

На правах рукописи

Лесняк Любовь Ивановна

**ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ НА ОСТАТОЧНЫЕ
НАПРЯЖЕНИЯ И РЕОЛОГИЮ ПОЛИМЕРОВ И
КОМПОЗИТОВ НА ИХ ОСНОВЕ**

1.4.7. Высокомолекулярные соединения

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Ростов–на–Дону — 2021

Диссертация выполнена на кафедре «Сопротивление материалов» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Донской государственный технический университет»

Научный руководитель: **Языев Батыр Меретович** — доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», профессор кафедры «Сопротивление материалов»

Официальные оппоненты: **Султанов Валерий Гулямович** — доктор физико-математических наук, ФГБУН Института проблем химической физики Российской академии наук (ИПХФ РАН), заведующий Лабораторией вычислительной гидродинамики

Малышева Галина Владленовна — доктор технических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции»

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»**

Защита состоится «__»_____ 20__ года в __:__ часов на заседании диссертационного совета 24.2.308.03 при ФГБОУ ВО «Кабардино–Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова» по адресу: 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, ауд. 203 (диссертационный зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Кабардино–Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова» (<http://diser.kbsu.ru>). Сведения о защите и автореферат диссертации размещены на официальном сайте ВАК Министерства образования и науки РФ (<http://vak.ed.gov.ru>).

Отзывы на автореферат просим направлять по адресу: 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, КБГУ, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.308.03 (e-mail: i_dolbin@mail.ru).

Дата рассылки автореферата «__»_____20__ г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
24.2.308.03

Игорь Викторович
ДОЛБИН

Общая характеристика работы

В настоящее время полимерные материалы всё чаще находят применение в качестве конструкционного материала, воспринимающего значительные внешние нагрузки.

Отдельно необходимо отметить полимерные изделия, вращающиеся вокруг одной из своих осей. Примерами таких изделий могут быть валы, оболочки вращения и т. д. При наличии центробежной силы возможно перераспределение в композите твердых частиц в области внешней грани, что позволяет создавать конструкции с заранее заданными свойствами, к примеру, изменением модуля упругости изделия по радиусу.

Начиная с конца XX века зарубежными учёными (Матти Хольцберг, компания Polimotor) ведутся разработки пластиковых двигателей для автомобилей. Мощность пластикового двигателя при этом может достигать 300 л. с., а масса снижена до 69 кг (оригинальный мотор выдавал 88 л. с. при массе в 188 кг). Сильная зависимость полимера от температуры отражается на фактическое напряженно-деформированное состояние (далее – НДС) полимерных изделий (например, после отверждения полимерного связующего), в частности, для цилиндрической формы, по толщине.

Отличительным свойством полимеров является реология, развитие которой происходит не в фазе с напряжениями. Существует много различных уравнений состояния, учитывающих наличие пластических деформаций или деформаций ползучести, в том числе, используемых в многочисленных комплексах, в основе которых лежит метод конечных элементов (далее — МКЭ). Наиболее точным является обобщённое нелинейное уравнение Максвелла в форме, предложенной Гуревичем (далее — уравнение Максвелла–Гуревича), поскольку учитывает обратимые во времени деформации ползучести.

Используемые учёными программные комплексы по расчёту конструкций и их элементов (ANSYS, Abaqus, Solid Works и др.) основаны на МКЭ и не содержат какие-либо уравнения связи, подходящие для описания обратимых деформаций ползучести полимеров. Таким образом, полноценное описание работы полимерных изделий требует написание программных модулей для учёта обратимых деформаций на основе уравнения Максвелла–Гуревича.

Вопрос расчета изделий из полимерных материалов с учётом инерционных сил и изменения их физико-механических параметров от температурного воздействия остаётся весьма *актуальным*.

Степень разработанности темы. Анализ проведённого литературного обзора по исследованию НДС полимерных изделий показал, что преимущественно используются физические соотношения на основе линеаризованных уравнений, что не позволяет произвести моделирование работы полимерных конструкций в условиях, приближенных к реальным. Решение данных задач может быть получено лишь при использовании нелинейных физических соотношений. Ряд соотношений был получен феноменологически, путём некоторых обобщений линейных соотношений в трудах учёных М. И. Розовского, А. А. Ильюшина с коллегами, А. К. Малмейстером и др. В случае ещё более строго подхода требуется применение физической теории, основывающейся на исследовании молекулярной природы деформации рассматриваемых сред.

Практическим вопросам использования полимеров для создания конструкций и последующему определению НДС посвятили свои труды А. Л. Якобсен, В. С. Ромейко, А. Н. Шестопа, А. А. Персион, J. Hessel и др.

Цель работы — прогнозирование остаточных напряжений, возникающих в полимерных изделиях, вращающихся с переменной частотой в неизотермических условиях с учётом изменения физико-механических свойств материала от градиента температурного поля.

Задачи работы:

1. Разработка методики определения физико–механических параметров полимера (упругих и высокоэластических) на основе математической обработки кривых ползучести полимера.
2. Получение универсальных разрешающих уравнений для решения задачи плоского деформированного состояния полимерного цилиндра с учётом инерционных сил и косвенной неоднородности.
3. Теоретическое исследование реологии цилиндрических образцов из ряда полимеров: эпоксидного связующего ЭДТ–10, безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов и стекло–эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite) в условиях температурного и силового воздействий.
4. Апробация полученных решений путём использования нескольких независимых методов: метода конечных разностей (далее — МКР) и метода конечных элементов (далее — МКЭ) — с последующим анализом и сопоставлением результатов.
5. Оценка влияния частоты вращения полимерного цилиндра на его НДС в температурном поле.
6. Определение остаточных напряжений в полимерном цилиндре, подверженном циклическому воздействию температурного поля.

Научная новизна. В настоящей работе впервые:

1. Получена кинетика развития высокоэластических деформаций полимеров в зависимости от различных частот вращения и температуры образца.
2. Установлено, что ползучесть полимерных материалов адекватно описывается обобщённым уравнением Максвелла–Гуревича с экспоненциальным ядром релаксации, разработанным и предложенным не только для полимеров, но и материалов широкого спектра.
3. Разработана методика определения физико–механических параметров полимеров (упругих и релаксационных) на основе математической обработки экспериментальных кривых ползучести, в частности эпоксидного связующего ЭДТ–10, безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов и стекло–эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite) в условиях температурного и силового воздействий.
4. Приведены качественная и количественная оценки остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления образцов при вращении с учетом переменного во времени температурного поля.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что:

1. Проведено исследование НДС вращающихся цилиндров с учётом влияния градиента температурного поля и, как следствие, наведённой неоднородности материала.
2. Предложен комплексный подход по оптимизации математической модели определения НДС цилиндрических полимерных тел.

Практическое значение работы:

1. Совместно с группой компаний АКСстрой (далее — ГК АКСстрой) внедрены результаты исследования при расчёте и прогнозировании напряжённо-деформированного состояния полимерных оболочек, используемых в качестве опалубки при изготовлении винтовых свай. Полимерные оболочки подвергаются температурному

воздействия, приводящему к изменению их физико-механических параметров для упрощения процесса формования. Внедрение результатов теоретических изысканий позволило внести корректировки в технологию изготовления оболочек, в результате чего экономический эффект составил до 20 тыс. руб. на изделие, что суммарно составляет до 2 млн. руб. в год.

2. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа производит расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения.

Методология и методы исследования. Использованы аналитические и численные методы, такие как МКЭ и метод конечных разностей (далее — МКР) с применением современного математического пакета Octave (MatLab).

Положения, выносимые на защиту:

1. Совершенствование существующей методики определения параметров уравнения состояния на основе математического анализа экспериментальных данных испытаний образцов на ползучесть и представления физико-механических параметров материала как функции температуры.

2. Результаты определения физико-механических параметров полимеров и композитов как аппроксимирующей степенной функции температуры второго порядка.

3. Результаты определения НДС полимерного изделия цилиндрической формы в условиях: переменного температурного поля, наличия косвенной неоднородности, различных частотах вращения образца.

4. Доказано, что направление температурного градиента во вращающихся полимерных цилиндрических изделиях приводит к значительному изменению НДС, что влияет на величину остаточных напряжений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

1. Проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений.

2. Сопоставлением полученных результатов решения частных задач с рядом решений независимых авторов.

3. Анализ совпадения результатов решения задач, полученных при помощи нескольких численных методов (МКР и МКЭ).

Апробация работы. Основные положения диссертации отражены в печатных и электронных публикациях, из них в 11-ти изданиях, входящих в перечень рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК РФ и/или входящих в международные базы цитирования Scopus/Web of Science, а также в 6-ми материалах конференций (материалы XIII и XVI международных научно-практических конференций, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик; Строительство–2014, Ростовский государственный строительный университет, Ростов–на–Дону; Строительство–2017, Донской государственный технический университет, Ростов–на–Дону).

