

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

Дудник Анастасия Евгеньевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ  
НАПОРНЫХ ТРУБ ИЗ ПОЛИОЛЕФИНОВ**

02.00.06 — Высокомолекулярные соединения

Диссертация  
на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель  
д.т.н., проф.  
Б. М. Языев

Ростов-на-Дону — 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Состояние вопроса. Постановка задачи .....</b>	<b>14</b>
1.1 Современные полимерные материалы для внутренних трубопроводов систем холодного и горячего водоснабжения и отопления.....	14
1.2 Краткая характеристика и методы исследований полимерных труб РЕХ....	26
1.3 Основные уравнения механики упругорелаксирующей полимерной среды. Обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича .....	32
1.4 Определение реологических параметров полимеров с учетом изменения температуры.....	36
<b>Глава 2. Осесимметричные задачи термовязкоупругости для однослоиных полимерных цилиндров .....</b>	<b>49</b>
2.1 Плоское напряженное состояние полимерного цилиндра.....	49
2.2 Плоская деформация однослоиного толстостенного цилиндра.....	64
2.3 Разрешающие уравнения для двумерной осесимметричной задачи термовязкоупругости .....	69
2.4 Влияние температурного режима на напряженно-деформированное состояние трубы из полиолефинов .....	73
2.5 Выводы по главе.....	76
<b>Глава 3. Ползучесть многослойных толстостенных полимерных труб.....</b>	<b>78</b>
3.1 Решение задачи ползучести трехслойной трубы в одномерной постановке	79
3.2 Анализ распределения напряжений в конце процесса ползучести .....	83
3.3 Аналитический расчет многослойных труб .....	87
3.4 Исследование ползучести трехслойной трубы в двумерной постановке .....	89
3.5 Выводы по главе.....	92

<b>Глава 4. Обратные задачи для неоднородных толстостенных цилиндров ....</b>	<b>93</b>
4.1   Обратная задача для цилиндра, испытывающего действие внутреннего и внешнего давления.....	94
4.2   Оптимизация цилиндра при силовых и температурных воздействиях .....	101
4.3   Выводы по главе.....	105
<b>Заключение.....</b>	<b>107</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>109</b>
<b>Приложение А. Программы расчета на ЭВМ .....</b>	<b>118</b>
A.1 Расчет трехслойной трубы с учетом ползучести в одномерной постановке	118
A.2 Расчет трехслойной трубы в двумерной постановке с использованием библиотеки PDE .....	124
A.3 Оптимизация цилиндрической оболочки, находящейся в температурном поле, по теории прочности Мора .....	130
<b>Приложение Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ .....</b>	<b>133</b>

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при устройстве инженерных коммуникаций систем сооружений и зданий широко используют сшитые полимеры в качестве трубопроводов горячего, холодного водоснабжения и отопления.

Масштабы потребление сшитых полимеров для этих целей в мировом пространстве составляет 65% и продолжает расти. При обследовании, эксплуатации полимерных труб важные особенности механического поведения материалов оболочек, упругопластические и реологические свойства, отсутствие адгезии между стальной арматурой и полиэтиленовой матрицей не учитываются. Поэтому вопросы исследования в данном аспекте весьма перспективны.

Для моделирования механического поведения полимерных труб из полиолефинов необходима разработка новых расчётных схем и математических моделей, описывающих особенности их структуры (схемы армирования), закономерности деформирования используемых материалов, в частности, контактное взаимодействие и нелинейное деформирование арматуры и матрицы, и конструктивные особенности элементов трубопровода.

Таким образом, исследование влияния на долговечность и прочность элементов трубопроводов из термопластических материалов таких факторов, как нелинейное механическое поведение, температура, ползучесть, структура полимерных материалов, а также изменяющиеся во времени нагрузки, является **актуальным**.

Отметим, что методы прочностного расчета трубопроводов из гомогенных материалов не применимы для полимерных армированных труб (гетерогенных систем) ввиду их структурной неоднородности.

**Степень разработанности темы.** История начала использования полиолефиновых труб имеет несколько периодов, для каждого из которых характерно автономное эволюционное развитие. Промышленное производство ПВХ труб началось в 30-е годы в Западной Европе, в частности, Германии. Широкого распростра-

нения, из-за начавшейся второй мировой войны, трубы не получили. Объективными причинами являются жесткость, лимитированный температурный промежуток, химическая зыбкость ко многим элементам и соединениям, при горении экстрагирование токсинов и т. д. В начале 60-х годов удалось частично улучшить свойства этого материала за счет хлорирования. Полученный материал назвали хлорированный поливинилхлорид. Отличаясь большой жесткостью материал тем не менее хорошо подходил не только для горячего водоснабжения, но и для холодного.

Трубы из полиолефинов относят ко второму поколению изготовления. Они возникли в конце 40-х годов и получили широкое применение в странах Европы и в Америке, в меньшей степени в бывшем СССР.

Необходимо отметить, что для полиэтиленовых труб тех времен был свойственен ряд весомых недостатков, в частности, материал был очень чувствителен к действию ультрафиолетовых лучей и окислителей, недостаточной термостойкостью. При переходе на материалы на основе полимеров, например, этилена, некоторые из свойств полиэтиленовых труб, удалось существенно улучшить.

