № **2020617814**

Дата поступления **27 июля 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***17 августа 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Рисунок В.4 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020619374 от 17 августа 2020 г.


РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020660684

Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ) (RU)***

Авторы: ***Хаширова Светлана Юрьевна (RU), Лесняк Любовь Ивановна (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Язьев Сердар Батырович (RU), Язьев Батыр Меретович (RU), Молоканов Георгий Олегович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)***

Заявка № **2020617798**

Дата поступления **27 июля 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 сентября 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Рисунок В.5 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020660684 от 09 сентября 2020 г.

Глава Г. Внедрения результатов работы

107 078, Москва, Мясницкий пр., дом 5/8, строение 2.
тел. (8495) 447-12-18
ИНН 4264095532, р/с 40702810100000000537,

Газпромбанк филиал в г. Москва,
МФО 246002, кор/счет 30101810700000000831,
ИНН 7736011540, БИК 046015968

Утверждаю
Директор ООО «Элиар ком»
____________________В.Л. Минаков
«____»_____________ 2009

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов диссертационной работы С.В. Литвинова на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Место внедрения	Московская обл., г. Москва
Предмет внедрения	Пакет прикладных программ для моделирования процессов деформирования многослойных полимерных цилиндрических тел при термомеханических нагрузках.
Результаты внедрения	Разработанный автором пакет программ внедрен при разработке рецептуры композиционного материала, применяемого для производства изделия «Нагреватель низкотемпературный».

Представитель заказчика:
Гл. специалист
ООО «Элиар ком»
____________________Цапкало В.Г.

Исполнитель:
____

Рисунок Г.1 — Внедрение результатов исследований в ООО «Элиар ком»

ООО "О Л Е У М"

Тел/факс (863) 239-95-01, 239-94-03
E-mail: ooooleum@yandex.ru
344000 г. Ростов-на-Дону пр. Ворошиловский,87/65 оф.726

Утверждаю
Директор ООО «Олеум»
Вортман О.Ю.

16 октября 2009 г.

ТЕХНИЧЕСКИЙ АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата технических наук С.В. Литвинова «Моделирование процессов деформирования многослойных полимерных цилиндрических тел при термомеханических нагрузках».

Место внедрения	Ростовская обл., г. Ростов
Предмет внедрения	Пакет прикладных программ для расчета цилиндрических и сферических сосудов и аппаратов.
Результаты внедрения	Результаты диссертационной работы С.В. Литвинова, подтвержденные на численных моделях (на основе метода конечных элементов, реализованных в известных программных комплексах СТАДИО и ANSYS), используются в проработке вариантов цилиндрических и сферических сосудов и аппаратов для применения в строительстве, энергомашиностроении, нефтехимии-нефтепереработке и других высокотехнологичных отраслях.

Представители заказчика:
Директор ООО «Олеум»
Вортман О.Ю.__________

Исполнитель: аспирант кафедры сопротивления материалов РГСУ
Литвинов С.В.__________

Рисунок Г.2 — Внедрение результатов исследований в ООО «Олеум»

Общество с ограниченной ответственностью
«ЮЖРЕГИОНСТРОЙ»

344022, г. Ростов-на-Дону, ул. Станиславского 167/25, оф. 54 Газпромбанк филиал в г. Ростове-на-Дону,
тел. (8632) 95-03-19 МФО 246002, кор/счет 30101810700000000968,
ИНН 6164095563, р/с 40702810100000000497, ИНН 7736011540, БИК 046015968

«05» июля 2009 г. № 116/12

Утверждаю
Генеральный директор
ООО «Южрегионстрой»
К.К. Чигладзе

«05» июля 2009 г.

ТЕХНИЧЕСКИЙ АКТ

о внедрении в производство результатов диссертационной работы Литвинова С.В. «Моделирование процессов деформирования многослойных полимерных цилиндрических тел при термомеханических нагрузках», выдвинутой на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 02.00.06 – Высокомолекулярные соединения (Механика полимеров).

Комиссия в составе: председатель комиссии – главный специалист Вавилов В.М., члены комиссии – начальник лаб. 4 Хохлов Р.А., инженер Сидоров А.Н. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Литвинов С.В., в частности, эпоксидный герметик, использовался в качестве усиления гидроизоляционного слоя цокольной части 48 – квартирного жилого дома в г. Ростове-на-Дону.