Внедрение результатов работы. Имеется 2 свидетельства о регистрации программы ЭВМ, а также акты внедрения ГК АКСстрой.

Структура и объём работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, основных выводов, библиографического списка и трёх приложений. Изложена на 119 страницах машинописного текста и содержит 60 рисунков и 4 таблицы.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 17 печатных и электронных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК РФ — 4, в журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science — 7, в других периодических изданиях — 6, получено 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Основное содержание работы

Глава 1 начинается с краткого исторического обзора развития вопросов исследования полимеров.

В разделе 1.2 приводятся сведения развития вопроса вязкоупругости от классических моделей Максвелла и Фойгта, до современного нелинейного обобщённого уравнения связи Максвелла–Гуревича.

Показано, что в многочисленных литературных источниках принято представлять полную деформацию как сумму её упругой составляющей и высокоэластической

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr}.$$

Современные расчётные комплексы (ANSYS, Solid Works и др.) используют выражения для описания ползучести как функциональную зависимость от напряжений, относительной деформации, времени и температуры

$$\varepsilon_{cr} = f_1(\sigma)f_2(\varepsilon)f_3(t)f_4(T).$$

Качественно и количественно данная функциональная зависимость весьма удовлетворительно описывает процессы только в случае, если речь идёт о необратимых деформациях; отсутствие возможности определения обратимых деформаций является её слабым звеном и, соответственно, расчётных комплексов. Решением проблемы, с одной стороны, является использование закона связи напряжений и деформаций, к примеру, нелинейного обобщённого уравнения Максвелла–Гуревича, учитывающее возможность развития обратимых деформаций, с другой, использование стандартных программных комплексов часто становится невозможным и возникает необходимость в их ручном программировании.

В разделе 1.3 рассматривается нелинейное обобщённое уравнение связи Максвелла–Гуревича

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left[\frac{3}{2}(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}) - E_{\infty}\varepsilon_{cr,ik} \right] \frac{1}{\eta^*} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где p — среднее давление.

Релаксационная вязкость может быть записана при помощи выражения:

$$\eta^* = \eta_0^* \exp \left\{ -\frac{1}{m^*} \left[\gamma^* p + \left| \frac{3}{2}(\sigma_{rr} - p) - E_{\infty}\varepsilon_{cr,rr} \right|_{\max} \right] \right\}, \quad (2)$$

где индексом r обозначены главные направления для напряжений; γ^* — объёмный коэффициент, зависящий от структуры полимера и температуры.

В основе предложенных выводов лежит теория о равенстве нулю изменения объёма изделия, связанного с развитием деформаций ползучести ($\theta_{cr} = 0$). Из данной теории следует, что коэффициент Пуассона для высокоэластической деформации составляет $\nu_{cr} = 0.5$.

Представленные выражения для определения коэффициента релаксационной вязкости (2) удобно использовать в случае изотермических процессов. В этом случае все составляющие η_0^* , γ^* и m^* , являющиеся функцией температуры, становятся константами. При этом постоянная γ^* при слагаемом $p = \theta_{el}K$ в выражении (2) настолько мала, что в исследованиях ею можно пренебречь.

Таким образом, экспоненциальная зависимость коэффициента релаксационной вязкости η^* приводит к тому, что система (1) — нелинейная, что практически исключает возможность её прямого непосредственного решения за исключением некоторых частных случаев, не рассматриваемых в настоящей работе.

В разделе 1.4 говорится о линеаризации обобщённого нелинейного уравнения связи Максвелла–Гуревича, о положительных и отрицательных моментах этого процесса.

В разделе 1.5 приводятся основные уравнения механики деформируемого твёрдого тела, теории упругости, пластичности и ползучести, которые в последующем используются для получения основных разрешающих уравнений.

Раздел 1.6 рассматривает переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке, что необходимо для решения задач поля, в случае диссертационной работы — температурного поля.

Раздел 2 посвящён изучению методики определения реологических параметров на основе обработки опытных результатов

В. Ф. Баби́ч и А. Л. Рабинович в своих исследованиях показали, что остаточные деформации полимера значительно меньше общей суммарной деформации, которая сама по себе гораздо меньше единицы ($\epsilon \ll 1$). Связан данный факт был с сетчатой структурой полимера.

Таким образом в последующих выкладках вполне правомерно полностью исключить развитие пластических деформаций, оставив для изучения только две составляющие: малую упругую и высокоэластическую.

В разделе 2.1 приводится предложенная автором методика определения физико-механических параметров нелинейного обобщённого уравнения связи Максвелла–Гуревича на основе анализа и обработки кривых ползучести полимера.

В разделе 2.2 проводятся результаты лабораторных испытаний образцов из эпоксидного полимера ЭДТ–10 с целью определения физико-механических параметров полимера.

Для этого стандартные «лопатки» были испытаны на растяжение при помощи универсальной испытательной машины WP–300 в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов» Донского государственного технического университета. Исследовались образцы при двух режимах нагружения в нормальных условиях. В первом режиме в образце создавалось постоянное растягивающее напряжение 24 МПа, а во втором — 12 МПа. Результаты опытных данных и теоретические кривые приведены на рис. 1, а также в табл. 1 и 2 табл. 2. На основе кривой 1 опытных данных (рис. 1) был проведён анализ и получены следующие физико-механические параметры эпоксидного полимера ЭДТ–10 при уровне нагружения 24 МПа:

$$\begin{aligned} E(24 \text{ МПа}) &= 2270.2 \text{ МПа}; \quad E_{\infty}(24 \text{ МПа}) = 6273.4 \text{ МПа}; \\ m^*(24 \text{ МПа}) &= 6.3183 \text{ МПа}; \quad \eta_0^*(24 \text{ МПа}) = 9351.7 \text{ МПа} \cdot \text{ч}. \end{aligned} \quad (3)$$

Табл. 1. Зависимость изменения деформаций эпоксидного полимера ЭДТ–10 с течением времени при $\sigma = 12 \text{ МПа}$

	t, ч								
	0	0.077	0.166	0.336	0.674	0.994	1.504	1.999	2.473
$\epsilon, \%$	0.511	0.553	0.553	0.565	0.565	0.565	0.570	0.575	0.577

Табл. 2. Зависимость изменения деформаций эпоксидного полимера ЭДТ–10 с течением времени при $\sigma = 24$ МПа

	t, ч									
	0	0.011	0.074	0.194	0.331	0.650	0.996	1.509	2.000	2.500
$\varepsilon, \%$	1.057	1.181	1.259	1.308	1.310	1.327	1.375	1.385	1.430	1.440

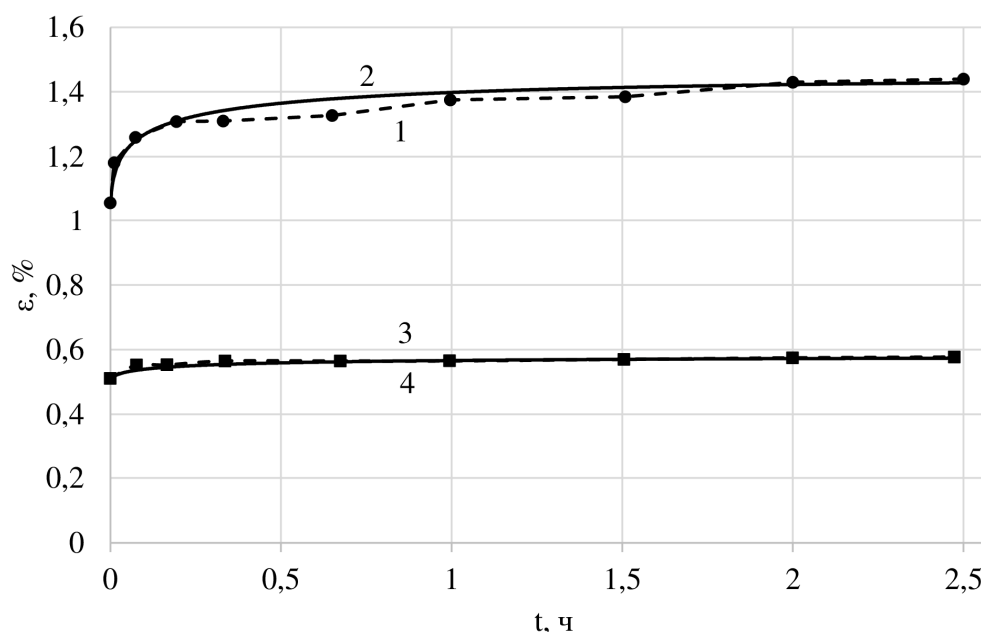


Рис. 1. Результаты сопоставления экспериментальных кривых (пунктирные линии) с теоретическими (сплошные линии): 1 — опытные данные при уровне нагружения 24 МПа; 2 — теоретическая кривая при уровне нагружения 24 МПа; 3 — опытные данные при уровне нагружения 12 МПа; 4 — теоретическая кривая при уровне нагружения 12 МПа

Для оценки достоверности полученных результатов была построена теоретическая кривая 2 на основе полученных физико-механических параметров из выражения (3).

