

**На правах рукописи**

**Литвинов Степан Викторович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОМОГЕННЫХ И  
ГЕТЕРОГЕННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ С УЧЁТОМ  
РЕОЛОГИИ МАТЕРИАЛА**

**02.00.06 — Высокмолекулярные соединения**

**Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук**

**Ростов-на-Дону — 2019**

Диссертация выполнена на кафедре «Соппротивление материалов» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Донской государственной технической университет»

Научный консультант: **Языев Батыр Меретович** — доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Донской государственной технической университет», профессор кафедры «Соппротивление материалов»

Официальные оппоненты: **Мацеевич Татьяна Анатольевна** — доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», заведующий кафедрой прикладной математики

**Жуков Михаил Юрьевич** — доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики

**Цобкалло Екатерина Сергеевна** — доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна», заведующий кафедрой инженерного материаловедения и метрологии

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение науки Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук

Защита состоится 18 октября 2019 года в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.076.09 при ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» по адресу: 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, ауд. 203 (диссертационный зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова» (<http://diser.kbsu.ru>). Сведения о защите и автореферат диссертации размещены на официальном сайте ВАК Министерства образования и науки РФ (<http://vak.ed.gov.ru>).

Отзывы на автореферат просим направлять по адресу: 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, КБГУ, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.076.09 (e-mail: [i\\_dolbin@mail.ru](mailto:i_dolbin@mail.ru))

Дата рассылки автореферата «\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета

Игорь Викторович Долбин

## Общая характеристика работы

В настоящее время всё чаще конструкции и их элементы изготавливают из полимерных материалов. При этом одним из основных моментов является не только вопрос разработки полимерных материалов, но и создания математических моделей подобных конструкций, максимально приближающихся к реальному поведению материала в жизни для определения их напряжённо-деформированного состояния с целью прогнозирования длительной прочности подобных изделий.

В отличие от подавляющего большинства «классических» материалов, используемых во многих отраслях (строительство, машиностроение, авиастроение и т. д.), полимерные материалы обладают особенностями, которыми никоим образом нельзя пренебрегать.

Во-первых, это — сильная зависимость физико-механических параметров (упругих и реологических) полимера от многочисленных факторов, основным из которых является температура. Так, физико-механические параметры некоторых полимеров при изменении температуры в пределах нескольких десятков градусов меняют свои значения в несколько раз. Особенно это становится заметно, если температурные режимы находятся в относительной близости к температуре стеклования полимера. Таким образом, необходимо максимально точно определять физико-механические параметры полимера. Ситуация осложняется тем, что существующие и используемые до настоящего времени методики весьма сложны и громоздки.

Во-вторых, это — выраженная реология полимеров. Это свойство полимера может играть как положительную роль — релаксацию напряжений в полимерной конструкции за счёт высокоэластических деформаций, так и отрицательную — рост напряжений за счёт этих же деформаций, которые могут в разы превышать упругие деформации.

Для математического моделирования в программных комплексах работы конструкций из полимерных материалов необходимо использовать уравнения связи напряжения–деформации, максимально точно описывающие реологические процессы, протекающие в полимере. Подавляющее большинство современных вычислительных программных комплексов используют уравнения связи слишком простого вида: линейные, степенные, логарифмические, соответствующие реальному поведению полимера лишь в очень узком диапазоне. Для полноценного описания этих процессов необходимо прибегать к нелинейным уравнениям.

Таким образом, исследование новых и оптимизация существующих методов расчёта конструкций из полимерных материалов на прочность, деформативность, долговечность, с учётом множества факторов, влияющих на упругие и реологические параметры полимеров (температура, наличие различных добавок, воздействие ионизирующего излучения, приводящего к деструкции или сшиванию молекул полимера и т. д.) является *актуальным*.

Необходимо отметить, что приведенные в диссертации методы математической оптимизации моделирования конструкций из полимеров в полной степени относятся как к гомогенным материалам, так и к гетерогенным, неоднородность которых вызвана физическими полями (к примеру, температурой); в меньшей — к гетерогенным в случае рассмотрения армированных полимеров в виду их структурной неоднородности.

### **Степень разработанности темы.**

Прежде чем говорить о проработанности темы исследования в целом, необходимо выделить основные этапы, которые необходимо пройти на пути от получения новых полимеров до проведения расчётов напряжённо-деформированного состояния конструкций и их элементов:

1. Химия. Вопрос получения новых полимерных материалов и определение основных их характеристик. Полимерные материалы исследуются на микроуровне с уделением особого внимания их молекулярной структуре.

2. Физическая химия. Получение основных уравнений связи напряжения-деформации, описывающих основные явления, наблюдаемые в целом в вопросах работы полимеров. Материалы рассматриваются на макроуровне. Проведение исследований на микроуровне используется для объяснения адекватности новых уравнений и используемых гипотез.

3. Механика. Вопросы получения основных разрешающих уравнений и получение их решений аналитическими, численно-аналитическими или численными методами. Использование основных уравнений физической химии для математического моделирования работы полимерных материалов. Написание программных комплексов.

4. Математическое моделирование и конструирование. Применение готовых программных комплексов для моделирования работы конструкций с интерпретацией полученных результатов в соответствии с действующими для данной отрасли нормативными документами.

При этом имеется пересечение в понятиях, определениях и методах, применяемых на каждом этапе, которые могут носить абсолютно разный смысл.

В настоящей диссертационной работе уделяется внимание вопросу согласования между собой первых трёх пунктов. Как правило, исследования приводятся по каждому из этих пунктов обособленно, не затрагивая другие, «соседние», области.

Проведённый литературный обзор показал, что вопросы исследования жёстких сетчатых полимеров изложены в небольшом количестве работ. Подобная ситуация обстоит и с работами по вопросам исследования и развития методов расчёта конструкций и их элементов из гомогенных и армированных полимеров в различных диапазонах температур и напряжений. Практически полностью отсутствуют как среди отечественных учёных, так и среди зарубежных, работы по исследованию механики армированных полимеров, учитывающие зависимость релаксационных свойств от температуры; приведение полных систем уравнений механики подобных армированных полимеров, а также алгоритм их использования для решения прочностных задач.

В имеющихся трудах представлены, как правило, теоретические исследования с применением линеаризованных физических соотношений, которые не всегда позволяют полноценно описать работу полимера в заданных условиях эксплуатации. Для описания работы полимерных материалов, максимально соответствующей их реальной работе, необходимо использовать нелинейные физические соотношения, полученные феноменологически, т. е. было произведено некоторое обобщение линейных соотношений, в работах М. И. Розовского, А. А. Ильюшина с коллегами, А. К. Малмейстера и др. Однако при более общем и строгом методе исследований необходимо использовать физическую теорию, в основе которой лежат изыскания в области молекулярной природы деформации рассматриваемых сред.

Если говорить о вопросах практического использования полимеров, к примеру, в качестве материала для изготовления труб, то проблемы исследования их напряжённо-деформированного состояния изложены в работах А. Л. Яковсена, В. С. Ромейко, А. Н. Шестопада, А. А. Персиона, J. Hessel и др. Проблемы исследования и расчёта конструкций и их элементов из полимерных материалов связаны с особенностями поведения материала при деформировании и, как говорилось ранее, существенной функцией их физико-механических параметров от температуры. Так, термопласты могут претерпевать упругие деформации до значений 0.1–0.2 при температурах в диапазоне от 0 до +95 °С. Этим явлением занимались такие учёные, как Э. Л. Калинин, Е. И. Каменев, Г. Д. Мясников, М. Б. Саковцев, М. П. Платонов и др. При этом исследований влияния нелинейных свойств полимерных материалов на напряжённо-деформированное состояние конструкций в осесимметричной постановке практически не проводились.

На основании исследований элементов конструкций из полимерных материалов (J. M. Hill, C. A. Martins, A. M. Milan, C. P. Pesce, R. Ramos, A. A. Аскадский, Г. М. Бартенев, Д. Ф. Коган, М. Н. Попов, А. Л. Рабинович, Р. А. Турусов и др.) установили, что деформативные и прочностные свойства термопластов (поливинилхлорид, полиэтилен, полипропилен и др.) могут меняться в разы в пределах нормативных эксплуатационных температур (от 0 до +80 °С).

С учётом того, что физико-механические параметры полимеров сильно зависят от температуры, необходимо весьма точно определять распределение температурного поля в конструкциях и их элементах. Однако в подавляющем большинстве существующих работ принимали упрощённый закон распределения температуры, к примеру, логарифмический, справедливый только в статичных задачах, не учитывающих изменение температурного поля во времени.

**Цель работы** — комплексная оптимизация определения напряжённо-деформированного состояния гомогенных и гетерогенных систем сетчатых и линейных полимеров; анализ влияния физико-механических параметров полимеров, являющихся функцией многих факторов (температура, время, наличие добавок и ионизирующего излучения) на напряжённо-деформированное состояние; разработка методов определения физико-механических характеристик полимеров по их кривым релаксации, а также получение для них полной системы уравнений и их численная реализация.

### **Задачи работы:**

1. Проведение анализа современного состояния и тенденций развития данной проблемы в Российской Федерации и за рубежом.

2. Разработка методики определения функциональной зависимости физико-механических параметров полимера в зависимости от температуры и ионизирующего излучения, а также от наличия добавок.

3. Уточнение выражения функционала темпетарутного поля в связи с различием его представления в многочисленных литературных источниках по вариационному исчислению и методу конечных элементов.

4. Оптимизация математической концепции решения плоских осесимметричных задач: температурного шага, сетки, положения центра тяжести конечного элемента.

5. Апробация достоверности решения плоских осесимметричных задач для полимера путём решения их несколькими методами (МКР и МКЭ) с последующим анализом и сопоставлением результатов.

6. Разработка 4-узлового конечного элемента (численно-аналитического), описывающего работу конструкции из полимера с учётом термовязкоупругости и апробация достоверности решения с использованием полученного 4-узлового КЭ. Сравнение с другими вариантами узлового моделирования конечного элемента.

7. Расчёт адгезионного соединения с течением времени (длительная прочность) с использованием нелинеаризованной и линеаризованной теорий и сопоставлением решений с другими авторами и их моделями.

8. Исследование и анализ влияния на напряжённо-деформированное состояние элементов конструкций физико-химического состава полимера.

Для достижения поставленных задач в диссертационной работе моделировалось напряжённо-деформированное состояние тел из следующих полимеров: в главе 2 — вторичных поливинилхлорид (ПВХ); главы 3–6 — сетчатый полимер — эпоксидная смола ЭДТ-10; глава 7 — полиэтилен высокой плотности (ПЭВП), подверженный внедрению добавки гидроксипатит (ГА) и действию ионизирующего излучения.

### **Научная новизна.** В настоящей работе впервые:

1. Предложена методика определения физико-механических параметров полимера, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, на основе кривых релаксации материала как функции от нескольких факторов.

2. Получены матрица жёсткости и вектор сил для прямоугольного конечного элемента, учитывающие при помощи непосредственного интегрирования заданной функции формы как температурные составляющие, так и составляющие высокоэластических деформаций с соответствующим спектром времён релаксации.

3. Проведено исследование напряжённо-деформированного состояния полимерного тела с комплексным подходом по оптимизации математической модели (получение нового конечного элемента и вектора нагрузок, конечно-элементной сетки, переменного шага времени и т. д.).

4. Выполнен расчёт на длительную прочность при нормальном отрыве адгезионного соединения путём прямого моделирования двумерными конечными элементами вместо «классического» использования модели пограничного слоя.

5. Проведён анализ влияния модифицированных упругих и реологических свойств полимера (введение добавок и воздействие ионизирующего излучения) на напряжённое состояние соответствующего элемента конструкции в осесимметричной постановке.

6. Проведено численное моделирование напряжённого состояния модельного математического объекта по промежуточным значениям полученных физико-механических параметров, как функций нескольких переменных.

**Теоретическая значимость** работы заключается в том, что:

1. Предложен комплексный подход по оптимизации математической модели определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел.

2. Проведено исследование ползучести толстостенного цилиндрического полимерного тела с учётом влияния физических полей и наличия добавок на упругие и высокоэластические параметры материала и их спектров времён релаксации как функции нескольких переменных.

**Практическое значение** работы:

1. На основании проведённых исследований в программном комплексе MatLab представлен комплект модулей для определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел в осесимметричной постановке.

2. Получена матрица жёсткости и вектор нагрузок двумерного конечного элемента численно-аналитическим методом, включающие в себя температурные компоненты и компоненты, отвечающие за высокоэластические деформации.

3. Решена практически важная задача определения длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве. Представлено существенное различие между результатами, полученными ранее другими авторами, и результатами, представленными в настоящей диссертационной работе.

4. Показано, что изменение температуры адгезионного соединения не существенно сказывается на прочности этого соединения, а существенно сказывается на времени, когда достигаются максимальные напряжения и заканчивается процесс их релаксации.

5. Представлена методика определения физико-механических параметров полимера по одним только кривым релаксации, что позволяет получить необходимые упругие и реологические данные максимально быстро.

6. На основании решения модельных задач показано, что значительные отличия в поведении релаксационных свойств материала незначительно сказываются на изменении напряжённо-деформированного состояния идентичных полимерных тел.

**Методология и методы исследования.** Исследования проведены при помощи аналитических, численных и численно-аналитических методов. Непосредственное определение напряжённо-деформированного состояния полимерных тел производили при помощи метода конечных элементов с применением программного комплекса MatLab. Для оценки достоверности результатов также использовали метод конечных разностей.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Методика комплексной оптимизации математических моделей полимерных тел (оптимизация шага времени, оптимизация соотношения размеров сторон конечного элемента и т. д.).
2. Модифицированная матрица жёсткости и вектор нагрузок прямоугольного конечного элемента с учётом температурных и реологических составляющих, полученные численно-аналитическим методом.
3. Результаты решения тестовых задач для различных полимеров, где оценивается эффективность проведённых оптимизационных процессов.
4. Результаты оценки длительной прочности адгезионного соединения на нормальный отрыв, полученные методом конечных элементов.
5. Методика оценки длительной прочности адгезионного соединения при различных температурных режимах.
6. Результаты оценки напряженного состояния цилиндрических объектов с учётом изменения физико-механических параметров полимера.
7. Результаты сопоставления напряжённо-деформированного состояния адгезива, полученные при помощи нелинейных и линеаризованных выражений.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается:

- проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений;
- сравнением полученных результатов с известными решениями других авторов;
- применением нескольких методов к решению одной задачи с последующим сопоставлением результатов.

**Апробация работы.** Основные моменты работы отражены в печатных и электронных публикациях, материалах конференций: материалы III, IV, V, VIII, XIII, XIV Международных научно-практических конференций, КБГУ, Нальчик; Строительство-2007, 2009, 2011–2015, РГСУ, Ростов-на-Дону; Современные строительные материалы, технологии и конструкции: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию ФГБОУ ВПО ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщикова), а также в изданиях, входящих в базы Scopus или Web of Science.

**Внедрение результатов работы.** Имеются 3 свидетельства о регистрации программ ЭВМ.

**Структура и объём работы.** Работа состоит из введения, семи глав, основных выводов, списка использованной литературы и трёх приложений. Изложена на 286 страницах машинописного текста и содержит 63 рисунка и 14 таблиц.