Площадь гидроизоляции составила 108 кв.м. Перед заливкой герметика поверхность расчищалась от старого цементно-песчанного раствора на глубину до 3 см, после чего проводилась их герметизация разработанным составом.

Ожидаемый экономический эффект от внедрения нового композиционного материала (герметик) восемьдесят тысяч пятьсот рублей в год. Расчеты годового экономического эффекта произведены в соответствии с методикой определения экономической эффективности от внедрения новой техники.

В настоящем акте указан ожидаемый годовой экономический эффект. Действительный годовой экономический эффект возможно будет определить в процессе полного выполнения технологического процесса в течении года.

Разработанный герметик полностью отвечает эксплуатационным требованиям. По истечению 6 месяцев натурные обследования подвальных помещений здания подтвердили удовлетворительную работу указанного герметика.

Председатель комиссии
главный специалист Вавилов В.М.

Члены комиссии
Начальник лаб.4 Хохлов Р.А

Инженер Сидоров А.Н.

Рисунок Г.3 — Внедрение результатов исследований в ООО «Южрегионстрой»

Руководитель строительного отдела ГК АКСстрой
Индивидуальный предприниматель Акопяна В.Ф.
346720, Ростовская область, г. Аксай, ул. Донская 25;
тел.: 8-863-5057422, e-mail: vovaakop@mail.ru.
моб. тел.: 8-908-506-97-99
ИНН 610203911058 ОГРН 314618116900069

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель строительного отдела
ГК АКСстрой ИП Акопян В.Ф.
03.06.2021 г.
______________ / В. Ф. Акопян

Технический акт внедрения

результатов диссертационной работы Литвинова Степана Викторовича на тему: «Моделирование реологических процессов в полимерных и композиционных материалах при термосиловом воздействии» на соискание ученой степени доктора технических наук

Место внедрения	Ростовская обл., г. Аксай
Предмет внедрения	Пакет прикладных программ для расчета на силовые и температурные воздействия полимерных оболочек для изготовления винтовых свай
Результаты внедрения	Результаты диссертационной работы С. В. Литвинова, подтвержденные на численных моделях (на основе метода конечных элементов, метода конечных разностей), используются при расчете напряжённо-деформированного состояния полимерных оболочек, используемых в качестве опалубки при изготовлении винтовых свай. Полимерные оболочки подвергаются внешнему температурного воздействию для облегчения формирования окончательного изделия. Фактический экономический эффект, достигнутый за счёт оптимизации технологии изготовления полимерных опалубок, достиг 1 200 тыс. руб. (один миллион двести тысяч рублей) в год.

Представители заказчика:
Руководитель строительного отдела
ГК АКСстрой ИП Акопян В.Ф.
______________ / В. Ф. Акопян
03.06.2021 г.

Исполнитель: соискатель кафедры сопротивления материалов ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»
______________ / С. В. Литвинов

Рисунок Г.4 — Внедрение результатов исследований в ГК АКСстрой

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
«Научно-исследовательский центр
«НИКА»

Юр. адрес: 420061, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Николая Ершова д.49В, кв. 1006.
Почт. адрес: 420021, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Татарстан, д. 11, а/я 538,
тел. 8 (843)245-33-52 e-mail: nic_nika@list.ru
ИНН 1656093410 КПП 166001001 ОГРН1161690095258

Исх. № 107/20 от 12.02.2020
Вхд. №_____ от __________

АКТ
о внедрении результатов научной работы Литвинова Степана Викторовича на тему: «Математическое моделирование гомогенных и гетерогенных полимерных систем с учётом реологии материала»

Настоящий акт составлен о том, что результаты научной работы С. В. Литвинова, посвященной исследованиям и разработке методов прогнозирования напряжённо-деформированного состояния полимерных тел, в том числе адгезионных соединений, а также методы определения физико-механических параметров, внедрены в виде пакета прикладных программ при выполнении работ по оценке длительной прочности стыковых соединений полимерных труб. Ожидаемые экономический эффект до 2 млн. руб. в год.

Директор М.Н. Мириханов

Рисунок Г.5 — Внедрение результатов исследований в ООО «Научно-исследовательский центр «Ника»»