На основе кривой 3 (рис. 1) был проведён анализ и получены следующие физико-механические параметры эпоксидного полимера ЭДТ–10 при уровне нагружения 12 МПа:

$$\begin{aligned} E(12 \text{ МПа}) &= 2346.4 \text{ МПа}; & E_{\infty}(12 \text{ МПа}) &= 18182 \text{ МПа}; \\ m^*(12 \text{ МПа}) &= 3.8190 \text{ МПа}; & \eta_0^*(12 \text{ МПа}) &= 34985 \text{ МПа} \cdot \text{ч}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для оценки достоверности полученных результатов была построена теоретическая кривая 4 на основе полученных физико-механических параметров из выражения (4).

Анализ кривых 1–4 на рис. 1 показывает весьма хорошее совпадение экспериментальных кривых с теоретическими. Особенно необходимо отметить совпадение графиков в конце рассматриваемого периода, что позволяет говорить о достоверности определения как упругих, так и высокоэластических параметров полимера.

Проведён анализ полученных значений физико-механических параметров эпоксидного полимера с некоторыми известными данными. Для этого будет использоваться выражения, использованные проф. Ф. С. Бабичевым в своих трудах:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.17 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град}); & \nu &= 0.3; \\ \rho &= 1250 \text{ кг}/\text{м}^3; & E &= -17.5T + 3525 \text{ МПа}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$c = 0.35 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{град});$$

$$E_{\infty} = -30T + 3150 \text{ МПа};$$

$$m^* = -0.011T + 4.75 \text{ МПа};$$

$$\eta_0^* = 104430 \exp(-0.0275T) \text{ МПа} \cdot \text{ч}.$$

где λ — коэффициент теплопроводности; ρ — плотность материала; c — удельная теплоёмкость материала; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; E_{∞} — модуль высокоэластичности; m^* — модуль скорости; η_0^* — коэффициент начальной релаксационной вязкости.

Значения параметров выражения (5) при температуре 20 °C:

$$E(20 \text{ °C}) = 3175 \text{ МПа}; \quad E_{\infty}(20 \text{ °C}) = 2550 \text{ МПа}; \quad (6)$$

$$m^*(20 \text{ °C}) = 4.53 \text{ МПа}; \quad \eta_0^*(20 \text{ °C}) = 60250 \text{ МПа} \cdot \text{ч}.$$

Как видно из сравнения значений физико-механических параметров, приведённых в выражениях (3) и (4) с выражением (6), наиболее близкое к выражению (6) оказывается (4), значения которых были определены при нагружении в 12 МПа. Связано это с двумя факторами:

1. В диссертационной работе проф. Ф. С. Бабица не упоминается, при каком диапазоне напряжений/деформации справедливы соотношения (5).
2. При нагружении 12 МПа требуется меньше времени для достижения заданной нагрузки, чем при 24 МПа. Соответственно, теряется меньше высокоэластических деформаций, развиваемых с момента роста нагружения.

Несмотря на это можно сказать, что предложенная методика определения физико-механических параметров по простым лабораторным испытаниям весьма пригодна.

Также предложенная методика апробирована на кривых ползучести безобжимных углеродно-эпоксидных композитных материалов в работе профессора Н. П. Лоранди рис. 2. Были получены следующие физико-механические параметры полимера, приведённые в табл. 3.

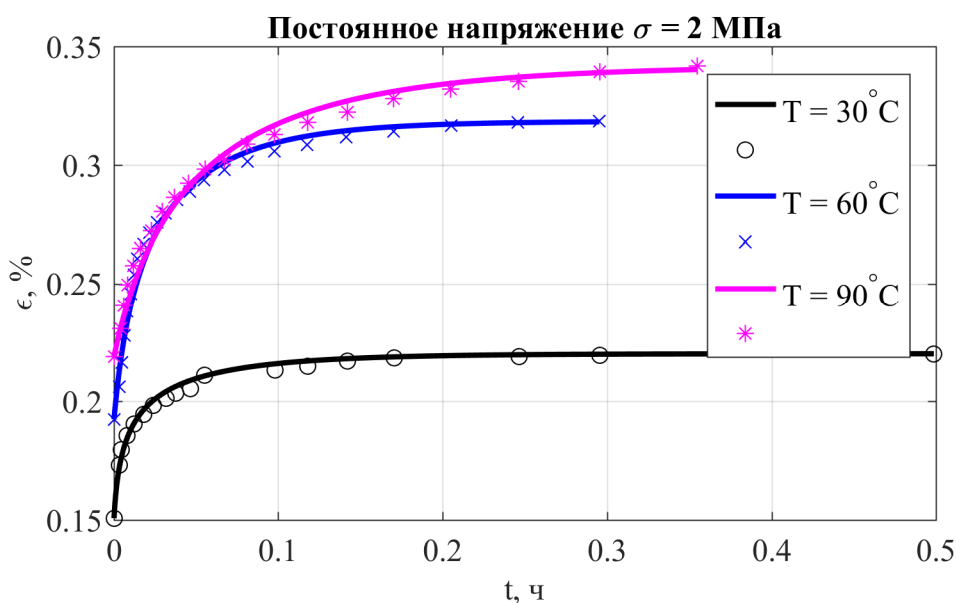


Рис. 2. Результаты сопоставления экспериментальных кривых (маркеры) с теоретическими (сплошные линии) при различных температурах в работе профессора Н. П. Лоранди

Аппроксимация табличных данных может быть проведена полиномом как функции температуры T и графически представлена на рис. 3:

$$\begin{aligned} E(T) &= 0.0898 \cdot T^2 - 17.6621 \cdot T + 1.7759 \cdot 10^3; \\ E_{\infty}(T) &= 0.7423 \cdot T^2 - 110.0167 \cdot T + 5.5159 \cdot 10^3; \\ m^*(T) &= -2.4067 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 0.0491 \cdot T + (-0.4138); \\ \eta_0^*(T) &= 0.1002 \cdot T^2 - 12.6246 \cdot T + 484.2887. \end{aligned} \quad (7)$$

Табл. 3. Определённые физико-механические параметры безобжимных углеродно-эпоксидных композитных материалов в работе Н. П. Лоранди

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{МПа}$	$E_{\infty}, \text{МПа}$	$m^*, \text{МПа}$	$\eta_0^*, \text{МПа} \cdot \text{ч}$
30	1326.9	2883.5	0.8426	195.7423
60	1039.5	1587.3	1.6658	87.5797
90	913.74	1627.3	2.0558	159.8009

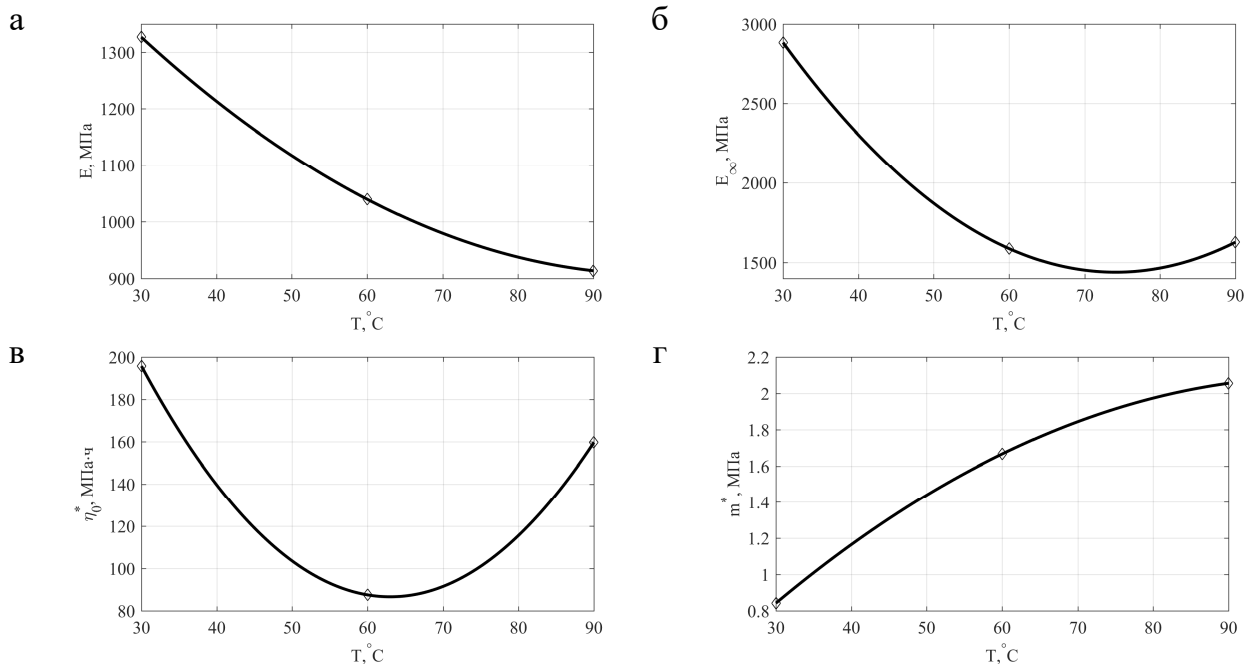


Рис. 3. Аппроксимация данных табл. 3 при помощи выражения (7)