**Публикации.** Основные положения диссертационной работы опубликованы в 49 печатных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК РФ — 20, в журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science — 12, в других периодических изданиях — 17, получено 3 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

## Основное содержание работы

В первой главе приводятся краткий исторический обзор развития вопросов исследования полимеров, основные уравнения механики деформируемого твёрдого тела, теории упругости, пластичности и ползучести, уравнения, необходимые для перехода от эллиптических уравнений к вариационной постановке, и рассматриваются двумерный, треугольный и четырёхугольный конечные элементы, решение задач с помощью которых будет происходить в последующих главах.

Поскольку физико-механические параметры полимера являются значительной функцией от температуры, то вопрос определения точного температурного поля становится одним из главных. Для возможности точного решения задачи поля, в том числе и температурного, используется переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке:

$$-\operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} u) + \beta u = f$$

с краевыми условиями

$$u(\bar{x})|_{\Gamma_1} = g(\bar{x}); \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} - \Theta = 0; \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} + \gamma(u|_{\Gamma_3} - p) = 0,$$

где  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

Тогда решение этих задач эквивалентно задаче минимизации выпуклого функционала:  $u = \arg \min_v \mathfrak{F}v$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(v) = & \int_{\Omega} [\alpha(\operatorname{grad} v)^2 + \beta v^2] d\Omega + \int_{\Gamma_3} \gamma v^2 d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_3} \gamma p v d\Gamma - \\ & - 2 \int_{\Gamma_2} \Theta v d\Gamma - 2 \int_{\Omega} f v d\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом во многих источниках допускается ошибка, когда перед первым интегралом выражения (1) ставится коэффициент 1/2 так, как это делают при записи потенциальной энергии упругой деформации тела. В главе 2 диссертационной работы приводится ряд задач, в которых доказывается отсутствие указанного коэффициента.

Во второй главе рассматривается методика определения реологических параметров на основе обработки опытных результатов.

Выражение связи напряжения–деформации принимается согласно обобщённому нелинейному уравнению Максвелла–Гуревича

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}, \quad (2)$$

где 
$$f^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}) - E_{\infty}\varepsilon_{cr,ik};$$

$$\eta^* = \eta_0^* \exp \left\{ -\frac{1}{m^*} \left[ \gamma^* p + \left| \frac{3}{2}(\sigma_{rr} - p) - E_{\infty}\varepsilon_{cr,rr} \right|_{\max} \right] \right\}.$$

Начиная с выражения (2) и далее, для обозначения переменных принимаем следующие сокращения:  $cr$  — от английского «creep», ползучесть — обозначены параметры, связанные с высокоэластическими деформациями полимеры;  $el$  — от английского «elastic», упругость — обозначены параметры, связаны с упругой работой материала;  $f^*$  — функция напряжений;  $\eta_0^*$  — коэффициент начальной релаксационной вязкости;  $E_\infty$  — модуль высокоэластичности;  $m^*$  — модуль скорости;  $p$  — среднее напряжение

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}.$$

Форма записи коэффициента начальной релаксационной вязкости  $\eta^*$  в выражении (2) предпочтительна в случае изотермических процессов, когда составляющие данного выражения  $\eta_0^*$ ,  $\gamma^*$  и  $m^*$ , зависящие от температуры  $T$ , становятся константами.

Часто для упрощения расчётов с учётом высокоэластических деформаций прибегают к упрощению, связанному с линейризацией уравнений высокоэластичности; в этом случае

$$m^* \rightarrow \infty, \quad \eta^* \rightarrow \eta_0^* \equiv \text{const.}$$

Необходимо отметить, что использовать вышеуказанное условие можно только к изотермическим процесса в случае постоянного температурного поля. В этом случае коэффициент начальной релаксационной вязкости  $\eta_0^*$  превращается в параметр, определяемый величиной температуры. В других случаях, будучи сильной экспоненциальной функцией от температуры  $\eta_0^*$ , использование линейризации неуместно, т. к. позволяет получить только очень грубые приближения.

В параграфе 2.3 описываются процессы, протекающие при квазистатическом растяжении (сжатии) стержней, а параграф 2.4 — релаксации напряжений в стержнях, где рассматривается пример анализа и разбирается существующая методика определения упругих и реологических параметров для эпоксидной смолы ЭДТ-10.

В параграфе 2.5 изложена альтернативная методика определения упругих и реологических параметров релаксации полимеров, как функции от нескольких переменных. В качестве практического примера приводится алгоритм определения физико-механических параметров вторичного поливинилхлорида (далее — ПВХ), подверженного постоянной по величине деформации  $\epsilon = 0.03$ , по кривым релаксации при различных температурах от +20 до +70 °С. Получены следующие зависимости физико-механических параметров ПВХ от температуры:

$$\begin{aligned} E(T) &= -0.2393T^2 + 8.3357T + 1402.6 \text{ [МПа]}; \\ E_\infty(T) &= -0.0575T^3 + 11.095T^2 - 732T + 16618 \text{ [МПа]}; \\ \eta_0^*(T) &= 44.78 \cdot 10^5 e^{-0.075T} \text{ [МПа} \cdot \text{мин]}; \\ m^*(T) &= -0.0794T + 15.134 \text{ [МПа]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (3) аппроксимирует зависимости физико-механических параметров от температуры с достоверностями:  $E(T) — R^2 = 0.967$ ;  $E_\infty(T) — R^2 = 0.9986$ ;  $\eta_0^*(T) — R^2 = 0.989$ .

Достоверность полученных коэффициентов подтверждается результатами решения задачи расчёта релаксации напряжений с течением времени в стержне на основе зависимостей (3). Сопоставление экспериментальных кривых с результатами теоретического решения задачи релаксации напряжений представлено в диссертации. Анализ построенных графиков показывает, что очень хорошее совпадение экспериментальных данных с результатами решения задачи наблюдается при температурах  $T = 20, 30$  и  $60$  °С, при остальных температурных режимах совпадение удовлетворительное.

Также в главе приводится методика расчета задач с учётом ползучести материала. Все рассмотренные в диссертации задачи, в которых расчёт производится с учётом высокоэластических деформаций, решаются численно одним из двух методов: конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ). Представленный далее алгоритм расчёта справедлив для обоих методов.

Задачи рассматриваются несвязные, т. е. на первом этапе определяется температурное поле в полимерном теле, на втором этапе производится определение упругих и реологических параметров полимера в каждой точке (в случае МКР) и каждом конечном элементе (в случае МКЭ) в зависимости от температуры. На третьем этапе происходит определение напряжённо-деформированного состояния в рассматриваемом теле.

Третий этап состоит из нескольких подэтапов. Связано это с тем, что нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича содержит неизвестную высокоэластическую деформацию и в левой части (определение скорости высокоэластической деформации), и в правой части (в функции напряжений и экспоненциальной зависимости релаксационной вязкости). Таким образом используется пошаговый метод, при котором в начальный момент времени ( $t = 0$ ) считается, что все высокоэластические деформации отсутствуют, т. е.  $\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s} = 0$ . Остаётся определить напряжённо-деформированное состояние исходя только из упругой работы расчётной модели и определить скорость высокоэластической деформации на основе уравнения Максвелла–Гуревича. Предполагая, что временной интервал ( $t = \Delta t$ ) достаточно мал, высокоэластическая деформация на следующем временном интервале может быть определена следующим образом:

$$\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t_{i+1}) = \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t)}{\partial t} (t_{i+1} - t). \quad (4)$$

Таким образом, на следующем временном этапе высокоэластическая деформация уже известна и напряжённо-деформированное состояние определяется с её учётом.

**Третья глава** посвящена одномерным плоским задачам термовязкоупругости для неоднородных полимерных тел в осесимметричной постановке (рис. 1, а). Решение искомой функции (рис. 1, б) может быть получено аналитически (рис. 1, в) или численно: МКР (рис. 1, г) или МКЭ (рис. 1, д).

В данной главе в начале рассматривается задача распределения температурного поля по толщине цилиндра (задача Фурье).

Все исследования в диссертационной работе выполняются для толстостенных цилиндрических тел, т. е. если толщина стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра

$$\frac{2(b-a)}{b+a} > \frac{1}{10}.$$

Рассматривается цилиндр (см. рис. 1), внутренний радиус которого  $R_a$ , внешний —  $R_b$ . В случае плоского деформированного состояния (ПДС) длина цилиндра  $l$  значительно преобладает над внешним радиусом  $R_b$ :  $l \gg R_b$ ; в случае плоского напряжённого состояния (ПНС) толщина цилиндра мала:  $l \rightarrow 0$ .

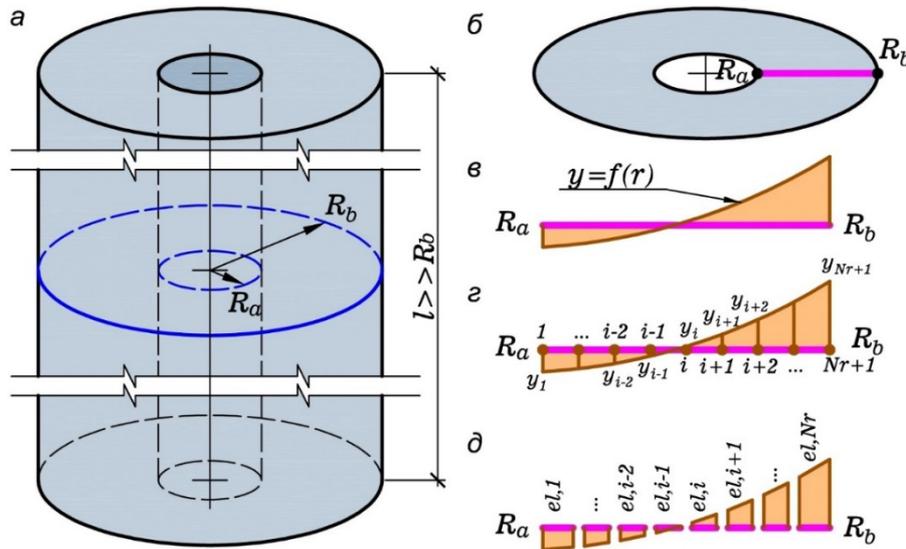


Рис. 1. Исходная схема осесимметричной задачи: а — исходный цилиндр; б — рассматриваемый участок цилиндра; в — непрерывная функция  $y = f(x)$ ; г — аппроксимация функции конечными разностями; д — аппроксимация функции конечными элементами

Исследуется цилиндрическое тело, граничные условия на внутренней и внешней поверхностях которого определяются параметрами:  $T_a$ ,  $T_b$  — температура соответственно внутренней и внешней поверхностей цилиндра;  $P_a$ ,  $P_b$  — равномерно распределённое давление, приложенное соответственно к внутренней и внешней поверхностям цилиндра.

Оценка достоверности предлагаемых выкладок проводится на известных решениях. Изначально рассматривается постоянное во времени температурное поле. Задачу решаем тремя методами: определение точного аналитического решения, при помощи МКР и МКЭ.

Рассматривается задача определения температурного поля в цилиндре при следующих исходных данных:  $R_a = 0.008$  м;  $R_b = 0.028$  м;  $T_a = 100$  °С;  $T_b = 28$  °С. В диссертационной работе показано, что решения, полученные при помощи МКР и МКЭ полностью совпадают между собой при таком разбиении, когда узлы сетки совпадают с узлами конечных элементов. Если сравнивать

отличие численного решения от аналитического, то при 2 конечных элементах погрешность составляет 1.136 %, при 4 — 0.336 %. При количестве конечных элементов более 40, погрешностью можно пренебречь.

На следующем этапе исследуется переменное во времени температурное поле. В отличие от стационарной задачи, необходимо учитывать в разрешающих уравнениях скорость изменения температурного поля. Уравнения МКЭ приводятся в диссертации.

В случае решения задачи с помощью МКЭ можно выделить два подхода. В первом производят аппроксимацию производной температуры по времени до составления выражения функционала и выделяют неизвестную (в текущем моменте времени) и известную части (в предыдущем моменте времени). Во втором — производную температуры по времени представляют в качестве функции, а аппроксимацию по времени производят после составления выражения функционала.

В случае аппроксимации производной температуры по времени до составления выражения функционала, уравнение теплопроводности Фурье записываем в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\chi} \frac{T_\theta - T_{\theta-1}}{h_t}, \quad (5)$$

где  $\chi$  — температуропроводность материала;  $T_\theta$  — температура в текущий момент времени;  $T_{\theta-1}$  — температура в предыдущий момент времени;  $h_t$  — временной интервал между соответствующими узлами времени.

Функционал выражения (5) примет вид:

$$\mathfrak{S}(T_\theta) = \int_V \left[ \chi (\text{grad } T_\theta)^2 + \frac{T_\theta^2}{h_t} - 2 \frac{T_{\theta-1} T_\theta}{h_t} \right] dV. \quad (6)$$

Подробный переход от дифференциального уравнения к функционалу изложен в диссертационной работе.

В случае аппроксимации производной температуры по времени после составления выражения функционала, уравнение теплопроводности Фурье записываем в виде:

$$\chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7)$$

а аппроксимация дифференциала температуры по времени выражением  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_\theta - T_{\theta-1}}{h_t}$  производится после составления выражения функционала. Тогда функционал для выражения (7) можно записать:

$$\mathfrak{S}(T_\theta) = \int_V \left[ \chi (\text{grad } T_\theta)^2 + 2 \frac{T_\theta^2}{h_t} - 2 \frac{T_{\theta-1} T_\theta}{h_t} \right] dV. \quad (8)$$

Сравнение выражений (6) и (8) показывает, что разница между ними состоит в коэффициенте перед вторым членом  $T_0^2/h_t$ .

Далее проводится сравнение результатов, полученных МКР и МКЭ при минимизации выражений (6) и (8). Анализ полученных данных показывает, что верной является методика, при которой производная температуры по времени аппроксимируется до составления функционала.

Основным классом задач, рассматриваемым в диссертационной работе, являются задачи в двухмерной постановке. Достоверность решений двухмерных задач можно проверить сравнением результатов с одномерными задачами, для чего длину цилиндра принимают во много раз больше его внешнего диаметра, получая плоское деформированное состояние, или гораздо меньше его внешнего диаметра, получая плоское напряжённое состояние.

Таким образом, следующим этапом в диссертационной работе явилось исследование напряжённо-деформированного состояния цилиндрического тела в осесимметричной постановке под действием внутреннего и внешнего давления, наличием нестационарного температурного поля и изменением физико-механических параметров полимера от температуры. Решение задач проводится при помощи МКЭ и МКР. Разрешающие уравнения обоих численных методов и подробная методика решения приведены в диссертационной работе.

Рассматривается определение напряжённо-деформированного состояния цилиндрического тела из эпоксидной смолы ЭДТ-10.

Геометрические параметры и граничные условия:  $r_a = 8$  мм;  $r_b = 28$  мм;  $P_a = 0$  МПа;  $P_b = 0$  МПа; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 100 шт.; время, в течение которого происходит расчёт НДС 3.6 ч; температура на внешней поверхности цилиндра ( $r = r_b$ )  $28$  °C; начальная температура на внутренней поверхности цилиндра ( $r = r_a$ )  $28$  °C; конечная температура на внутренней поверхности цилиндра ( $r = r_a$ )  $100$  °C; время роста температуры на внутренней поверхности цилиндра от своего начального значения до конечного 1.2 ч. Результаты расчёта поставленной задачи приводятся в диссертационной работе.