Ещё одним полимером, у которого определены физико-механические свойства на основе кривых ползучести, явился стекло-эпоксидный полимер (Glass Epoxy Composite), кривые ползучести которого приводятся в работах профессора М. Катоузиан: $E = 302.8926 \text{ МПа}$; $E_{\infty} = 2034.6 \text{ МПа}$; $m^* = 1.1509 \text{ МПа}$; $\eta_0^* = 4620.6 \text{ МПа} \cdot \text{ч}$. Совпадение экспериментальных данных с теоретической кривой ползучести приведено на рис. 4.

В разделе 2.3 приводится краткая методика расчёта задач с учётом ползучести материала.

Всё рассмотренные в диссертации задачи являются несвязными, т. е. на первом этапе определяют температурное поле в полимерном теле, на втором — вычисляют упругие и реологические параметры полимера в каждой точке (в случае МКР) и каждом конечном элементе (в случае МКЭ) в зависимости от распределения температурного поля.

На третьем этапе определяют НДС в исследуемом изделии.

Используется пошаговый метод, при котором в начальный момент времени ($t = 0$) считают, что все деформации ползучести отсутствуют, т. е. $\varepsilon_{cr, \zeta \zeta, s} = 0$. Определяется НДС и скорость деформаций ползучести на основе уравнения Максвелла-Гуревича.

Предполагая, что временной интервал ($t = \delta t$) достаточно мал, деформацию ползучести на следующем временном интервале можно определить:

$$\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t_{i+1}) = \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t)}{\partial t} (t_{i+1} - t_i).$$

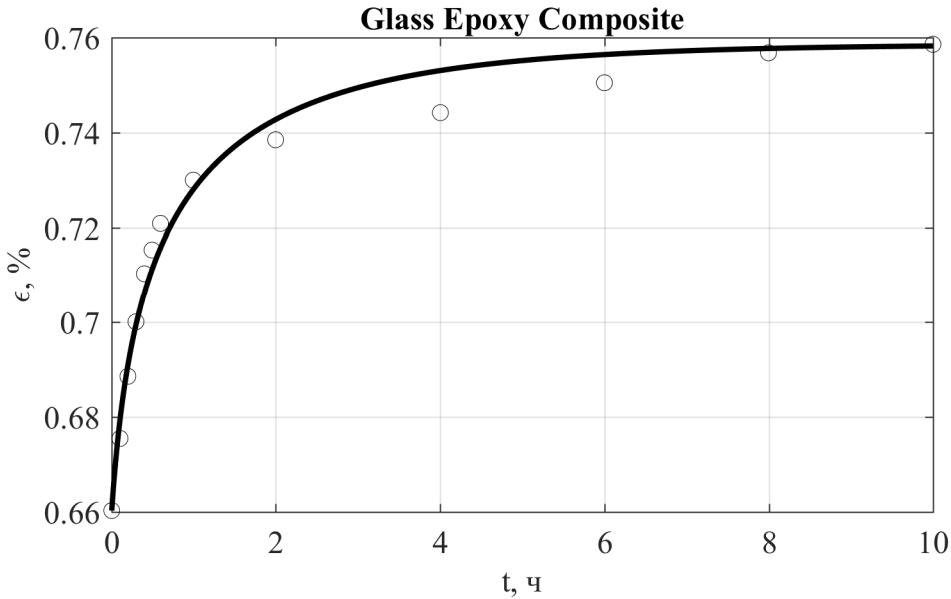


Рис. 4. Результаты сопоставления экспериментальных данных (маркеры) с теоретическими (сплошные линии) стекло-эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite)

Таким образом, используя данное уравнение можно определить на следующем временном этапе высокоэластическую деформацию, а зная её — получить НДС. Далее процесс повторяется циклично.

В главе 3 получены уравнения состояния при помощи МКЭ и МКР. Основная расчётная схема всех представленных в диссертации задач отражена на рис. 5.

Объектом исследований является цилиндр (рис. 5) с внутренним радиусом R_a и внешним R_b . Исследования проводятся в условиях плоского деформированного состояния (длина образца гораздо больше наружного радиуса $l \gg R_b$).

Граничными условиями для определения температурного поля являются температура соответственно на внутренней и внешней поверхностях изделий, соответственно T_a и T_b . При определении НДС давление на внутренней и внешней поверхностях образца, соответственно P_a и P_b .

В случае, если рассматривается полимерное изделие в упругой постановке и без учёта неоднородности материала, искомая функция может быть определена аналитическим решением (рис. 5, в). Однако в диссертационной работе исследуются полимерные цилиндры, имеющие градиент температуры по толще, а, следовательно, и выраженную косвенную неоднородность, поскольку физико-механические параметры полимеров являются значительной функцией температуры. Таким образом все решения задач будут получены при помощи численных методов МКР (рис. 5, г) и МКЭ (рис. 5, д).

В разделе 3.1 приводятся основные уравнения механики, которые будут использованы в МКЭ и МКР, для нахождения решения поставленных задач.

Показано, что в случае МКЭ, решение задач происходит при помощи одномерного симплекс-элемента (рис. 6). Подробное рассмотрение аппроксимирующей функции которого приводится в диссертации.

В случае МКР вводят на интервале $[a, b]$ сетку с равномерным шагом (рис. 7):

$$\omega_x = \{x_i = a + (i - 1) \delta x; \quad \delta x = \frac{b-a}{N}; \quad i = 1, 2, \dots, N + 1\}.$$

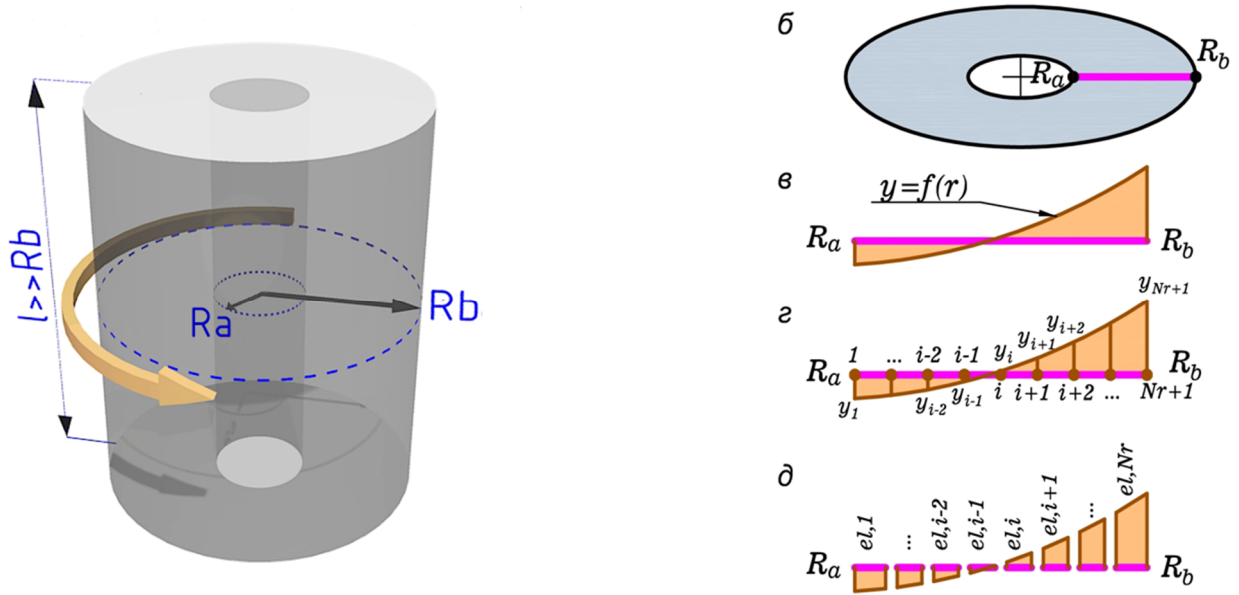


Рис. 5. Исходная схема осесимметричной задачи: а — исходный цилиндр; б — рассматриваемый участок цилиндра; в — непрерывная функция $y = f(x)$; г — аппроксимация функции конечными разностями; д — аппроксимация функции конечными элементами

Подробные выражения МКР для аппроксимации производной, как в центральной точке, так и в краевых, приводится также в диссертационной работе.