Физико-механические и реологические характеристики полимера (эпоксидная смола ЭДТ-10), а также теплофизические параметры имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.17 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}; & E &= -17.5T + 3525 \text{ [МПа]}; \\ \rho &= 1250 \text{ кг/м}^3; & E_\infty &= -30T + 3150 \text{ [МПа]}; \\ c &= 0.35 \text{ кДж/кг} \cdot \text{град}; & m^* &= -0.011T + 4.75 \text{ [МПа]}; \\ \nu &= 0.3; & \eta_0^* &= 104430 \exp(-0.0275T) \text{ [МПа} \cdot \text{ч]}. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражении (9):  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\rho$  — плотность материала;  $c$  — удельная теплоёмкость материала;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости;  $E_\infty$  — модуль высокоэластичности;  $m^*$  — модуль скорости;  $\eta_0^*$  — коэффициент начальной релаксационной вязкости.

Неоднородность в температурном поле рассматриваемой задачи приводит к существенному изменению физико-механических параметров полимера в

толще тела. Таким образом, происходит решение задачи с наведённой, т. е. косвенной неоднородностью.

Высокоэластические деформации полимера по уровню сопоставимы с упругими составляющими. Поскольку исследуется плоское деформированное состояние, то полная осевая деформация  $\varepsilon_z$  вдоль оси  $z$  должна равняться нулю; в результате решения получены отклонения от нуля и имеют порядок  $10^{-18}$ . Подобная ситуация наблюдается и при анализе полученных результатов полной объёмной высокоэластической деформации, которая также должна быть равна нулю:  $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z} = 0$ .

Сравнение результатов решения задачи, полученных различными численными методами (МРК и МКЭ) полностью совпадает, что говорит о достоверности применённой методики.

**Глава 4** посвящена оптимизации плоских задач термовязкоупругости.

В связи с тем, что расчёт полимерных тел проводится пошагово, при этом количество шагов во времени может измеряться сотнями и тысячами, необходимо оптимизировать методику расчёта. Для оценки достоверности полученных данных, приводится сравнение решений задач из предыдущего параграфа с решениями, в которых применяются оптимизационные подходы.

Первоначально рассматривается вопрос оптимизации пошагового метода во времени. При расчёте ползучести используется пошаговый метод, представленный выражением (4). Таким образом точность зависит от размера выбранного шага по времени: увеличение шага приводит к уменьшению точности вычислений и наоборот. Если используется постоянное количество интервалов при аппроксимации времени, то точность падает с увеличением интервала времени, на котором производится весь расчёт. Частично решить данную проблему можно, увеличив количество аппроксимирующих интервалов по времени, однако, это порождает две другие проблемы:

- рост времени, требуемого на решение поставленной задачи в связи с увеличением количества шагов по времени;
- накопление ошибки на каждом временном интервале в связи с ограничениями, накладываемыми разрядностью используемой электронно-вычислительной машины.

Основной рост деформаций ползучести происходит в самом начале, поэтому выходом из сложившейся ситуации может являться использование переменных аппроксимирующих временных интервалов, более коротких в самом начале расчёта и увеличивающихся к концу (рис. 2). Для этого можно принять распределение аппроксимирующих интервалов по времени в соответствии с логарифмическим законом и основанным на геометрической прогрессии.

Распределение по логарифмическому закону можно производить выражением:

$$t(i) = \exp\left(\frac{\log(t_{N_t+1})}{N_t(i-1)}\right) - 1, \quad i = 1 \dots N_t + 1.$$

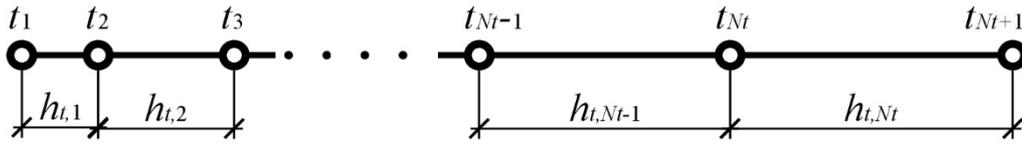


Рис. 2. Аппроксимация пошагового метода при переменных интервалах по времени:  $t$  — время на текущем шаге;  $\Delta t_i$  — длина  $i$ -го временного интервала;  $N_t$  — количество аппроксимирующих интервалов по времени

В диссертации показано, что логарифмическое распределение не всегда оптимально.

Альтернативой логарифмического распределения является распределение по закону геометрической прогрессии. В этом случае необходимо задать общее количество интервалов во времени  $N_t$  и отношение величины последнего интервала  $h_{t,Nt}$  к величине первого интервала  $h_{t,1}$ .

$$k = \frac{h_{t,Nt}}{h_{t,1}}.$$

Любой член геометрической прогрессии определяется по формуле

$$h_{t,n} = h_{t,1} q^{(n-1)},$$

где  $h_{t,1}$  — первый член;  $n$  — номер искомого члена;  $q$  — знаменатель прогрессии:

$$q = k^{\left(\frac{1}{n-1}\right)}.$$

Весь период расчёта  $t_{Nt+1}$  фактически представляет собой сумму  $S_n$  первых  $n$  членов

$$S_N = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = t_{Nt+1}.$$

Первый член определяется выражением:

$$h_{t,1} = t_{Nt+1} \frac{1 - q}{1 - q^n}.$$

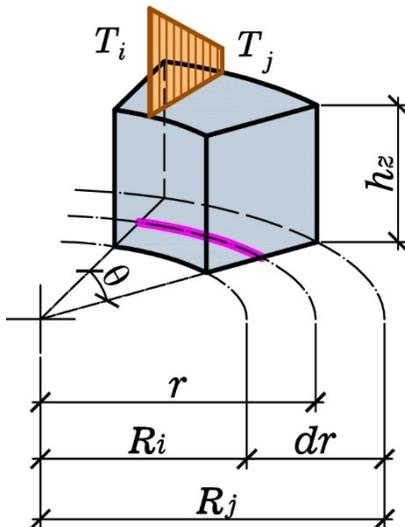


Рис. 3. Конечный элемент в осесимметричной постановке

Следующим оптимизационным параметром явилось определение центральной точки конечного элемента. В выражения матриц жёсткости, а также вектора нагрузок входит параметр  $r$  (рис. 3), т. е. координата некоторой точки, находящейся внутри конечного элемента. Обычно параметр  $r$  принимают в середине элемента, т. е.

$$r = \frac{R_i + R_j}{2}.$$

Однако это может быть справедливо при решении задач в декартовой системе координат, когда этот параметр соответствует положению центра тяжести конечного элемента. Иное дело, если имеет место осесимметричная постановка, или решение задачи в цилиндрических координатах, в этом случае предлагается иной подход.

Определяется такое положение точки  $r$ , при котором внутренний объём конечного элемента (основание  $r-R_i$ ) был равен внешнему объёму конечного элемента (основание  $R_j-r$ ):

$$r = \sqrt{\frac{R_j^2 + R_i^2}{2}}.$$

Далее в главе исследуется влияние оптимизационных подходов на точность полученных результатов. Показано увеличение точности при меньших количествах узлов или временных интервалов.

**В пятой главе** рассматриваются задачи термовязкоупругости в осесимметричной двумерной постановке.

В случае двумерных задач конечный элемент может быть представлен в виде четырёхугольника или, наиболее часто используемого варианта — треугольника. Далее при рассмотрении сечения цилиндра будет рассматриваться прямоугольный плоский конечный элемент, как наиболее удобный для данного класса осесимметричных задач.

Интерполяционный полином для данного вида конечного элемента записывается в виде полинома:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy.$$

Необходимо отметить, что так как рассматривается прямоугольный элемент, то для дальнейших выкладок сделаны некоторые упрощения:  $X_l = X_i$ ;  $X_j = X_k$ ;  $Y_j = Y_i$ ;  $Y_l = Y_k$ .

Температурное поле определяется уравнением теплопроводности Фурье:

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) = q_T - \frac{\rho c}{h_t} (T_\rho - T_{\rho-1}),$$

где  $h_t$  — интервал времени между исследуемым моментом и предыдущим;  $T_\rho$  и  $T_{\rho-1}$  — температуры в узле элемента соответственно в текущий момент времени и в предыдущий.

Функционал данного выражения может быть записан:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(T) = & \int_V \left[ \lambda (\operatorname{grad} T)^2 + \frac{\rho c}{h_t} T^2 \right] dV + \int_{\gamma^3} \alpha T^2 d\gamma - 2 \int_{\gamma^3} \alpha T_0 T d\gamma + \\ & + 2 \int_{\gamma^2} QT d\gamma - 2 \int_V fT dV, \end{aligned}$$

где  $f = q_T + \frac{\rho c}{h_t} T_{\rho-1}$ .

Минимизация функционала  $\frac{\partial \mathfrak{E}(T)}{\{T\}}$  приводит к выражению для каждого конечного элемента:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(T)} & k_{1,2}^{(T)} & k_{1,3}^{(T)} & k_{1,4}^{(T)} \\ k_{2,1}^{(T)} & k_{2,2}^{(T)} & k_{2,3}^{(T)} & k_{2,4}^{(T)} \\ k_{3,1}^{(T)} & k_{3,2}^{(T)} & k_{3,3}^{(T)} & k_{3,4}^{(T)} \\ k_{4,1}^{(T)} & k_{4,2}^{(T)} & k_{4,3}^{(T)} & k_{4,4}^{(T)} \end{bmatrix}}_{[k^{(T)}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_i^{(T)} \\ T_j^{(T)} \\ T_k^{(T)} \\ T_l^{(T)} \end{Bmatrix}}_{\{T^{(T)}\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{(T)} \\ f_2^{(T)} \\ f_3^{(T)} \\ f_4^{(T)} \end{Bmatrix}}_{\{f^{(T)}\}}. \quad (10)$$

Коэффициенты выражения (10) получены аналитически для заданной функции формы и приведены в диссертационной работе.

После определения распределения температурного поля в толще полимера, как и в случае с одномерными задачами, определяется напряжённно-деформированное состояние.

Полная энергия системы  $\mathfrak{E}$  представляет собой разность между энергией упругой деформации тела  $\Pi$  и работой внешних сил  $A_W$ :

$$\mathfrak{E} = \Pi - A_W,$$

где энергия упругой деформации тела записывается:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,z} + \tau_{rz} \varepsilon_{el,rz}) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \cdot \varepsilon_{el} dV.$$

Минимизируя потенциальную энергию упругой деформации по перемещениям  $\{U\}$ , получаем выражение:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \int_V [B]^T [D] [B] \{U\} dV - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} dV - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_{cr}\} dV = 0.$$

Следующим шагом данное выражение приводим к виду:

$$[K] \{U\} = \{F\},$$

где  $[K]$  — глобальная матрица жёсткости и  $\{F\}$  — глобальный вектор нагрузки, которые определяются соотношениями

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Здесь 
$$[k^{(e)}] = \int_{Z_i}^{Z_k} \int_{R_i}^{R_k} r [B]^T [D] [B] dr dz;$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{Z_i}^{Z_k} \int_{R_i}^{R_k} r[B]^T[D]\{\varepsilon_T\} dr dz + \int_{Z_i}^{Z_k} \int_{R_i}^{R_k} r[B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\} dr dz.$$

В результате интегрирования матрица  $[k^{(e)}]$  и вектор  $\{f^{(e)}\}$  имеют структуру:

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} & k_{17}^{(e)} & k_{18}^{(e)} \\ & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} & k_{27}^{(e)} & k_{28}^{(e)} \\ & & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} & k_{37}^{(e)} & k_{38}^{(e)} \\ & & & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} & k_{47}^{(e)} & k_{48}^{(e)} \\ & & & & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} & k_{57}^{(e)} & k_{58}^{(e)} \\ & & \text{сим.} & & & k_{66}^{(e)} & k_{67}^{(e)} & k_{68}^{(e)} \\ & & & & & & & k_{78}^{(e)} \end{bmatrix};$$

$$\{f^{(e)}\} = \{f_1^{(e)} \quad f_2^{(e)} \quad f_3^{(e)} \quad f_4^{(e)} \quad f_5^{(e)} \quad f_6^{(e)} \quad f_7^{(e)} \quad f_8^{(e)}\}^T.$$

Значения членов матрицы  $[k^{(e)}]$  и вектора  $\{f^{(e)}\}$  точно непосредственным интегрированием и приведены в диссертационной работе.

Следующим этапом идет анализ достоверности полученных коэффициентов матрицы жёсткости и вектора нагрузок конечного элемента путем сравнения напряжённо-деформированного состояния цилиндра, чья длина во много раз превышает его внешний диаметр, с одномерной задачей при плоском деформированном состоянии.

**В шестой** главе приведён расчёт адгезионного соединения на длительную прочность с учётом ползучести полимерного материала.

Подобные задачи ранее исследовали разные авторы, среди которых можно выделить работы проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова, в которых расчёт адгезионного соединения выполнили при помощи метода пограничного слоя с использованием некоторых усреднённых параметров.

Произведён уточненный расчёт при помощи метода конечных элементов с использованием всех оптимизационных решений, приведённых в предыдущих главах. Проводится исследование прочности адгезионного соединения двух цилиндрических тел (субстрактов), постановка задачи представлена на рис. 4, а.

Исходные условия задачи следующие:

- субстрат — стальные диски толщиной 1.2 мм;
- адгезив — сетчатый полимер — эпоксидная смола ЭДТ-10, компонентами которой являются КДА/ТЭАТ/Спирт/Ацетон в весовых частях 50/5/30/15.

Расчётная схема поставленной задачи представлена на рис. 4, б. Красным цветом показан конечный элемент, в котором по результатам последующих расчётов возникают наибольшие касательные напряжения. Поскольку задача

симметрична относительно середины адгезива, расчётная схема состоит только из одной половины.

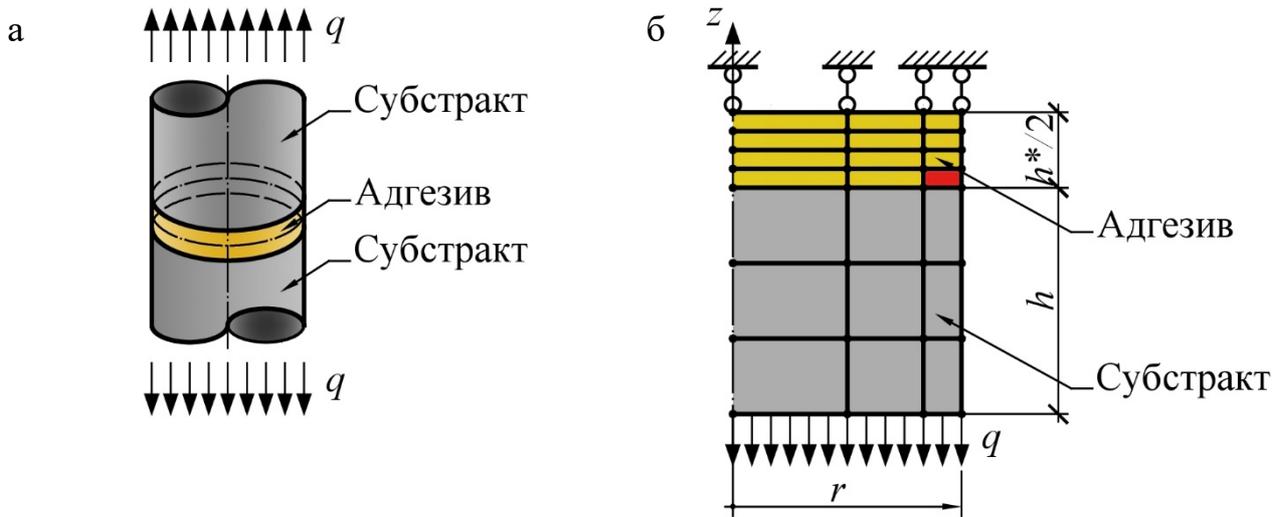


Рис. 4. Постановка задачи (а) и расчётная схема (б) адгезивного соединения

Физико-механические параметры субстрата и адгезива приняты следующими:

Субстрат

$$E(T) = \text{const} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\nu(T) = \text{const} = 0.33.$$

Адгезив

$$E(T) = -18.2T_K + 8\,200 \text{ МПа};$$

$$E_{\infty 1}(T) = \frac{2.4 \cdot 10^6}{T_K} - 6120 \text{ МПа для } T_K < 370 \text{ К};$$

$$E_{\infty 1}(T) = 2.23T_K - 640 \text{ МПа для } T_K \geq 370 \text{ К};$$

$$E_{\infty 2}(T) = 0.1E_{\infty 1}(T);$$

$$m_1^*(T) = m_2^*(T) = -0.0155T_K + 7.73 \text{ МПа};$$

$$\eta_{01}^*(T) = 36\,000 \exp\left(\frac{9\,500}{T_K} - 20\right) \text{ МПа} \cdot \text{с};$$

$$\eta_{02}^*(T) = 36\,000 \exp\left(\frac{35\,400}{T_K} - 90\right) \text{ МПа} \cdot \text{с};$$

$$\nu(T) = \text{const} = 0.37.$$

Здесь  $T_K$  — температура в градусах Кельвина.

Учёт ползучести полимера ведётся при помощи двух спектров времён релаксации, «старшего»  $\varepsilon_{cr,I}$  и «младшего»  $\varepsilon_{cr,II}$ :

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr,I} + \varepsilon_{cr,II}.$$

Расчётные параметры поставленной задачи: температура субстрата и адгезива  $T = 30^\circ\text{C}$ ; растягивающее напряжение на поверхностях металлических пластин  $q = 70 \text{ МПа}$ ; внешний радиус соединения  $r = 12 \text{ мм}$ ; высота субстрата  $h = 1.2 \text{ мм}$ ; половина высоты адгезива  $h^*/2 = 0.09 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0.09 \text{ мм}$ ; весь расчётный период представлен 251 узлом (количество интервалов по времени  $N_t = 250$ ); расчёт проводился от  $t_1 = 0 \text{ ч}$  до  $t_{251} = 18\,518.5167 \text{ ч} = 771.6 \text{ сут} \approx 2 \text{ года } 42 \text{ дня}$ ; отношение последнего интервала времени к самому первому

принято  $k_t = \frac{t_{Nt} - t_{Nt-1}}{t_2 - t_1} = 10^6$ ; половина толщины адгезива представлена 20 прямоугольными конечными элементами; субстракт — 10 прямоугольными конечными элементами; отношение ширины конечного элемента, находящего вблизи торца цилиндра, к ширине конечного элемента, находящегося в центра рассчитываемого объекта, составляет  $k_r = \frac{r_{Nr} - r_{Nr-1}}{r_2 - r_1} = 0.1$ ; по высоте в пределах каждого слоя конечные элементы имеют одинаковую высоту.

Подробные графики распределения напряжений в адгезиве с течением времени приводятся в диссертационной работе. Наибольшие напряжения возникают на указанном красным цветом на рис. 4, б конечном элементе. Сдвиговые напряжения при этом меняются от 26.5572 МПа на начальном этапе времени (упругое решение), достигают максимального значения на узле времени с индексом 134 (соответствует 28.0581 ч) и составляют 30.3204 МПа, в дальнейшем релаксируют до значения 29.3632 МПа в конце расчётного периода.

Выводы в работах проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова показывают, что с течением времени разрушение образца произойдёт в результате значительного роста касательных напряжений, доходящих до уровня растягивающих усилий  $q = 70$  МПа, однако, моделирование при помощи МКЭ показывает, что в некоторый момент времени уровень касательных напряжений достигает своего максимума и происходит его снижение за счёт роста сдвиговых деформаций ползучести (деформации по спектрам времён релаксации полимера приводятся на рис. 5). Так, максимальный уровень касательных напряжений даже не дотягивает до половины растягивающего усилия, т.е.

$$\tau_{rz,max} < \frac{q}{2}.$$

Интересен анализ графиков на рис. 5, согласно которым упругая деформация  $\varepsilon_{el}$  на протяжении всего периода времени меняется несущественно, создавая основной уровень касательных напряжений в самом начале. Полная деформация  $\varepsilon_{full}$  растёт за счёт деформаций ползучести  $\varepsilon_{cr}$ , максимальный уровень которых примерно на 80 % оказывается больше, чем упругие деформации. Если же говорить о высокоэластических деформациях, то деформации второго спектра времён релаксации значительно вырастают к конце расчётного периода, но при этом их вклад в общую деформацию ползучести, по сравнению с высокоэластическими деформациями первого спектра, остаётся слишком малым, чтобы как-то влиять на напряжённо-деформированное состояние.

Для оценки достоверности результатов, проведено их сравнение с данными проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова; для этого результаты аппроксимировались при помощи функции вида

$$f(x) = ax^b + c.$$

Результатом аппроксимации данных проф. Р. А. Турусова с достоверностью 0.9977 для касательных напряжений является функция вида

$$\tau_{rz} = 14.13t^{0.09306} + 13.57 \text{ МПа}, \quad (11)$$

где  $t$  — время, ч.

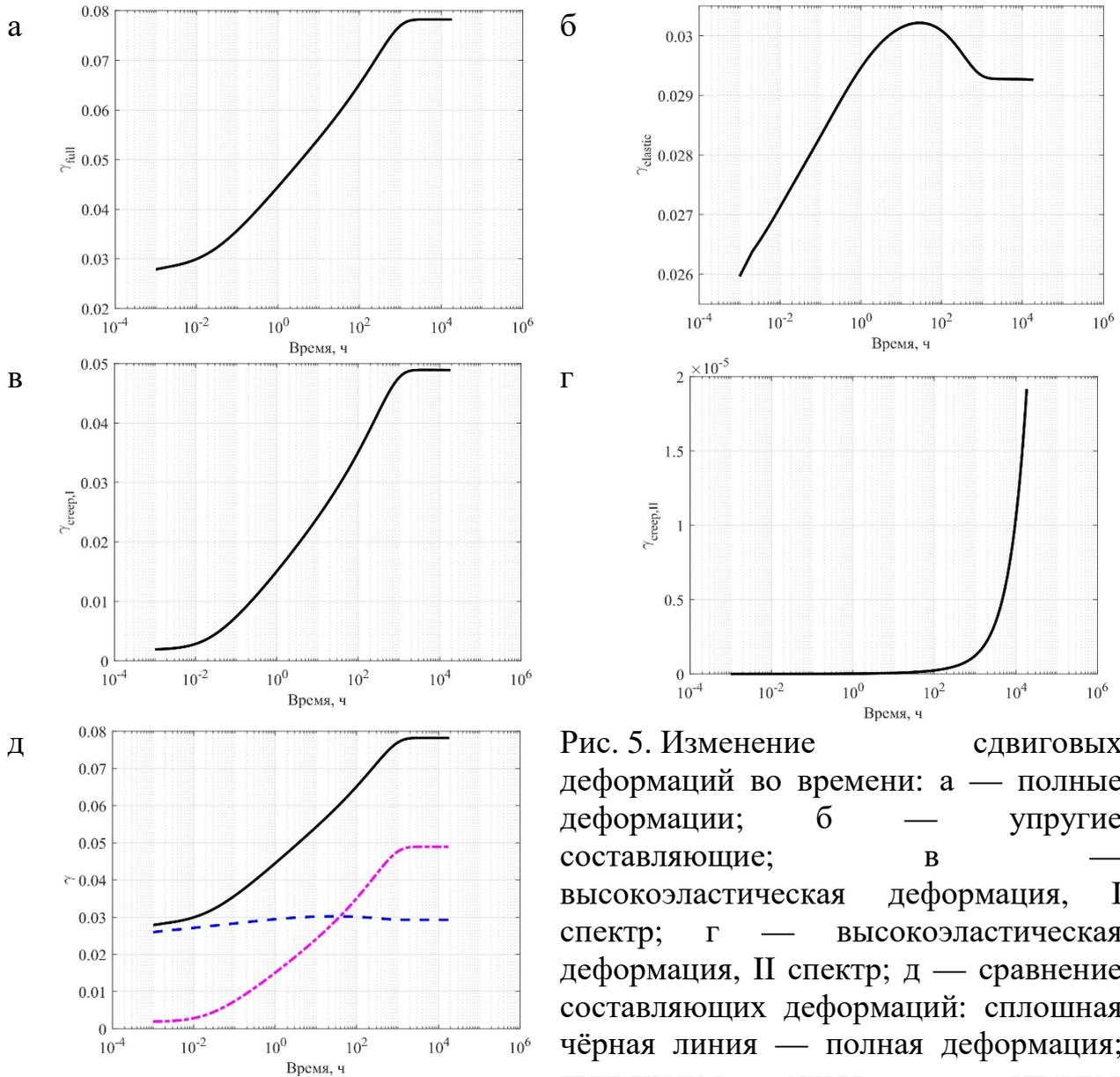


Рис. 5. Изменение сдвиговых деформаций во времени: а — полные деформации; б — упругие составляющие; в — высокоэластическая деформация, I спектр; г — высокоэластическая деформация, II спектр; д — сравнение составляющих деформаций: сплошная чёрная линия — полная деформация; пунктирная синяя — упругая составляющая, штрих-пунктирная фиолетовая — суммарная деформация ползучести

С другой стороны, одним из показателей достоверности полученных результатов может быть сравнение с решением по линеаризованной теории, при которой коэффициент начальной релаксационной вязкости не зависит от функции напряжений, а является постоянной величиной:

$$\eta_s^* = \eta_0, s^* = \text{const.}$$

На рис. 6 представлено сравнение полученных результатов с иными теориями: а — сравнение результата, полученного с использованием нелинейного уравнения связи Максвелла-Гуревича, с результатом, полученным

с использованием линейризованного уравнения; б — эффект неустановившейся ползучести, наблюдаемый с использованием нелинейного уравнения связи Максвелла-Гуревича; в — сравнение результата, полученного с использованием нелинейного и линейризованного уравнений с результатом, полученным проф. Р. А. Турусовым.

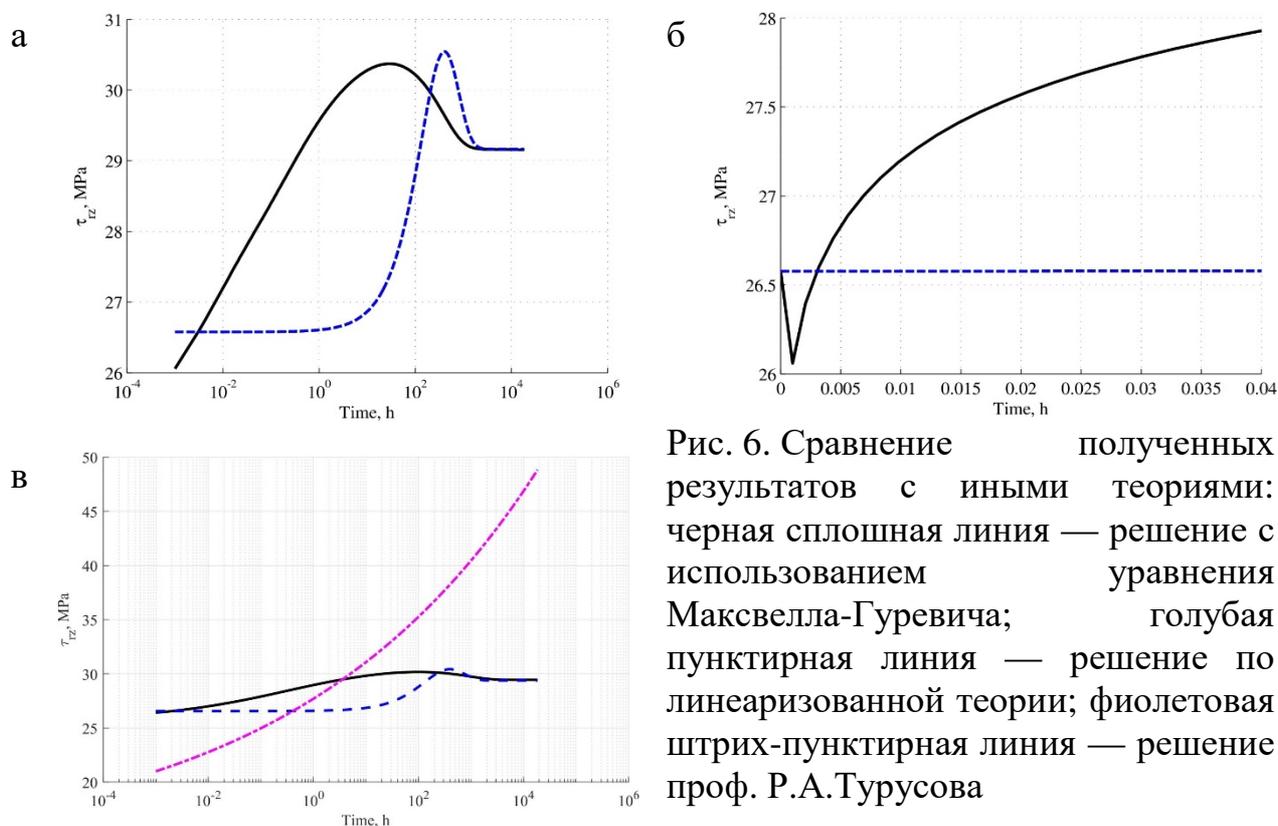


Рис. 6. Сравнение полученных результатов с иными теориями: черная сплошная линия — решение с использованием уравнения Максвелла-Гуревича; голубая пунктирная линия — решение по линейризованной теории; фиолетовая штрих-пунктирная линия — решение проф. Р.А.Турусова

Совпадение решений, полученных при помощи нелинейного уравнения и линейризованного выражения, представленных на рис. 6, а в конце процесса ползучести свидетельствует, в том числе, о работоспособности предложенной методики. Несовпадение этих графиков в самом начале объясняется неустановившейся ползучестью (рис. 6, б), учитываемой нелинейным уравнением Максвелла-Гуревича и неучитываемой линейризованным уравнением.

На рис. 6, в видно значительное отличие между решениями в настоящей диссертационной работе и решением проф. Р. А. Турусова. Необходимо отметить, что на рис. 6, в фиолетовая кривая на участке времени до 1 мин носит теоретический характер в соответствии с выражением (11). Анализируя результаты в конце периода, делаем вывод, что кривая касательных напряжений в соответствии с решением проф. Р. А. Турусова не отражает какую-либо возможную релаксацию напряжений, из-за чего возможно разрушение адгезионного соединения. Предлагаемая в настоящей диссертационной работе методика, наоборот, полностью отражает возможную релаксацию напряжений и даёт прогноз, по которому разрушения адгезионного соединения, при оценке длительной прочности, не произойдёт.