В разделе 3.2 производится определение переменного во времени температурного поля.

В осесимметричной постановке задачи температурное поле в полимерном образце определяется при помощи уравнения теплопроводности, представляющего собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 T}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (8)$$

где $\kappa = \frac{\lambda_T}{c_p \rho}$ — коэффициент температуропроводности материала; λ_T — коэффициент теплопроводности; c_p — изобарная теплоёмкость; ρ — плотность материала.

Аппроксимация выражения (8) приводит к решению системы сеточных уравнений:

$$\begin{aligned} a_i T_{\rho,i-1} + b_i T_{\rho,i} + c_i T_{\rho,i+1} &= f_{\rho,i}; \quad (i = 2, 3, \dots, N_r; \quad \rho = 1, 2, \dots, N_t + 1); \\ T_{\rho,1} &= T_{\rho,a}; \quad T_{\rho,N+1} = T_{\rho,b}; \\ a_i &= \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2rh_r}; \quad b_i = \left(-\frac{2}{h_r^2} - \frac{1}{\kappa \cdot h_t} \right); \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}; \quad f_{\rho,i} = -\frac{T_{\rho-1,i}}{\kappa \cdot h_t}. \end{aligned}$$

При использовании МКЭ уравнение теплопроводности (8) приводится к матричному представлению:

$$[k^{(e)}] \{T^{(e)}\} = \{f^{(e)}\},$$

где $[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}; \quad \{T^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} T_{\rho,i}^{(e)} \\ T_{\rho,j}^{(e)} \end{Bmatrix}; \quad \{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}.$

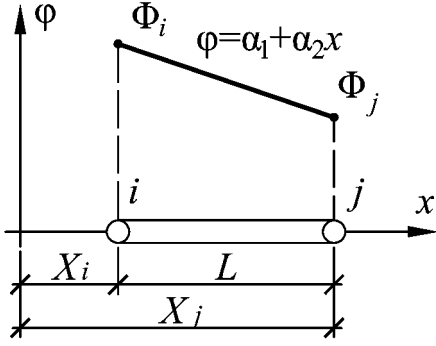


Рис. 6. Одномерный симплекс-элемент

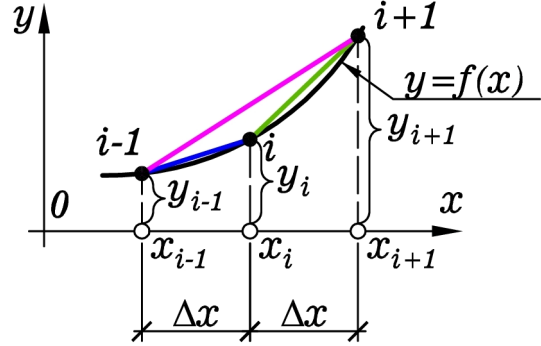


Рис. 7. Схема аппроксимации функции с помощью метода конечных разностей

При определении НДС с помощью МКР рассматривается неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} \sigma_r = \\ = \left(\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{2-\nu}{r(1-\nu)} \right) R - \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{E}{r(1-\nu)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial r} - \\ - \frac{E}{r(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon_z^*}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_\theta^*}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta^* - \varepsilon_r^*}{r} \right). \end{aligned}$$

При определении НДС с помощью МКЭ, решение сводится к системе уравнений, принимающих вид:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\},$$

где $[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]$ — глобальная матрица жёсткости; $\{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$ — глобальный вектор нагрузки. Элементы этих матрицы и вектора определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= [B]^T [D] [B] r (R_j - R_i); \\ \{f^{(e)}\} &= [B]^T [D] \{\varepsilon_T + \varepsilon^*\} r (R_j - R_i) + \rho \omega^2 r^2 (R_j - R_i) [N]^T, \end{aligned}$$

где ρ — плотность материала; ω — угловая скорость вращения полимерного цилиндра.

В главе 4 рассматривается решение задач по моделированию НДС вращающегося полимерного изделия. Зависимость физико-механических параметров полимера принимается согласно выражению (5). Исследуемые цилиндры имеют следующие параметры: $r_a = 8$ мм; $r_b = 28$ мм; $P_a = 0$ МПа; $P_b = 0$ МПа; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 100 шт.

Исследование НДС цилиндрического изделия из ЭДТ-10 при изменении частоты его вращения от 0 до 1000 с⁻¹. При этом выбрано четыре режима, при которых распределение температуры (20, 40, 60 и 80 °С) в цилиндре одинаково во всех точках.

Анализ представленных результатов расчёта показывает, что уровень напряжений (радиальных, окружных и осевых) меняется весьма незначительно и практически не зависит от температуры образца и, следовательно, от изменения модуля упругости. Существенное влияние оказывается только на уровень перемещений u , который вследствие уменьшения модуля упругости материала (при изменении температуры от 20 до 80 °С) увеличивается практически в 1.5 раза.

Таким образом, следующим этапом представляет интерес исследования переменного по радиусу температурного поля $T(r)$.

Исследование НДС изделия из ЭДТ-10 при наличии градиента температуры по его толщине (в радиальном направлении). Рассматривалось два варианта изменения температурного поля: I — температура меняется от 20 °С на внутренней поверхности цилиндра до 80 °С на внешней; II — температура меняется наоборот, от 80 °С на внутренней поверхности цилиндра до 20 °С на внешней.

Первым этапом проводилась оценка совпадения результатов, полученных двумя методами МКР и МКЭ. Для оценки влияния на НДС изменения модуля упругости, решение МКР было получено при постоянном по толщине модуле упругости, определённом при температуре на внутренней поверхности, а при МКЭ — на внешней поверхности. При этом модуль упругости по толщине цилиндра был величиной постоянной.

Анализ полученных результатов показывает, что НДС не зависит от величины модуля упругости, если он является постоянным по всей толщине цилиндра.

Исследование влияния изменения модуля упругости ЭДТ-10 под действием температурного поля на НДС изделия. Изменение температурного поля принято как и в предыдущем случае: I — температура меняется от 20 °С на внутренней поверхности цилиндра до 80 °С на внешней; II — температура меняется наоборот, от 80 °С на внутренней поверхности цилиндра до 20 °С на внешней.

Анализ полученных результатов показывает, что учёт неоднородности, вызванной изменением модуля упругости материала цилиндра от температуры, приводит к изменению НДС, по окружным, максимальным, напряжениям.

В случае I постоянный модуль упругости определялся при температуре 80 °С (решение МКР) и был постоянным по толщине цилиндра. При этом, в случае переменного модуля упругости, на внутренней поверхности он был значительно выше, чем на внешней. Более высокие значения модуля упругости на внутренней поверхности и определили больший уровень напряжений.

Разность напряжений при этом не превышает 10–15 %.

Исследование НДС изделия из ЭДТ-10 с учётом изменения температуры, неоднородности материала, вызванной неоднородностью распределения физико-механических параметров, определяемых температурных полем, и учётом деформаций ползучести. Исследуется главная особенность полимерных изделий — выраженные деформации ползучести. Рассматриваются следующие постановки: I — температура одинакова по всей толщине цилиндра и составляет 20 °С; II — температура одинакова по всей толщине цилиндра и составляет 60 °С; III — температура меняется от 20 °С на внутренней поверхности цилиндра до 60 °С на внешней поверхности цилиндра; IV — температура меняется от 60 °С на внутренней поверхности цилиндра до 20 °С на внешней поверхности цилиндра. Количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 2 500 шт. Расчёт продолжался до периода времени, равного 50 ч, соответственно один интервал времени соответствует 1 минуте 12 секундам. При решении случаев I, III и IV частота вращения на всем этапе вычислений была постоянная и составляла $1\,000\text{ с}^{-1}$.

По результатам анализа полученного решения можно сделать вывод, что НДС полимерного вращающегося цилиндра меняется весьма значительно при учёте высокоэластических деформаций. При этом наибольший рост напряжений происходит только по осевому направлению (до 60 %) по сравнению с упругой работой материала. Если же говорить про возможные перемещения в образцах, то они могут быть выше более чем в 2.5 раза по сравнению с упругой статей, что особенно важно учитывать при

таких значительных оборотах, даже не смотря на их общую малость (порядок цифр 10^{-4} м).

Моделирование НДС изделия из ЭДТ-10 в стадии его обработки или изготовления. В настоящей главе моделируется НДС полого полимерного цилиндра, имеющего следующие геометрические параметры: $r_a = 8$ мм; $r_b = 28$ мм; $P_a = 0$ МПа; $P_b = 0$ МПа; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; временной интервал 50 часов при количестве интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 3 000 шт., таким образом каждый шаг времени соответствует 1 мин.

Было рассмотрено два случая (далее — I и II): в обоих случаях с самого начала цилиндр вращался с частотой $1\,000\text{ с}^{-1}$ до точки времени, соответствующей точке времени 10 ч; далее считалось, что цилиндр остановился и его частота равна 0. В случае I температура цилиндра принималась равной $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ на всём протяжении расчёта. В случае II от начала и до точки времени, соответствующей 10 ч, температура на внутренней поверхности была равна $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, а на внешней — $60\text{ }^{\circ}\text{C}$. С момента времени 10 ч температура на внешней поверхности снижалась с постоянной скоростью до $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ в течении 2 ч и дальше не менялась (рис. 8, а). Зависимости физико-механических параметров полимера от температуры описываются выражениями (5) и представлены на рис. 8. Результаты расчётов представлены на рис. 9.

Анализ случая I (без градиента температуры) показывает, что после снятия нагрузки в виде вращения цилиндра к моменту времени 50 ч напряжения и деформации приближаются к нулю. Напряжения в случае II имеют остаточные величины.

При этом на внутренней поверхности цилиндра преобладает сжатие, а на внешней — растяжение. Максимальные по модулю напряжения достигают практически 10 % от допускаемых напряжений для эпоксидного полимера термического отверждения, составляющего порядка 50 МПа, что является весьма существенной величиной, которой нельзя пренебрегать при учёте дальнейшей эксплуатации изделия.

Остаточные напряжения задачи №2 на последнем этапе времени, соответствующем 50 ч составили: максимальное значение радиального напряжения составляет $\sigma_{r,\max} = -1.0672$ МПа; окружное напряжение на внутренней точке составляет $\sigma_{\theta}(r = 0.008\text{ м}) = -5.08841$ МПа; окружное напряжение на внешней точке составляет $\sigma_{\theta}(r = 0.028\text{ м}) = 2.34305$ МПа; осевое напряжение на внутренней точке составляет $\sigma_z(r = 0.008\text{ м}) = -2.03025$ МПа; осевое напряжение на внешней точке составляет $\sigma_z(r = 0.028\text{ м}) = 5.50166$ МПа; перемещение внутренней точки составляет $u(r = 0.008\text{ м}) = -2.22566 \cdot 10^{-5}$ м; перемещение внешней точки составляет $u(r = 0.028\text{ м}) = -8.63852 \cdot 10^{-5}$ м. Таким образом наблюдается общая усадка всего материала цилиндра.

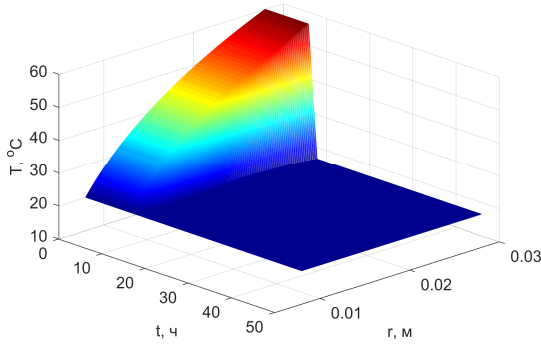
Отличительной чертой высокоэластических процессов является наличие явления неустановившейся ползучести, проявляемой всплесками напряжений σ_r , σ_{θ} и σ_z сразу после приложения или снятия нагрузки, что отчётливо видно на соответствующих графиках.

Проведём анализ составляющих деформаций полимерного образца во времени.

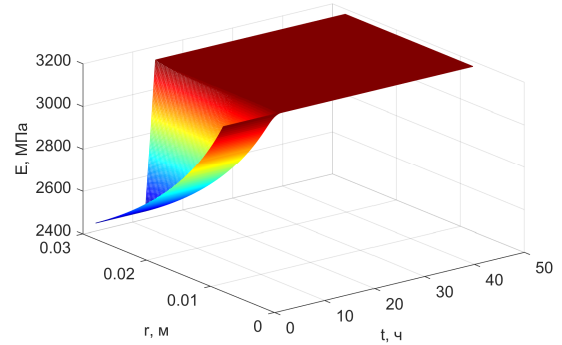
Во-первых, необходимо ответить, что упругая деформация ϵ_{el} , как в случае I, так и в случае II, на порядок ниже высокоэластической составляющей ϵ_{cr} .

Во-вторых, упругая составляющая достаточно быстро угасает после снятия динамической нагрузки. В случае II имеются некоторые остаточные составляющие упругой деформации, возникающей в следствии усадки материала изделия.

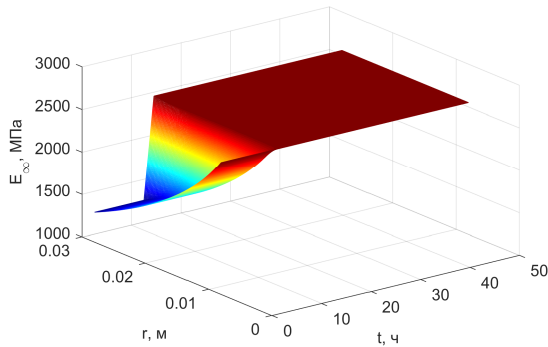
а



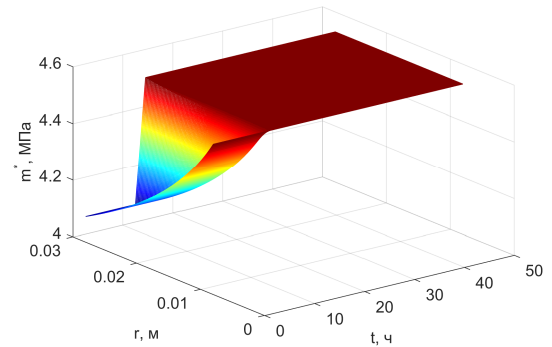
б



в



г



д

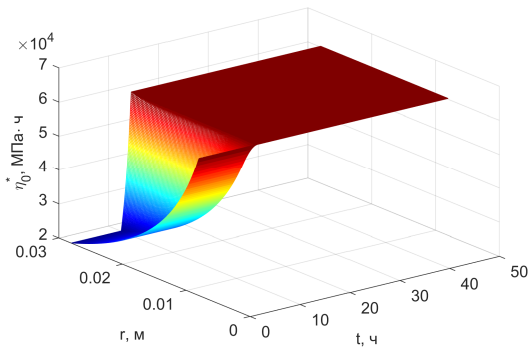


Рис. 8. Задача 5. Распределение физико-механических параметров полимера в зависимости от температуры (задача №2): а — Распределение температуры в теле; б — модуль упругости; в — модуль высокоэластичности; г — модуль скорости; д — коэффициент начальной релаксационной вязкости

В-третьих, несмотря на то, что уровень напряжений случаев I и II схож, значения перемещений и деформаций случая II в 1.5–2 раза выше, чем в случае I.

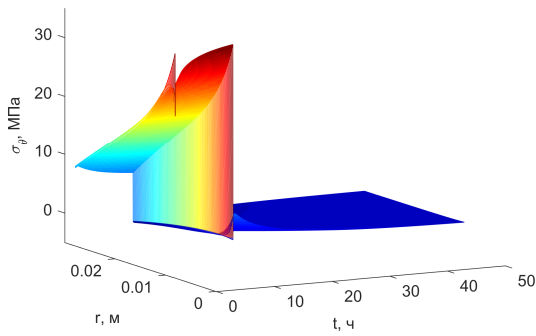
В разделе 4.2 в качестве альтернативного материала ЭДТ–10 был рассмотрен цилиндрический образец из безобжимного углеродно–эпоксидного композитного материала. Физико–механические параметры материала были определены ранее в работе. По аналогии с предыдущими исследованиями рассматриваются две задачи в различных постановках.

Исследование НДС изделия из безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов с учётом изменения температуры, неоднородности материала, вызванной неоднородностью распределения физико-механических параметров, определяемых температурных полем, и учётом деформаций. Постановка задачи в настоящем разделе такая же, как и ранее при исследовании ЭДТ–10. Частота вращения рассматривается 160 оборотов в секунду.