Поскольку физико-механические параметры адгезива являются значительными функциями температуры, был проведен расчет напряженно-

деформированного состояния адгезионного соединения при следующих неизменных во времени температурных режимах: 0, 10, 20 и 30 °С. При больших температурах происходило значительное снижение значений физико-механических параметров, в результате чего задача приобретала геометрическую нелинейность, которая в рамках диссертационной работы не учитывается. Результаты расчёта изменения касательных напряжений в адгезиве в нелинейной и линейризованной постановках с течением времени представлены на рис. 7.

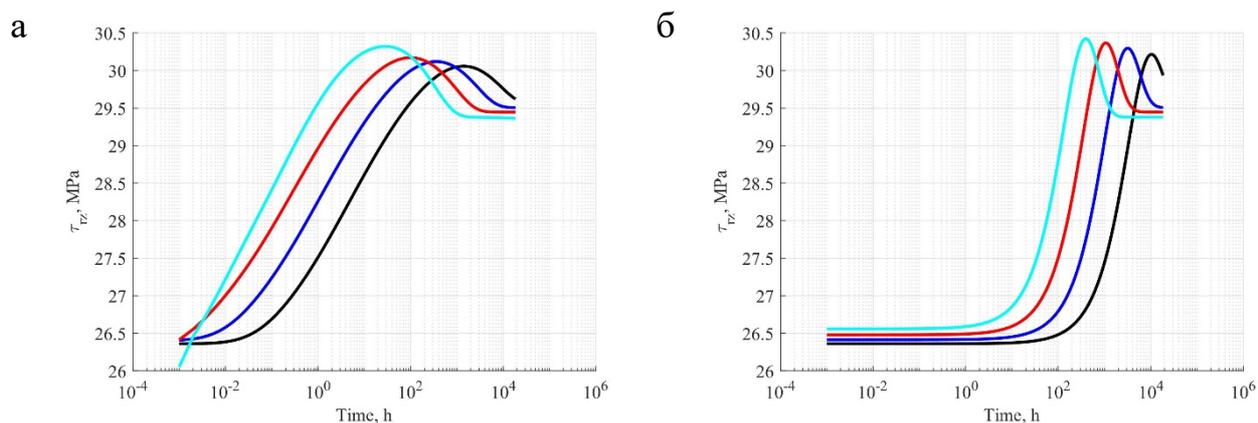


Рис. 7. Сравнение результатов решения при различных температурах: а — нелинейная задача; б — линейризованная задача; черная линия соответствует решению при температуре 0 °С; синяя линия — при температуре 10 °С; красная линия — при температуре 20 °С; голубая линия — при температуре 30 °С

Хорошо видно, что расчёт по нелинейной и линейризованным теориям даёт хорошее совпадение в конце процесса ползучести, однако, линейризованный подход может быть использован для облегчения процесса расчёта.

Изменение температуры от 0 до 30 °С практически не сказывается на величине максимального напряжения, однако сказывается на периоде, когда стабилизируется максимальное касательное напряжение; при росте температуры напряжение стабилизируется при меньшей температуре. Так, при температуре 0 °С стабилизация напряжения даже выходит за исследуемый период времени.

**Седьмая** глава посвящена исследованию изменения упругих и реологических параметров полиэтилена высокой плотности под действием гамма-излучения.

Полиэтилен высокой плотности (ПЭВП) является одним из самых часто используемых полимеров в медицине. При этом низкий модуль упругости, его вязкоупругое поведение и низкая биологическая активность — накладывают ограничение на его применимость. Выходом может служить введение частиц гидроксиапатита (ГА) для улучшения свойств ПЭВП, в результате чего полученный композит может выступать альтернативой использованию металлическим изделиям для заменителей костей и ортопедических имплантов.

В начале главы приводятся некоторые данные по вопросам влияния радиационного излучения на полимерные материалы.

Представителя полимеров является, с точки зрения химической природы, углеводороды, хлор- и фторпроизводные, эфиры, кислоты и т. д. Молекулы полимеров представляют собой длинные цепочки атомов. Подавляющее большинство полимеров делят на три класса:

I. Карбоцепные полимеры — атомы углерода слагают скелет макромолекулы полимера: полиэтилен, полипропилен, поливиниловый спирт и т. д. Фрагмент макромолекулы полиэтилена:



II. Гетероцепные полимеры — макромолекулы в основной цепи кроме атомов углерода содержат гетероатомы (азот, сера, кислород и т. д.): полиэфиры, полиуретаны, полиамиды и т. д. Фрагмент макромолекулы полиэтиленоксида:

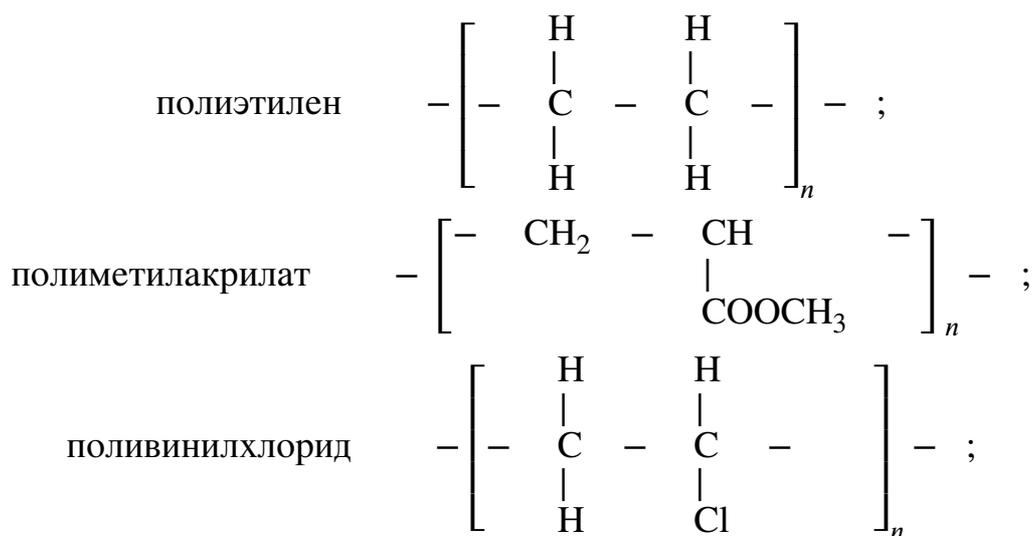


III. Высокомолекулярные соединения с сопряжённой системой связей: полинитрилы, полиацителены, полифенилены и т. д.

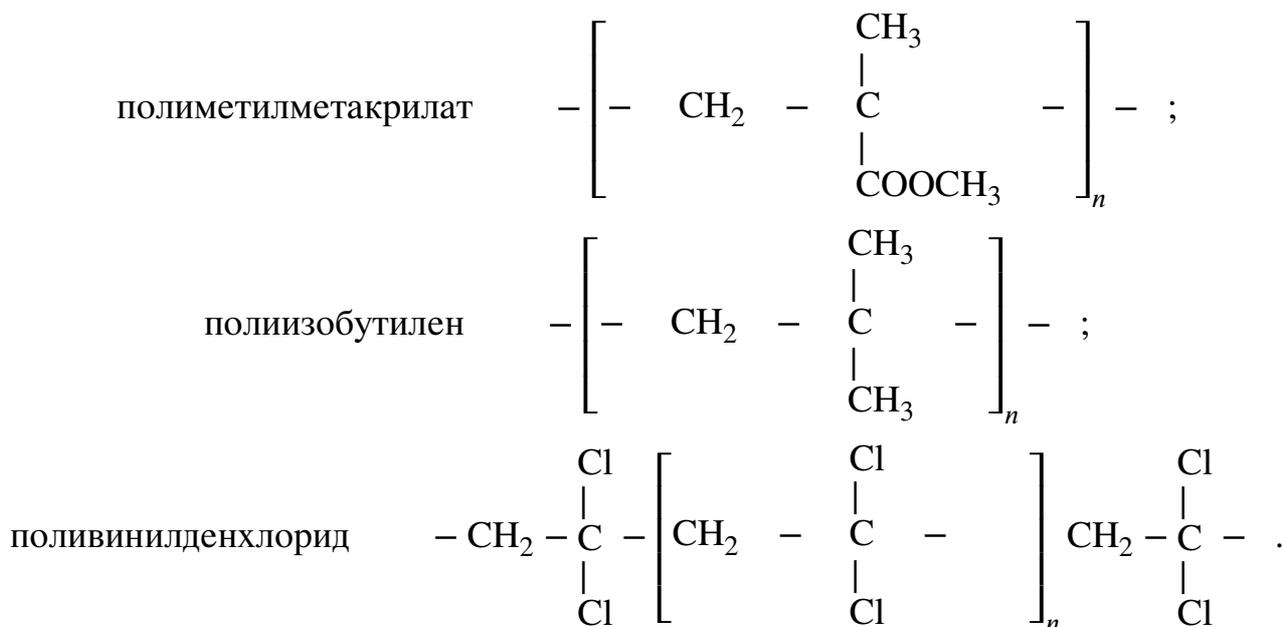


Одним из главных свойств полимеров является величина молекулы, поэтому представляют большой интерес для изучения те реакции от действия ионизирующего излучения на полимеры, которые могут как разрушать их молекулы, так и укрупнять. В 1953 г. Чарльсби и Лаутон предложили классификацию полимеров в зависимости от их отношения к ионизирующему излучению: структурирующиеся, в которых происходит образование поперечных связей, и деструктурирующие, в которых происходит деструкция (разрыв молекул):

— структурирующиеся:



— деструктурирующиеся:

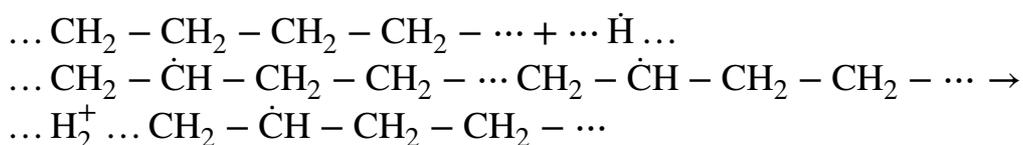


Следовательно, можно сделать вывод о связи изменения свойств полимера под действием излучения: деструктурируются полимеры, в которых рядом с атомом углерода атомы водорода заменены на иные группы; структурируются — когда каждый атом углерода цепи имеет хотя бы по одному атому водорода. Данная закономерность описывает поведение подавляющего большинства существующих полимеров.

Схема образования поперечных связей в полимере была представлена в 1958 году С. С. Медведевым с сотрудниками по мирному использованию атомной энергии на Женевской конференции, согласно которой на примере полиэтилена на первом этапе молекула теряет атом водорода



который имеет избыток энергии, достаточный для отрыва другого, находящегося поблизости, атома водорода



Итогом является возникновение находящихся в непосредственной близости друг от друга двух высокомолекулярных свободных радикалов и выделение молекулы водорода. В дальнейшем происходит сшивание путём соединения свободных радикалов. При этом процесс может окончиться на первом этапе в случае выделения атома водорода без избытка энергии; тогда свободные радикалы могут существовать весьма значительное время.

Несмотря на то, что выход реакции сшивания относительно мал (порядка нескольких молекул на 100 эВ), благодаря значительному размеру молекулы исходных полимеров достаточно небольшого числа связей для соединения молекул полимера в единую сетку, образующую гигантскую молекулу. Естественно, данный процесс сшивания приводит к изменению свойств полимеров.

Первое изменение влияет на растворимость полимера. Довольно много растворителей может растворять несшитый полимер вследствие относительно лёгкого разъединения полимерных цепей молекулами растворителей. Данный процесс перехода молекул полимера в раствор затрудняется при росте числа поперечных связей, при этом он прекращается, начиная с некоторого момента, определяемого дозами ионизирующего облучения, в зависимости от молекулярного веса полимера. Таким образом становится возможна приблизительная оценка дозы, полученная раствором. Так, облучённые дозой  $10^{19} \div 10^{20}$  эВ/г образцы полиэтилена полностью растворяются в горячем толуоле, как и необлучённые. Увеличение интенсивности облучения приводит к образованию некоторого нерастворённого материала, количество которого увеличивается пропорционально дозе облучения до некоторого момента, когда начинает увеличиваться вес образцов облучённого полимера после выдерживания, т. е. полимер набухает. При этом свободные несшитые участки между молекулами полимера заполняются молекулами растворителя. Дальнейшее облучение полимера приводит к такому сгущению его сетки, что уровень набухания полимера резко падает.

Вторым изменением свойств является проявление существующей пространственной сетки полимера при его нагреве до расплавления. Так, при температуре свыше 105–115 °С облучённый полимер представляет собой вязкую жидкость. В случае производства из этого полимера изделий они превращаются в бесформенную массу. Под действием излучения такой полимер приобретает свойство резины благодаря сшивке его молекул. В результате под действием механического нагружения исключается скольжение молекул полимера друг относительно друга благодаря поперечным связям. Так, при растяжении, подобно пружине, происходит распрямление отдельных звеньев сетки и наблюдается удлинение изделий из этого полимера вместо растекания. При исчезновении механического нагружения происходит восстановление прежней формы сетки. В случае значительной густоты сетки поведение полимера под действием внешнего нагружения может ухудшаться, т. к. в этом случае исключается возможность распрямления отдельных звеньев и тогда даже при относительно небольшом механическом нагружении изделие теряет эластичность и способность к растяжению, становится хрупким.

В технике широко применяется процесс вулканизации, т. е. сшивание полимеров, при котором создаётся пространственная сетка. Для этого, как правило, используются химические методы, при которых вводят в полимер некоторые вещества (серу, органические перекисные соединения и т. д.) с последующим подогревом. Происходит связывание молекул полимера присоединением введённых веществ к двум соседним его молекулам. Данная реакция возможна только в случае, когда в составе молекул полимера имеются группы, способные реагировать с вулканизирующими веществами. При отсутствии подобных групп в полимере, например в полиэтилене, становится весьма затруднительно проведение вулканизации химическими приёмами. В таком случае становится очевидным преимущество проведения радиационной

вулканизации, применимой к весьма широкому кругу вулканизирующих материалов.

В настоящее время радиационная вулканизация находит применение в практике. Так, изделия из полиэтилена, задача которых работать в условиях повышенных температур, предварительно облучают. В 1959 году в США на одном из предприятий было произведено 400 тонн плёнки из облучённого полиэтилена. В результате при незначительных затратах, по сравнению с плёнкой из обычного полиэтилена, удалось добиться увеличения прочности плёнки в 5 раз, а способности к растяжению — в 2 раза. При этом подобные изделия из облучённого полиэтилена способны работать при температурных режимах до 250 °С. В. Л. Карпов с сотрудниками предложили использовать облучённый полиэтилен для изготовления изоляции проводов, эксплуатируемых в условиях повышенной температуры. Если же сравнивать облучённый полиэтилен и необлучённый в условиях обычных температур, то сшитый полимер, по сравнению с обычным, обладает повышенной механической прочностью.