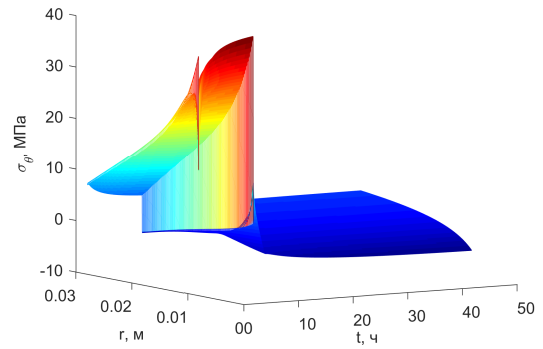
Результаты решений представлены в диссертационной работе. Анализ полученных данных показывает, что в случае безобжимного углеродно–эпоксидного композитного материала, деформации ползучести развиваются достаточно быстро и не являются весьма выраженными, в отличие от аналогичных результатов в случае для ЭДТ–10. При этом решения задач I–IV различаются весьма незначительно.

Задача 1Задача 2

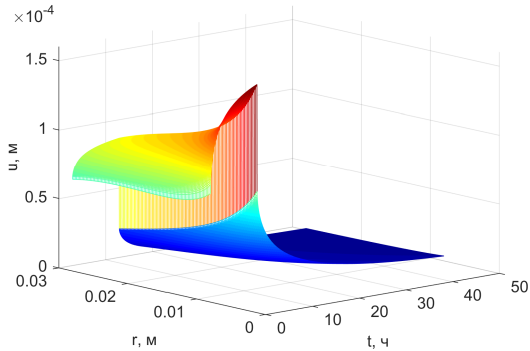
а



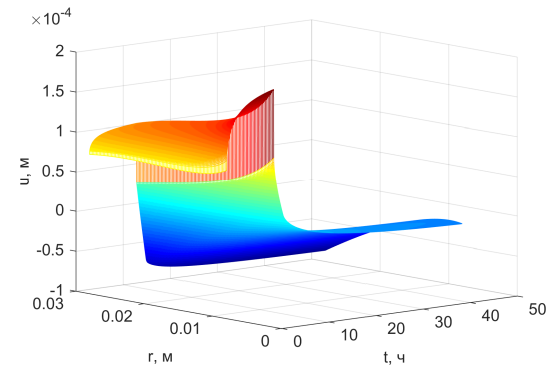
б



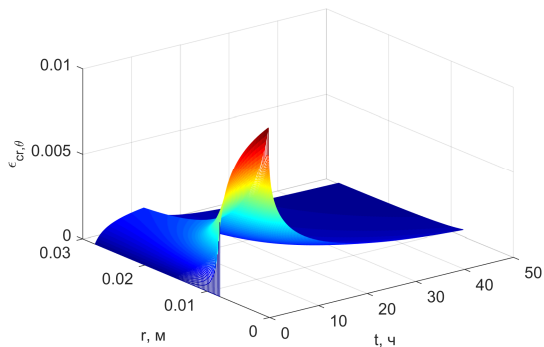
в



г



д



е

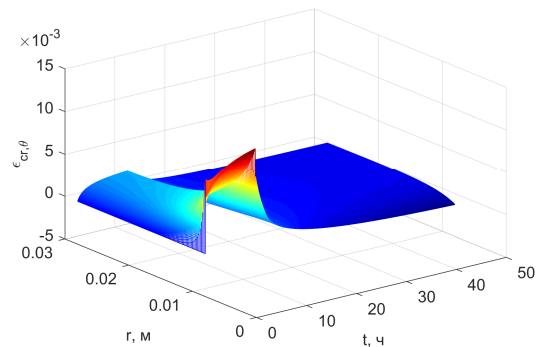


Рис. 9. Задача 5. Распределение: а, б — окружных напряжений σ_θ ; д, е — перемещений u ; д, е — окружных деформаций ползучести $\varepsilon_{cr,\theta}$

Моделирование НДС изделия из безобжимных углеродно-эпоксидных композитных материалов в стадии изготовления. В настоящем разделе используется такая же постановка задач, что и при моделирование НДС изделия из ЭДТ-10 в стадии его обработки или изготовления. Частота вращения ограничена величиной 160 оборотов в секунду.

Анализ случая I (без градиента температуры) показывает, что после снятия нагрузки в виде вращения цилиндра к моменту времени 50 ч напряжения и деформации приближаются к нулю. При этом напряжения в случае II имеют остаточные величины.

В случае безобжимного углеродно-эпоксидного композитного материала учёт температурного влияния приводит к увеличению уровня напряжений до 8 раз.

Негативной стороной безобжимного углеродно-эпоксидного композитного материала является то, что в связи со слабо выраженной деформацией ползучести возникает весьма незначительная релаксация напряжений. Соответственно, полученные благодаря температурному воздействию напряжения сохраняются практически без снижения их уровня, что может крайне негативно сказаться на дальнейших эксплуатационных качествах изделия.

Необходимо отметить, что в случае I, в теле возникают только растягивающие напряжения, в случае II — сжимающие напряжения, превышающие растягивающие более чем в 1.5 раза.

В разделе 4.3 проводится исследование вращения цилиндра из ЭДТ-10 при малых частотах и большом градиенте температур. С практической точки зрения представляется интерес исследования остаточных напряжений в изделиях из ЭДТ-10 при малых оборотах вращения и больших температурах таких, какие возникают при обработке изделий на токарных станках.

Изделие имеет внутренний радиус $R_a = 85$ мм, внешний радиус $R_b = 100$ мм. Первоначальная температура всего изделия составляет 20°C . Цилиндр начинает вращать с частотой 50 оборотов в секунду. За счёт обработки на внешней поверхности цилиндра начинает повышаться температура до 90°C в течение 0.12 ч. Далее, до периода времени 0.6 ч температура на внешней поверхности не меняется; на внутренней остаётся постоянная температура 20°C . Далее с момента времени 0.6 ч до 0.72 ч происходит остывание внешней поверхности цилиндра до температуры 20°C . С момента времени 0.72 ч изделие останавливается, то есть частота вращения становится 0. В диссертационной работе претставлено распределение температуры. При изменении температурного поля, происходит образование косвенной, наведённой, неоднородности в полимерном образце. Графики изменения напряжений представлены на рис. 10.

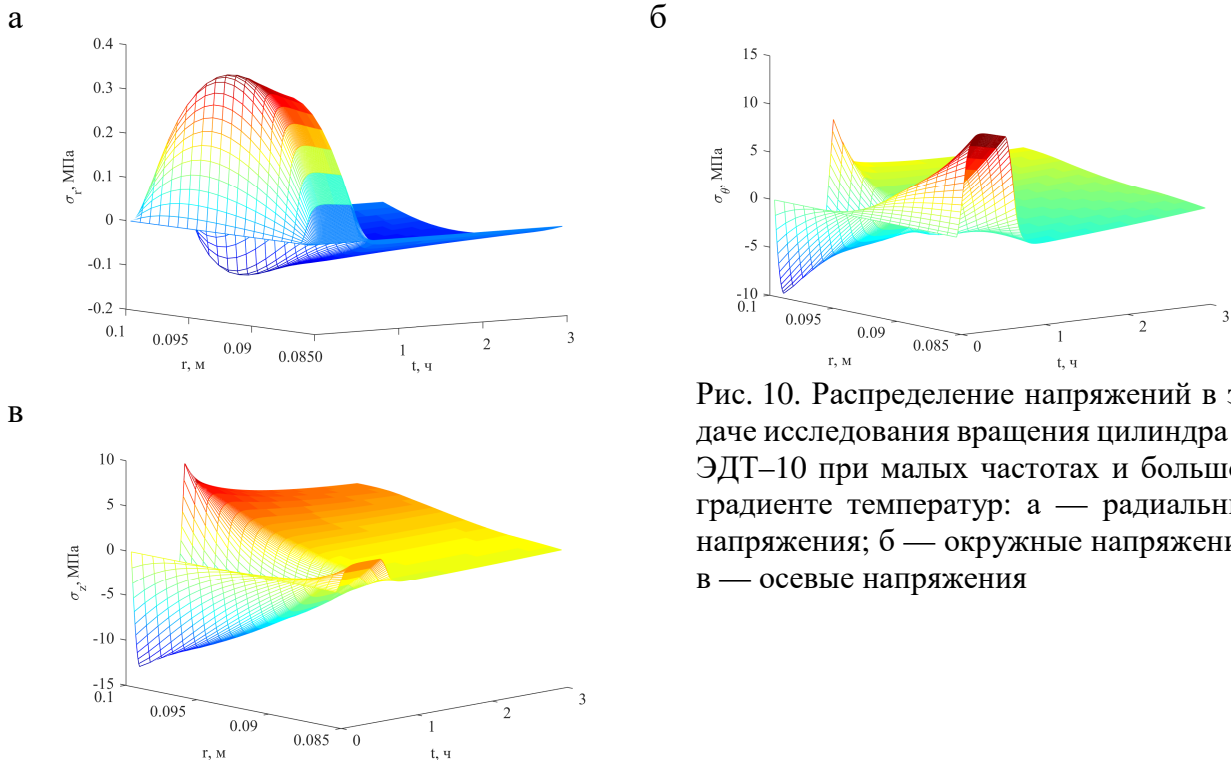


Рис. 10. Распределение напряжений в задаче исследования вращения цилиндра из ЭДТ-10 при малых частотах и большом градиенте температур: а — радиальные напряжения; б — окружные напряжения; в — осевые напряжения

Анализ графиков показывает, что максимальные напряжения в процессе нагрева и остывания превышают уровень 10 МПа, как в сжатой зоне, так и в растянутой. В конце расчётного периода остаточные напряжения имеют величину: радиального напряжения $\sigma_r = -0.042606$ МПа; окружные напряжения на внутренней поверхности составили $\sigma_{\theta, r=R_a} = -0.103455$ МПа; окружные напряжения на внешней поверхности составили $\sigma_{\theta, r=R_b} = 2.41439$ МПа; осевые напряжения на внутренней поверхности составили $\sigma_{z, r=R_a} = 0.211768$ МПа; осевые напряжения на внешней поверхности составили $\sigma_{z, r=R_b} = 3.03783$ МПа.