В мировой практике активно используются в медицине полимерные материалы, к примеру, для использования в качестве заменителей костей биоактивный нано-керамический армированный полимер изучается с начала 1980-х годов. Одним из главных показателей создаваемого материала для замены кости является его жёсткость. Так, на ремоделировании кости сказываются условия приложения усилий на саму кость; жёсткость импланта сказывается на переносимые с импланта усилия на кости. Для исключения возможности развития при использовании имплантов остеопороза необходимо использовать биосовместимые материалы, по свойствам, сходным со свойствами естественной кости.

Как говорилось ранее, ПЭВП в медицине является одним из наиболее распространённых материалов в качестве заменителей костей и ортопедических протезов, при этом на возможность его применения сказываются реология, низкий модуль упругости и низкая биологическая активность.

Для получения композитной полимерной матрицы можно применять различные керамические наночастицы; данную матрицу можно использовать в качестве альтернативы металлам для заменителей костей и ортопедических имплантов. В качестве наполнителей использованы различные виды керамических материалов таких, как углеродные нановолокна, наноглины и ГА. ГА положительно сказывается на композитной жёсткости и биологической активности, в то время, как ПВП обеспечивает прочность. Вязкоупругое поведение ПВП легко описывается во времени под действием нагрузки и позволяет сделать прогноз о длительной прочности материала. Таким образом, использование наночастиц ГА в качестве армирующих элементов полимерного материала благоприятно сказывается и на биологической активности, и на реологическом поведении ПВП.

Гамма-излучение представляет собой один из часто используемых способов стерилизации в медицине многих лекарственных препаратов, т. к. оно разлагает молекулы ДНК любых живых организмов. Типичная доза облучения

составляет от 25 до 70 кГр. Особенностью данного процесса стерилизации является возможное изменение в молекулярной структуре полимера: гамма-излучение отрицательно влияет на плотность сцепления длинных молекулярных цепей, а также на концентрацию связывающих молекул. При этом стерилизация благоприятно сказывается на процессе сшивки и свойствах композита. Р. Кейн с коллегами занимались изучением влияния гидроксиапатита (ГА) на поведение армированного полиэтилена высокой плотности, где предположили, что нитевидные ГА благоприятно сказываются на усталостной долговечности армированных полимеров.

На примере результатов экспериментальных данных работы<sup>1</sup> определим и проведём анализ изменения упругих и реологических параметров ПЭВП с учётом добавок из ПЭВП и облучением материала до 70 кГр (сила облучения увеличивалась на 5 кГр каждый час).

Экспериментальные изыскания на релаксацию напряжений чистого ПЭВП и его нанокомпозитных образцов проводили при температуре  $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$  и постоянной деформации стержня  $\varepsilon = 3\%$ , при этом наблюдалось снижение уровня напряжения в течение 3 часов.

Результаты определения экспериментальных данных релаксации напряжений облучённого и необлучённого ПЭВП и его нанокомпозитов, содержащих 30 % ГА приведены на рис. 8.

Анализируя полученные кривые, делаем вывод, что релаксация нанокомпозитов с ГА и облучённых образцов оказывается более выраженной, чем образцы из чистого ПЭВП. Также уровень начального напряжения и напряжения в конце процесса релаксации имеют более высокие значения по сравнению с необлучёнными образцами. Рост напряжения в начальный момент времени ( $t = 0$ ) объясняется присутствием наночастиц ГА в полимерной матрице ПЭВП и, как следствие, изменением жёсткости. На основе анализа рис. 8 установили, что релаксация напряжения ПЭВП с добавками ГА и облучением через 3 часа проведения испытания составила 37 % от его значения в начальный момент времени, при этом снижение напряжения для ПЭВП без добавок и облучения уменьшилось всего на 24 % от начального значения. Нанокомпозит ПЭВП с ГА способен больше понижать напряжения в заменителях кости со временем, что положительно сказывается на его работу совместно с организмом при протезировании.

Следующим шагом стало определение упругих и реологических постоянных ПЭВП. Выкладки основаны на методике, приведённой в главе 2, при этом будут использоваться некоторые отличия в методике определения скорости изменения напряжения от времени.

За основу анализа и последующего определения упругих и реологических параметров ПЭВП и его нанокомпозита был использован график, представленный на рис. 8.

---

<sup>1</sup> Alothman O. Y. et al. Thermal, creep-recovery and viscoelastic behavior of high-density polyethylene/hydroxyapatite nano particles for bone substitutes: effects of gamma radiation // Biomedical engineering online. – 2014. – Т. 13. – №. 1. – С. 125.

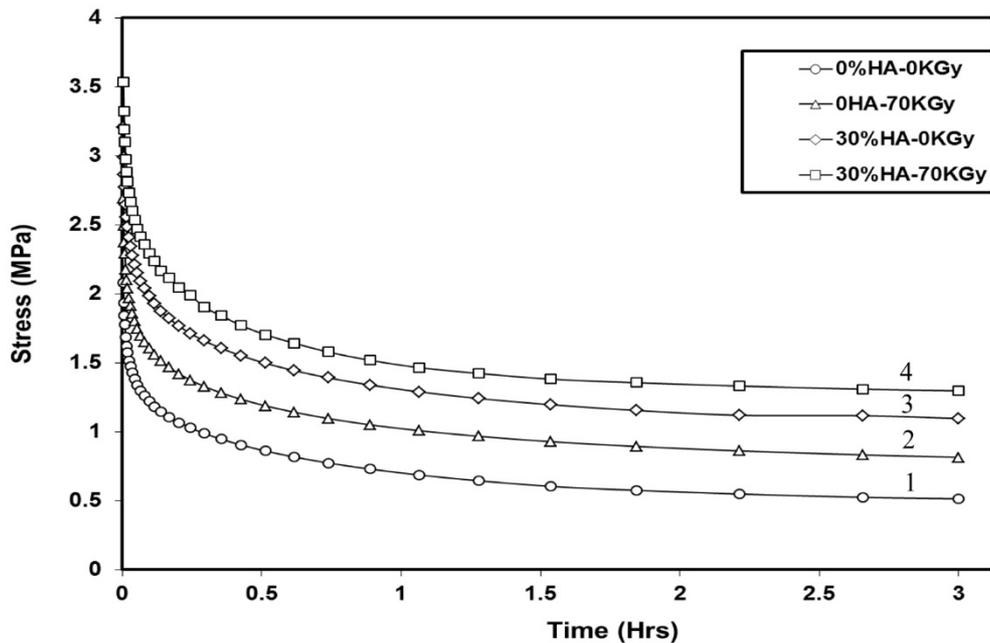


Рис. 8. Релаксация напряжений ПЭВП: 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

Отличие от методики, представленной в главе 2, начинается с этапа определения скорости изменения функции напряжений во времени. Однако вместо метода неопределённых коэффициентов будет использован другой подход с применением функции **polyfit** из программного комплекса Matlab, которая имеет вид  $p = \text{polyfit}(x, y, n)$  и находит коэффициенты полинома  $p(x)$  степени  $n$ , который аппроксимирует функцию  $y(x)$  с применением метода наименьших квадратов. Выходом является строка  $p$  длины  $n + 1$ , содержащая коэффициенты аппроксимирующего полинома:

$$p(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \dots + p_n x + p_{n+1}.$$

Происходит подбор коэффициентов аппроксимирующего полинома по трём точкам (квадратный полином или полином 2-й степени), который имеет вид с учётом исходных функций

$$\sigma_i = p_1 t^2 + p_2 t + p_3. \quad (12)$$

Для определения искомой производной функции в каждой точке, произведём дифференцирование выражения (12) по времени:

$$\sigma'_i = 2p_1 t + p_2. \quad (13)$$

Здесь штрихом «'» обозначаем производную по времени.

Использование функции **polyfit** позволяет достаточно быстро и удобно получить необходимые коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$ , затем при помощи выражения (13) — определить скорость роста функции напряжения во времени.

Следующий ход действий не отличается от приведённого в главе 2. Результаты определения упругих и реологических параметров нелинейного уравнения Максвелла–Гуревича показаны в табл. 1.

Табл. 1. Упругие и высокоэластические параметры ПЭВП

ПЭВП	$E$ , МПа	$E_{\infty}$ , МПа	$m^*$ , МПа	$\eta_0^*$ , МПа·ч
0 % ГА, 0 кГр	693.9890	228.8515	5.5445	1113.0
0 % ГА, 70 кГр	897.5469	388.1827	6.4429	1734.4
30 % ГА, 0 кГр	1069.3	556.7567	8.0948	1832.5
30 % ГА, 70 кГр	1178.4	684.5894	10.1390	1768.4

Для определения переменных при промежуточных значениях доли ГА и уровня облучения, производится интерполяция при помощи полинома, имеющего вид:

$$f(x, y) = a + bx + cy + dxу.$$

Тогда выражения физико-механических параметров от доли ГА и уровня облучения  $\Phi$  имеют вид (графики представлены на рис. 9).

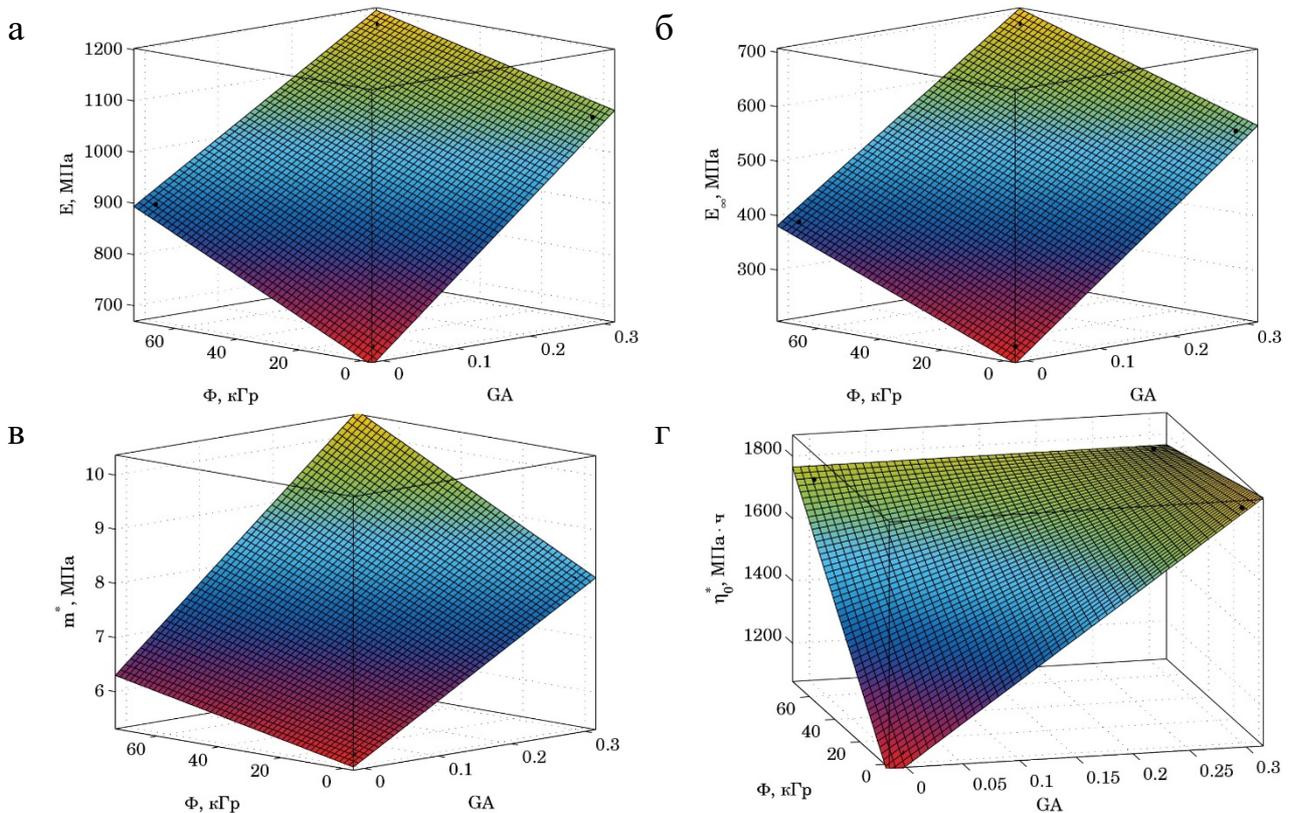


Рис. 9. Зависимость от доли ГА (GA) и уровня облучения  $\Phi$ : а — модуля упругости  $E$ ; б — модуля высокоэластичности  $E_{\infty}$ ; в — модуля скорости  $m^*$ ; г — коэффициента начальной релаксационной вязкости  $\eta_0^*$

Физико-механические параметры ПЭВП в этом случае описываются выражениями:

$$\begin{aligned}
 E(\text{ГА}, \Phi) &= 694 + 1251\text{ГА} + 2.908\Phi - 4.498\text{ГА}\Phi \text{ [МПа]}; \\
 E_{\infty}(\text{ГА}, \Phi) &= 228.9 + 1093\text{ГА} + 2.276\Phi - 1.5\text{ГА}\Phi \text{ [МПа]}; \\
 m^*(\text{ГА}, \Phi) &= 5.545 + 8.501\text{ГА} + 0.01283\Phi + 0.05456\text{ГА}\Phi \text{ [МПа]}; \\
 \eta_0^*(\text{ГА}, \Phi) &= 1113 + 2398\text{ГА} + 8.877\Phi - 32.64\text{ГА}\Phi \text{ [МПа} \cdot \text{ч]}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Анализируя выражения (14), а также графики на рис. 9, устанавливаем, что с ростом доли ГА и уровня излучения все упругие и реологические параметры увеличиваются, некоторое исключение составляет коэффициент начальной релаксационной вязкости, который при одновременном введении ГА и облучением материала имеет величину примерно такую же, как только при введении ГА, или только при облучении ПЭВП.

Для оценки достоверности полученных уравнений (14), на рис. 10 приводится сопоставление опытных графиков (пунктирные линии) релаксации напряжений с теоретическими (сплошные линии) на основании выражений (14). Совпадение опытных и кривых линий очень хорошее, а небольшие расхождения объясняются неточностью обработки данных, полученных из анализа рисунков кривых релаксации напряжений.

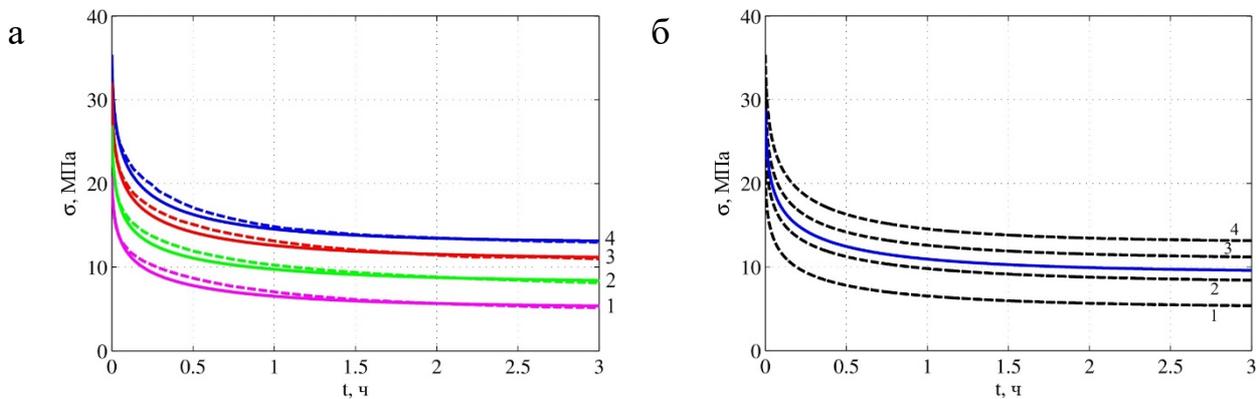


Рис. 10. Результаты сопоставления (а) экспериментальных кривых (пунктирная линия) с теоретическими (сплошная линия, на основании определённых упругих и реологических параметров) и (б) расчёт с промежуточными значениями ГА и уровня облучения: 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр; сплошная синяя линия — ГА = 15 %,  $\phi = 35$  кГр

Результат расчёта релаксации напряжений облучённого полиэтилена приведен на рис. 10, б. Анализ кривых показывает, что по сравнению с полиэтиленом без добавок, но подвергшегося облучению, полимер с половинной дозой добавок и половинной дозой облучения показывает лучшие свойства, но хуже по сравнению с необлучённым полимером, но с полной порцией добавки ГА.

Таким образом появляется возможность при анализе опытных данных релаксации напряжений прогнозирования свойств полимерных материалов при промежуточных значениях параметров. Несомненно, данная возможность ведёт к значительной экономии материальных ресурсов и человеко часов на проведение эксперимента и его последующего анализа.

Следующим этапом для оценки влияния на напряжённо-деформированное состояние полимерного тела различных сочетаний добавок и ионизирующего излучения, рассматривается задача расчёта цилиндрического тела,

претерпевающего сжатие (постановка задачи и расчётная схема приводятся на рис. 11).

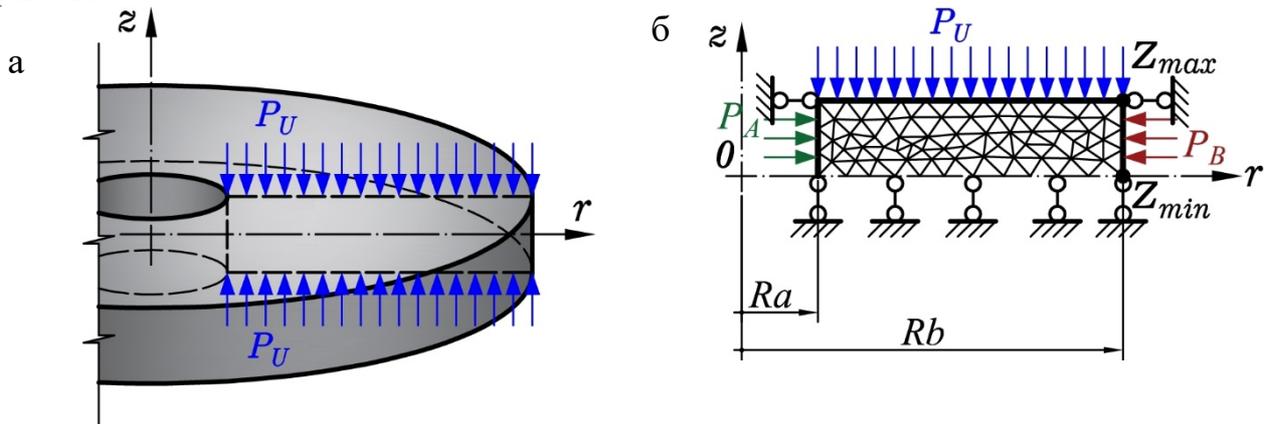


Рис. 11. Цилиндрическое сжимаемое тело конечной длины: постановка задачи (а) и расчётная схема (б)

Высота тела  $h = 1 \text{ см} = 0.010 \text{ м}$ . Вследствие того, что тело симметрично относительно горизонтальной оси, достаточно рассмотрения только половины, в результате чего исходные данные принимают следующий вид: давление на внутренней грани цилиндра  $P_A = 0 \text{ МПа}$ ; давление на внешней грани цилиндра  $P_B = 0 \text{ МПа}$ ; давление на верхнем торце цилиндра  $P_U = -10 \text{ МПа}$  (минус — сжатие); внутренний радиус  $R_a = 0.010 \text{ м}$ ; внешний радиус  $R_b = 0.050 \text{ м}$ ; координата нижней точки  $Z_{min} = 0 \text{ м}$ ; координата верхней точки  $Z_{max} = \frac{h}{2} = 0.005 \text{ м}$ ; число интервалов разбиения по времени 20 шт; предел времени, до которого происходит расчёт 10 ч. Результаты расчёта задачи представлены на рис. 12 и 13.

Графики с подробным распределением напряжений в теле приведены в диссертационной работе.

При анализе изменения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  в конце расчётного периода по сравнению с начальным видно, что их максимальный и минимальный уровень увеличивается в 2–2.5 раз.

Однако в любом теле можно выделить элементарный объём таким образом, когда на гранях этого объёма нормальные напряжения будут достигать своих максимальных значений, а касательные будут равны нулю. Было принято решение провести дополнительно анализ изменения главных напряжений максимального  $\sigma_1$  и минимального  $\sigma_3$ .

Были построены графики изменения максимальных и минимальных значения напряжений во времени (рис. 12 и 13). Отчётливо видно изменение уровня напряжений с течением времени в 2–2.5 раз. Исключение составляют главные напряжения, они имеют значительные величины в начальный момент времени и увеличиваются не более, чем в 1.5 раза к концу расчётного периода.

Отличие между базовыми напряжениями (радиальным, окружным, осевым и касательным) от главных заключается и в разнице проявления реологических процессов. Так, при отсутствии добавок и наличии ионизирующего излучения, базовые напряжения стабилизировались через 7 часов с момента приложения

нагрузки, а если проводить анализ изменения главных напряжений, они не стабилизировались к 10 часам, т. е. к концу расчётного периода.

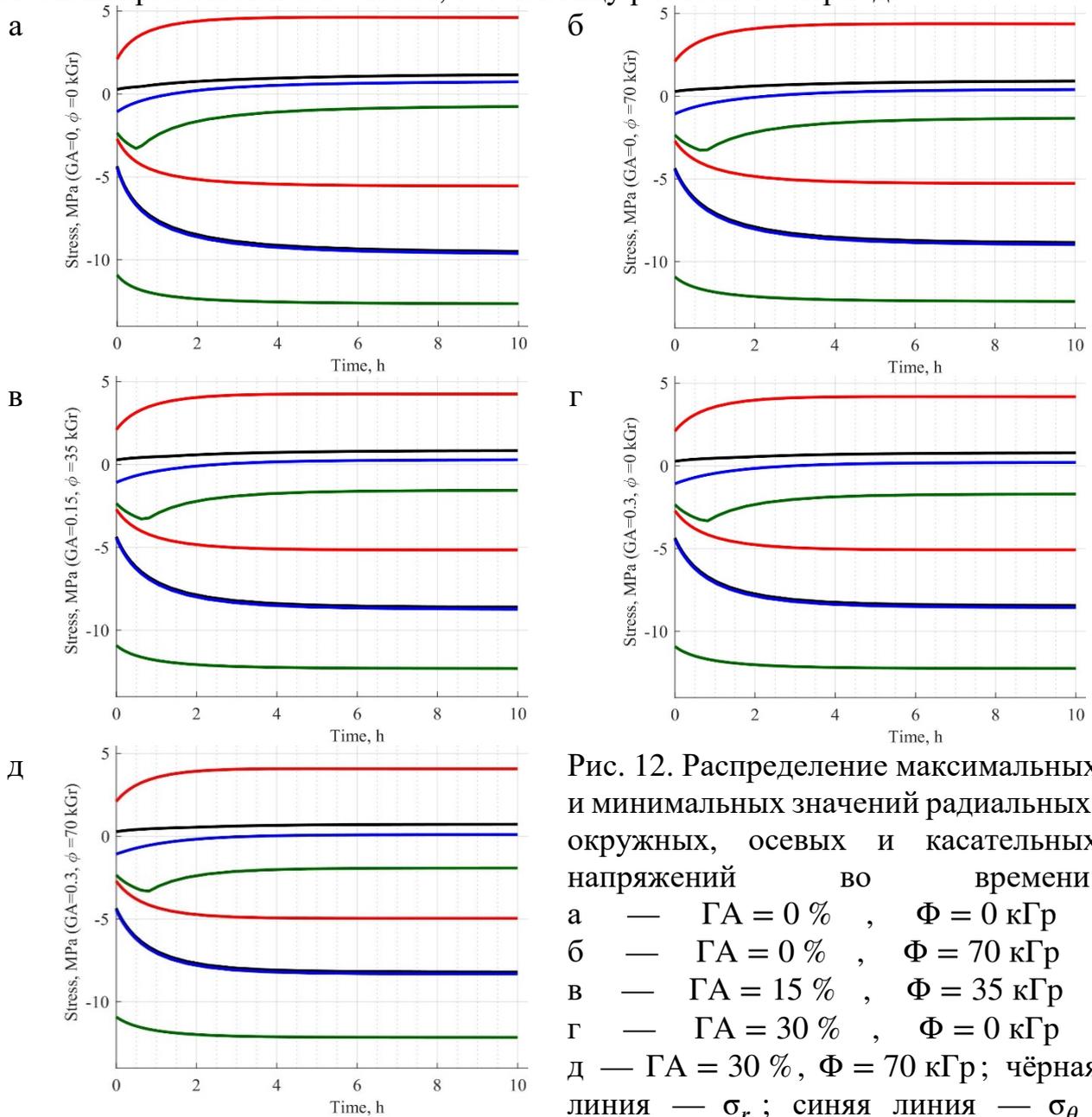


Рис. 12. Распределение максимальных и минимальных значений радиальных, окружных, осевых и касательных напряжений во времени:

В случае наличия максимальных добавок ГА в полимере и облучением его ионизирующим излучением, уровень и базовых, и главных напряжений уменьшается на  $\approx 10\%$ , по сравнению с нетронутым образцом полимера. Кроме того, стабилизация базовых напряжений наблюдается через примерно 4 часа от начала расчёта, главных — через 6 часов. Образец, в который был добавлен ГА и облучённый в половинной дозе, показывал примерно средние свойства между «чистым» образцом и образцом, с полным добавлением ГА и полным уровнем ионизирующего излучения.

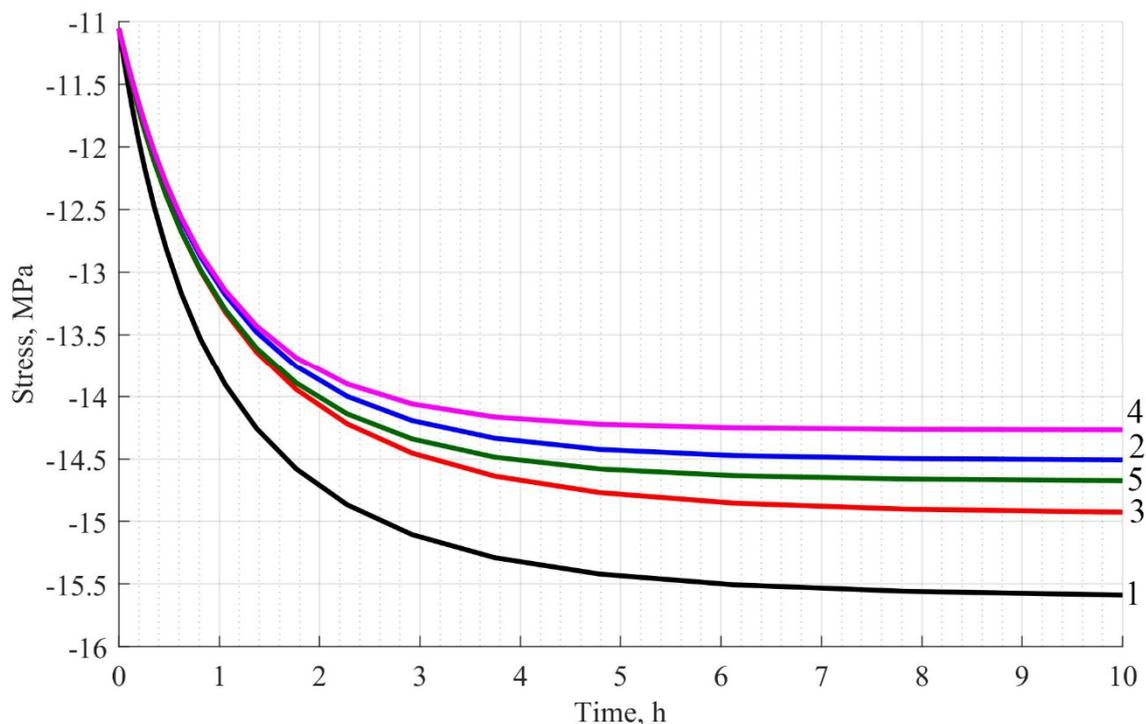


Рис. 13. Изменение во времени наименьших главных (сжимающих) напряжений  $\sigma_3$  в теле с течением времени: 1 — ГА = 0 %,  $\Phi = 0$  кГр; 2 — ГА = 30 %,  $\Phi = 0$  кГр; 3 — ГА = 0 %,  $\Phi = 70$  кГр; 4 — ГА = 30 %,  $\Phi = 70$  кГр; 5 — ГА = 15 %,  $\Phi = 35$  кГр

### Заключение

В результате проделанных исследований предложена математическая модель определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел на основании нелинейного обобщённого уравнения Максвелла-Гуревича и с учётом неоднородности материала, вызванной температурным полем. Путём непосредственного конечно-элементного моделирования произведена оценка длительной прочности адгезионного соединения.

На основании приведённых результатов можно сделать следующие выводы:

1. Усовершенствовано научное направление, связанное с методикой расчёта полимерных тел на прочность в термовязкоупругой постановке.

2. Уточнено аппроксимирующее выражение функционала температурного поля во времени.

3. Разработан новый 4-узловой конечный элемент при помощи численно-аналитического решения заданной аппроксимирующей функции, учитывающий температурное воздействие и реологию полимера.

4. Разработана и реализована в виде пакета прикладных программ для программного комплекса MatLab методика расчёта гомогенных и гетерогенных систем в условиях термовязкоупругости при помощи разработанного ранее 4-узлового конечного элемента.

5. Уточнена модель расчёта длительной прочности адгезионного соединения при помощи разработанного 4-узлового конечного элемента.

6. Доказана достоверность расчёта адгезионного соединения путем моделирования в нелинеаризированной и линеаризированной постановках.

7. Доказана необходимость использования полноценного моделирования конечными элементами адгезионного соединения вместо использования таких методов, как метод пограничного слоя.

8. Доказана необходимость использования комплексного подхода к расчёту конструкций и их элементов из полимерных материалов, заключающегося не только в корректном моделировании конечного-элементной сетки по телу, но и во времени, а также использование моделей, учитывающих наличие обратимых деформаций ползучести с определением физико-механических параметров исследуемого полимера.

9. Предложена оптимизация расчёта конструкций из полимерных материалов, заключающаяся в оптимизации: шага времени расчёта, шага механической сетки, принятия положения центра тяжести КЭ.