Остаточные перемещения в цилиндрическом образце весьма малы и составляют не более $2.61234 \cdot 10^{-5}$ м по абсолютной величине.

Основные напряжения возникают в процессе изменения температурного поля и составляют весьма существенные величины, что может привести к разрушению изделия в процессе изготовления изделия. Особенно необходимо учесть данное явление, если изделие состоит из нескольких материалов, физико–механические и тепло–физические свойства которых отличаются весьма значительно.

Заключение

В результате проведённых исследований предложена математическая модель определения НДС вращающихся полимерных изделий цилиндрической формы на основании нелинейного обобщённого уравнения Максвелла–Гуревича и с учётом неоднородности материала, вызванной температурным полем.

На основании анализа результатов можно сделать следующие выводы:

1. Впервые на основе обработки экспериментальных данных получены физико-механические показатели некоторых полимеров как аппроксимирующая степенная функция температуры второго порядка.
2. Получены результаты согласно предложенной методологии исследования оценки НДС рассматриваемых полимеров: эпоксидного связующего ЭДТ–10, безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов и стекло–эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite) в условиях термосилового воздействия.
3. Проведено практически важное решение задачи определения остаточных напряжений в полимерном цилиндрическом изделии при изготовлении путем вращения и остывания. Показано развитие существенных остаточных напряжений и деформаций.
4. Усовершенствована методика расчёта основных прочностных показателей вращающихся полимерных изделий в термовязкоупругой постановке.
5. Разработана и реализована в виде пакета прикладных программ для программного комплекса MatLab методика определения остаточных напряжений в полимерных цилиндрических образцах и изделиях в процессе их изготовления в условиях термовязкоупругости.
6. На основании результатов диссертационного исследования были разработаны и внедрены в ГК АКСтрой пакеты прикладных программ для расчета и оценки остаточных напряжений в полимерных оболочках, подвергающихся переменному температурному полю с целью снижения их физико-механических параметров в процессе формирования и изготовления свай. Учёт теоретических изысканий позволил внести корректировки в технологию изготовления оболочек, в результате чего экономический эффект составил до 20 тыс. руб. на изделие, что суммарно составляет до 2 млн. руб. в год.

Основное содержание работы изложено в следующих публикациях:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, или входящих в международные реферативные базы Scopus/Web of Science:

1. Litvinov, S. V. Flat Axisymmetrical Problem of Thermal Creepage for Thick- Walled Cylinder Made Of Recyclable PVC / S. V. Litvinov, **L. I. Trush**, S. B. Yazyev // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — С. 1686–1693. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816314734>.

2. Литвинов, С. В. Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке / С. В. Литвинов, **Л. И. Труш**, А. Е. Дудник // Инженер. вестник Дона. — 2016. — № 2. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560>.
3. Trush, L. Optimization of the Solution of a Plane Stress Problem of a Polymeric Cylindrical Object in Thermoviscoelastic Statement / **L. Trush**, S. Litvinov, N. Zakieva, S. Bayramukov // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent Systems and Computing. — Т. 692. — С. 885–893. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_95.
4. Litvinov, S. V. Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences / S. V. Litvinov, A. N. Beskopylny, **L. I. Trush**, S. B. Yazyev // MATEC Web of Conferences. — 2017. — Т. 106 (2017). — С. 04013. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/20/matec-conf_spbw2017_04013/matecconf_spbw2017_04013.html.
5. Litvinov, S. V. Some features in the definition of the temperature field in axisymmetric problems / S. V. Litvinov, **L. I. Trush**, A. A. Avakov // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). — 2017. — С. 1–5.
6. Litvinov, S. V. Determination of the Stress-Strain State of a Rotating Polymer Body / S. V. Litvinov, **L. I. Trush**, S. B. Yazyev // Materials Science Forum. — 2018. — Т. 935. — С. 121–126. — URL: <https://www.scientific.net/MSF.935.121>. — DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.935.121>.
7. Литвинов, С. В. Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации / С. В. Литвинов, **Л. И. Труш**, А. А. Савченко, С. Б. Языев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 5. — С. 78–83. — URL: <http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1261/783>.
8. Литвинов, С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела из модифицированного ПЭВП / С. В. Литвинов, **Л. И. Труш**, С. Б. Языев, И. М. Зотов // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 7. — С. 118–122. — URL: <http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1488>.
9. Lesnyak, L. I. Modeling of residual stresses in a polymer cylinder arising from rotation and cooling of the starting material / **L. I. Lesnyak**, B. M. Yazyev, A. A. Avakov, L. L. Dubovitskaya // Key Engineering Materials. — 2020. — Т. 869. — С. 202–208. — URL: <https://www.scientific.net/KEM.869.202.pdf>. — DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.869.202>.
10. Лесняк, Л. И. Изменение напряженно-деформированного состояния полимерного цилиндра при переменных физических и температурных нагрузках / Л. И. Лесняк, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, Б. М. Языев // Известия Кабардино-Балкарского гос. университета. — 2020. — № 4. — С. 37–42.
11. Lesnyak, L. I. Analysis of Residual Stresses in a Polymer Cylinder when it is Stopped and then Cooled in a Nonlinear and Linearized Problem Settings / **L. I. Lesnyak**, V. I. Andreev, S. B. Yazyev, A. A. Avakov, I. G. Doronkina // Key Engineering Materials. — 2021. — Т. 899. — С. 486–492. — URL: <https://www.scientific.net/KEM.899.486>. — DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.899.486>.

Статьи в других изданиях:

1. Литвинов, С. В. Равнопрочные и равнонапряжённые конструкции: преимущества и недостатки / С. В. Литвинов, А. С. Чепурненко, **Л. И. Труш** // Строительство–2014: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. — С. 189–190.
2. Литвинов, С. В. Прогнозирование прочности адгезионного соединения в течение длительного периода времени / С. В. Литвинов, **Л. И. Труш**, Е. Н. Пищере́нко, А. А. Аваков // материалы XIII междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2017. — С. 162–167.
3. Литвинов, С. В. Напряжённо-деформированное состояние тел вращения в вязкоупругой постановке / С. В. Литвинов, **Л. И. Труш**, А. А. Аваков // Строительство и архитектура — 2017: материалы науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: ДГТУ, 2017. — С. 186–194.
4. Труш, Л. И. Оптимизация решения плоской задачи полимерного цилиндрического тела в термовязкоупругой постановке / **Л. И. Труш**, С. В. Литвинов, Е. Н. Пищере́нко, А. Е. Дудник // материалы XIII междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2017. — С. 246–253.
5. Лесняк, Л. И. Моделирование остаточных напряжений в полимерном цилиндре, возникающих от вращения и остывания исходного материала / **Л. И. Лесняк**, Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения: Материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф. / КБГУ. — Нальчик, 2020. — С. 245–250.
6. Лесняк, Л. И. Сравнение напряжённо-деформированного состояния вращающегося полимерного тела в нелинейной и линеаризованной постановках / **Л. И. Лесняк**, Б. М. Языев, С. В. Литвинов // Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения. Материалы XVII Междунар. науч.-практ. конф. / КБГУ. — Нальчик, 2021. — С. 135.

Авторские свидетельства на программу для ЭВМ:

1. Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616951 / Литвинов С. В., Дудник А. Е., Аваков А. А., **Труш Л. И.**; Дон. гос. техн. ун-т. — №2018614101; заявл. 24.04.2018; зарег. 09.06.2018.
2. Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2020660684 / Хаширова С. Ю., **Лесняк Л. И.**, Литвинов С. В., Языев С. Б., Молоканов Г. О., Чепурненко А. С.; Кабардино-Балкарский гос. ун-т. — № 2020617798; заявл. 27.07.2020; зарег. 09.09.2020.