10. Разработана методика определения физико-механических параметров полимера как в зависимости от температуры, так и от содержания добавок и ионизирующего излучения. При этом физико-механические параметры полимера являются функцией от двух переменных.

11. Доказано, что для полноценной оценки напряжённо-деформированного состояний конструкций из полимера необходимо проведение испытаний с последующим определением физико-механических параметров для данных условий с учётом внешних факторов (температурное поле, химическая усадка, ионизирующее излучение и т.д.). Параметры полимера, полученные при нормальных условиях, могут быть использованы для определения напряжённо-деформированного только в приближённых инженерных расчётах.

**Основное содержание работы изложено в следующих публикациях:**

**Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, или входящих в международные реферативные базы Scopus/Web of Science:**

1. Языев, Б. М. Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра (часть 1) [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Пластические массы. — 2007. — № 9. — С. 36–38.

2. Языев, Б. М. Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра (часть 2) [Текст] / Б. М. Языев, С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Пластические массы. — 2007. — № 12. — С. 44–46.

3. Литвинов, С. В. Ползучесть полимерного цилиндра, находящегося в стадии охлаждения [Текст] / С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16. — Вып. 6. — С. 1089.

4. Литвинов, С. В. Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учетом нелинейной ползучести [Текст] / С. В. Литвинов, С. Б. Языев, С. Б. Языева // Вестник МГСУ. — 2010. — № 1. — С. 128–132.

5. **Литвинов, С. В.** Расчет на устойчивость полимерных стержней с учетом деформаций ползучести и начальных несовершенств [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов**, Е. С. Клименко, И. И. Кулинич, С. Б. Языева // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 2. — URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/418> (дата обращения: 19.12.2018).

6. **Литвинов, С. В.** Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ–10 при различных вариантах закрепления [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов**, Е. С. Клименко, И. И. Кулинич, С. Б. Языева, Е. А. Торлина // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 2. — URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2011/415> (дата обращения: 19.12.2018).

7. **Литвинов, С. В.** Устойчивость полимерных стержней при различных вариантах закрепления [Текст] / **С. В. Литвинов**, Е. С. Елименко, И. И. Кулинич, С. Б. Языева // Вестник МГСУ. — 2011. — № 2. — Т. 2. — С. 153–157.

8. **Литвинов, С. В.** Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов**, Б. М. Языев, А. Н. Бескопыльный // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 4. — URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n4y2011/704> (дата обращения: 19.12.2018).

9. **Литвинов, С. В.** Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ–10 при начальной погиби стержня в виде S–образной кривой [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов**, Б. М. Языев, А. Н. Бескопыльный, И. В. Ананьев // Инженер. вестник Дона. — 2012. — № 1. — URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/723> (дата обращения: 19.12.2018).

10. Козельская, М. Ю. Расчёт на устойчивость сжатых полимерных стержней с учётом температурных воздействий и высокоэластических деформаций [Электронный ресурс] / М. Ю. Козельская, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Науч.–техн. вестник Поволжья. — 2013. — № 4. — С. 190–194. — URL: [http://ntvp.ru/files/NTVP\\_4\\_2013.php](http://ntvp.ru/files/NTVP_4_2013.php) (дата обращения: 19.12.2018).

11. Козельская, М. Ю. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести [Электронный ресурс] / М. Ю. Козельская, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 2. — URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714> (дата обращения: 19.12.2018).

12. Языев, Б. М. Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей [Электронный ресурс] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов**, Ю. Ф. Козельский // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 2. — URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1616> (дата обращения: 19.12.2018).

13. Языев, Б. М. Построение модели равнопрочного толстостенного цилиндра при силовых и температурных воздействиях [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов**, А. А. Аваков // Научное обозрение. — 2014. — № 9, ч. 3. — С. 863–866.

14. Никора, Н. И. Определение длительных критических нагрузок для сжатых полимерных стержней при нелинейной ползучести [Электронный ресурс] / Н. И. Никора, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Инженер. вестник Дона.

— 2015. — № 1, ч. 2. — URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2796> (дата обращения: 19.12.2018).

15. Дудник, А. Е. Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости [Электронный ресурс] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов**, А. С. Денего // Инженер. вестник Дона. — 2015. — № 2, ч. 2. — URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063> (дата обращения: 19.12.2018).

16. Дудник, А. Е. Нестационарная задача теплопроводности для электрического кабеля с ПВХ изоляцией [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2015. — № 6. — С. 49–51.

17. **Литвинов, С. В.** Напряженно-деформированное состояние многослойных полимерных труб с учетом ползучести материала [Текст] / **С. В. Литвинов**, Г. М. Данилова-Волковская, А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко // Современ. наука и инновации. — 2015. — № 3 (11). — С. 71–78.

18. **Литвинов, С. В.** Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов**, Л. И. Труш, А. Е. Дудник // Инженер. вестник Дона. — 2016. — № 2. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560> (дата обращения: 19.12.2018).

19. Дудник, А. Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Пластические массы. — 2016. — № 1-2. — С. 30–33.

20. **Litvinov, S. V.** Longitudinal bending of polymer rods with account taken of creep strains and initial imperfections [Текст] / **S. V. Litvinov**, E. S. Klimenko, I. I. Kulinich, S. B. Yazyeva // International Polymer Science and Technology. — 2015. — Т. 42. — № 2. — С. 23–25.

21. **Litvinov, S. V.** Flat Axisymmetrical Problem of Thermal Creepage for Thick-Walled Cylinder Made Of Recyclable PVC [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov**, L. I. Trush, S. B. Yazyev // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — С. 1686–1693. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816314734> (дата обращения: 19.12.2018).

22. **Litvinov, S. V.** Some features in the definition of the temperature field in axisymmetric problems [Текст] / **S. V. Litvinov**, L. I. Trush, A. A. Avakov // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). — 2017. — С. 1–5.

23. **Litvinov, S. V.** Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov**, A. N. Beskopylny, L. I. Trush, S. B. Yazyev // MATEC Web of Conferences. — 2017. — Т. 106 (2017). — С. 04013. — URL: [https://www.matec-confer-en-ces.org/articles/matec-conf/abs/2017/20/matecconf\\_spbw2017\\_04013/matecconf\\_spbw2017\\_04013.html](https://www.matec-confer-en-ces.org/articles/matec-conf/abs/2017/20/matecconf_spbw2017_04013/matecconf_spbw2017_04013.html) (дата обращения: 19.12.2018).

24. Dudnik, A. E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account [Электронный ресурс] / А. Е. Dudnik, А. С. Chepurnenko, **S. V. Litvinov** // International Polymer Science and Technology.

— 2017. — Т. 44 (1). — С. 30–33. — URL: <http://www.polymerjournals.com/journals.asp?Search=YES&JournalID=102975&JournalType=ipsat> (дата обращения: 19.12.2018).

25. Yazyev, S. Energy method in solving the problems of stability for a viscoelastic polymer rods [Электронный ресурс] / S. Yazyev, M. Kozelskaya, G. Strelnikov, **S. Litvinov** // MATEC Web of Conferences. ICMТМTE 2017. — Т. 129 (2017). — С. 05010. — URL: [https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/43/matecconf\\_icmtmte2017\\_05010.pdf](https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/43/matecconf_icmtmte2017_05010.pdf) (дата обращения: 19.12.2018).

26. Trush, L. Optimization of the Solution of a Plane Stress Problem of a Polymeric Cylindrical Object in Thermoviscoelastic Statement [Электронный ресурс] / L. Trush, **S. Litvinov**, N. Zakieva, S. Bayramukov // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent Systems and Computing. — Т. 692. — С. 885–893. — URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1\\_95](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_95) (дата обращения: 19.12.2018).

27. **Litvinov, S.** Forecasting the Strength of an Adhesive Bond Over a Long Period of Time [Электронный ресурс] / **S. Litvinov**, A. Zhuravlev, S. Bajramukov, S. Yazyev // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent Systems and Computing. — Т. 692. — С. 902–907. — URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1\\_97](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_97) (дата обращения: 19.12.2018).

28. **Litvinov, S. V.** Determination of physic and mechanical parameters of high-density polyethylene based on relaxation curves due to the presence of hydroxyapatite and ionizing radiation [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov**, S. B. Yazyev, D. A. Vysokovskiy // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2018. — Т. 196. — С. 01013. — URL: [https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2018/55/matecconf\\_rsp2018\\_01013/matecconf\\_rsp2018\\_01013.html](https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2018/55/matecconf_rsp2018_01013/matecconf_rsp2018_01013.html) (дата обращения: 19.12.2018).

29. **Litvinov, S. V.** Buckling of glass reinforced plastic rods of variable rigidity [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov**, S. B. Yazyev, I. I. Rudchenko, G. S. Molotkov // Materials Science Forum. — 2018. — Т. 931. — С. 133–138. — URL: <https://www.scientific.net/MSF.931.133> (дата обращения: 19.12.2018).

30. **Litvinov, S. V.** Determination of the Stress-Strain State of a Rotating Polymer Body [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov**, L. I. trush, S. B. Yazyev // Materials Science Forum. — 2018. — Т. 935. — С. 121–126. — URL: <https://www.scientific.net/MSF.935.121> (дата обращения: 19.12.2018).

31. **Litvinov, S. V.** Effecting of Modified HDPE Composition on the Stress-Strain State of Constructions / **S. V. Litvinov**, B. M. Yazyev, M. S. Turko // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2018. — Т. 463. — № 4. — С. 042063. — URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/463/4/042063/meta> (дата обращения: 19.12.2018).

32. **Литвинов, С. В.** Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации / **С. В. Литвинов**, Л. И. Труш, А. А. Савченко, С. Б. Языев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019.

— Т. 62. — № 5. — С. 78–83. — URL: <http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1261/783> (дата обращения: 22.05.2019).

### Статьи в других изданиях:

1. Языев, Б. М. Плоскодеформированное и плосконапряженное состояние непрерывно неоднородного цилиндра под воздействием температурного поля [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов** // Сборник трудов / Рост. гос. строит. ун-т. — Ростов н/Д, 2006. — С. 25–27.
2. Языев, Б. М. Задача термоупругости для многослойного неоднородного цилиндра [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов** // Строительство–2007: материалы Междунар. науч.-практ. конф. / Рост. гос. строит. ун-т. — Ростов н/Д, 2007. — С. 86–87.
3. **Литвинов, С. В.** Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра [Текст] / **С. В. Литвинов** // материалы III междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2007. — С. 27–32.
4. Языев, Б. М. Задача термоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов** // материалы IV междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2008. — С. 337–342.
5. Языев, С. Б. Моделирование вязкоупругого поведения жестких полимеров при циклическом изменении температуры [Текст] / С. Б. Языев, С. Б. Языева, **С. В. Литвинов** // Строительство–2009: материалы юбилейной Междунар. науч.-практ. конф. / Рост. гос. строит. ун-т. — Ростов н/Д., 2009. — С. 167.
6. Языев, С. Б. Продольный изгиб полимерного стержня в условиях вязкоупругости [Текст] / С. Б. Языев, С. Б. Языева, **С. В. Литвинов** // материалы V междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2009. — С. 16–17.
7. Кулинич, И. И. Продольный изгиб полимерного стержня с учетом начальных несовершенств [Текст] / И. И. Кулинич, Е. С. Клименко, С. Б. Языев, **С. В. Литвинов** // Строительство–2011: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2011. — С. 159–161.
8. Козельский, Ю. Ф. Некоторые вопросы устойчивости полимерных стержней с учётом термомеханических нагрузок и возмущающих факторов [Текст] / Ю. Ф. Козельский, **С. В. Литвинов** // Строительство–2012: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2012. — С. 123–124.
9. Языев, Б. М. Расчёт на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при воздействии температуры и начальной погиби стержня в виде S-образной кривой [Текст] / Б. М. Языев, И. И. Кулинич, **С. В. Литвинов**, А. М. Кармоков, Б. С. Карамузов, М. М. Ошхунов // Новые полимерные композитные материалы: материалы VIII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию выдающегося учёного России в области высокомолекуляр. соединений, заслуж. деятеля науки Рос. Федерации и Кабардино–Балкар. республики Микитаева А. К. — Нальчик: КБГУ, 2012. — С. 236–239.
10. Чепурненко, А. С. Расчёт на устойчивость полимерных стержней при изменении температуры в поперечном сечении [Текст] / А. С. Чепурненко,

**С. В. Литвинов**, А. А. Тараева // Строительство–2013: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2013. — С. 194–195.

11. Чепурненко, А. С. Расчёт стержней на продольно-поперечный изгиб с учётом деформаций ползучести и начальных несовершенств [Текст] / А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов**, М. А. Филенко // Строительство–2013: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2013. — С. 195.

12. **Литвинов, С. В.** Модели равнопрочного толстостенного цилиндра при термосиловых воздействиях [Текст] / **С. В. Литвинов**, А. С. Чепурненко, А. А. Аваков, С. Б. Языев // Строительство–2014: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. — С. 204–205.

13. **Литвинов, С. В.** Равнопрочные и равнонапряжённые конструкции: преимущества и недостатки [Текст] / **С. В. Литвинов**, А. С. Чепурненко, Л. И. Труш // Строительство–2014: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. — С. 189–190.

14. **Литвинов, С. В.** Прогнозирование прочности адгезионного соединения в течение длительного периода времени [Текст] / **С. В. Литвинов**, Л. И. Труш, Е. Н. Пищеренко, А. А. Аваков // материалы XIII междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2017. — С. 162–167.

15. Труш, Л. И. Оптимизация решения плоской задачи полимерного цилиндрического тела в термовязкоупругой постановке [Текст] / Л. И. Труш, **С. В. Литвинов**, Е. Н. Пищеренко, А. Е. Дудник // материалы XIII междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2017. — С. 246–253.

16. **Литвинов, С. В.** Напряжённо-деформированное состояние тел вращения в вязкоупругой постановке [Текст] / **С. В. Литвинов**, Л. И. Труш, А. А. Аваков // Строительство и архитектура — 2017: материалы науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: ДГТУ, 2017. — С. 186–194.

17. **Литвинов, С. В.** Определение напряжённо-деформированного состояния вращающегося полимерного тела [Текст] / **С. В. Литвинов**, Л. И. Труш, А. А. Савченко, Б. М. Языев // Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения [Текст]: материалы XIV междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2018. — С. 112–117.

#### **Авторские свидетельства на программу для ЭВМ:**

1. Определение напряжённо-деформированного состояния бетонных тел цилиндрической формы под действием физических полей и механического давления: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015611914 / Языев Б. М., **Литвинов С. В.**, Пучков Е. В., Чепурненко А. С.; Рост. гос. строит. ун-т. — №2014662825; заявл. 11.12.2014; зарег. 09.02.2015.

2. Оптимизация толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, испытывающих температурное и силовое воздействие: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015611906 / Языев Б. М., **Литвинов С. В.**, Пучков Е. В., Чепурненко А. С.; Рост. гос. строит. ун-т. — № 2014662800; заявл. 10.12.2014; зарег. 09.02.2015.

3. Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616951 / **Литвинов С. В.**, Дудник А. Е., Аваков А. А., Труш Л. И.; Дон. гос. техн. ун-т. — №2018614101; заявл. 24.04.2018; зарег. 09.06.2018.