С середины семидесятых годов трубопроводы из полимерных материалов применяются для транспортировки газов и жидкостей в ФРГ, США, Франции, Великобритании и других странах. Вопросам исследования и расчетов посвящены работы А. Л. Якобсена, В. С. Ромейко, А. Н. Шестопала, А. А. Персиона, J. Hessel и др. Специфика расчётов на прочность трубопроводов из полимеров заключается в необходимости учёта нелинейного их поведения при деформировании и существенной зависимости механические свойств термопластов от температуры. В температурном диапазоне от 0 °C до +95 °C термопласти могут деформироваться упруго до 10–20% [Э. Л. Калиничев, М. Б. Саковцев, Е. И. Каменев, Г. Д. Мясников, М. П. Платонов]. Вопросы влияния нелинейности поведения полимеров на напряжённо-деформированное состояние элементов конструкций трубопроводов практически не исследовались.

В трубопроводах из полимерных материалов, используемых для горячего водоснабжения, в интервале нормативных эксплуатационных температур (от 0 °C до

+80 °C), прочностные и деформативные параметры термопластов (полиэтилена, полипропилена, поливинилхлорида) изменяются в несколько раз [J. M. Hill, A. M. Milan, R. Ramos, C. P. Pesce, C. A. Martins, Г. М. Бартенев, Д. Ф. Коган, А. А. Аскадский, М. Н. Попов, Турусов Р.А., Рабинович А.Л. и др.].

К основным преимуществам труб из полиэтилена высокой плотности (ПЭВП) можно отнести: отсутствие коррозии и устойчивость к низким температурам. При использовании в условиях повышенных температур и давлений мгновенно снижаются прочностные свойства ПЭВП, поэтому для транспортировки воды с высокой температурой обычно не используется.

В середине 70-х годов для трубопроводов горячего водоснабжения начали эксплуатировать трубы из сшитого полиэтилена (PEX). От способа обработки можно получить полиэтилен трех марок:

- PEX-а (органическая сшивка пероксидами);
- PEX-Ь (сшивка силанольная);
- PEX-с (сшивка радиационная).

Горячее водоснабжение, системы отопления, а также так называемые «теплые полы», являются ореолом применения труб из PEX. Производство труб из PEX является весьма перспективным.

Из представленного на рис. 0.1 графика, скорость роста выпуска полимерных труб за последние пять лет увеличились.



Рис. 0.1 — Темпы роста производства полимерных труб

Применяемые в российских тепловых сетях трубы из PEX-а служат основой для производства теплоизолированных труб, объем применения до 1,5 тыс. км за пять лет, в связи с этим возникает необходимость разработки усовершенствованных технологий производства труб с повышением качества готовых изделий.

В связи с вышеизложенным важным является не только адекватное описание механических свойств полимеров в температурном диапазоне, но и правильная оценка распределения температуры в элементах конструкций.

**Цель** диссертационной работы — разработка математических моделей поведения полимерных армированных труб из полиолефинов при различных условиях нагружения с целью прогнозирования их несущей способности с учётом ползучести полимера и циклических температурных воздействий, а также оптимизация их работы на основе решения обратных задач механики полимеров.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Проведение сравнительного анализа конструктивных особенностей и условий эксплуатации однослойных и многослойных полимерных труб, определение системы нагрузок и механических характеристик материалов по известным диаграммам ползучести и релаксации напряжений и разработка методики определения релаксационных параметров исследуемых полиолефинов с учетом изменения температуры.

2. Исследование и разработка методики применимости гипотезы о равенстве нулю объёмной компоненты высокоэластических деформаций полимера.

3. Разработка методик расчёта однослойных и многослойных полиэтиленовых и полипропиленовых многослойных армированных труб на механические и температурные воздействия с учётом ползучести материала на основе модифицированного уравнения Максвелла-Гуревича.

4. Теоретическое исследование НДС полимерных труб из полиолефинов с учетом термовязкоупругости.

5. Разработка практических рекомендаций по оптимизации работы толстостенных многослойных полимерных труб из полиолефинов на основе создания искусственной неоднородности путем неравномерного нагрева.

**Научная новизна:**

- разработана методика определения релаксационных констант, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича на основе кривых релаксации полимеров;
- разработаны методики для расчёта с учётом ползучести и температурных воздействий однослойных и трёхслойных термопластичных труб на основе метода конечных элементов в одномерной и двумерной постановке;
- исследовано влияние переменного теплового режима на напряжённо-деформированное состояние труб из полиолефинов;
- разработан аналитический метод расчёта многослойных термопластичных труб;
- решена обратная задача для толстостенных неоднородных полимерных труб из полиолефинов, испытывающих силовые воздействия и температурные воздействия, на основе обобщённой теории прочности, частными случаями которой являются первая, вторая и третья теории прочности, а также упрощённая теория прочности Мора.

**Теоретическая значимость работы** заключается в том, что

- проведено исследование ползучести толстостенной цилиндрической полимерной оболочки с учётом наличия объемной деформации ползучести;
- введена величина длительного модуля и длительного коэффициента Пуассона для полимера, подчиняющихся нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича;
- исследовано влияние дискретности спектра времён релаксации полимера на напряжённо-деформированное состояние трёхслойной полипропиленовой композиции.

### **Практическое значение работы.**

- установлены зависимости модуля упругости, модуля высокоэластичности, начальной релаксационной вязкости и модуля скорости от температуры для полиолефинов;
- определены релаксационные константы первичного и вторичного полипропилена при комнатной температуре;
- в результате теоретического исследования НДС многослойных полипропиленовых композиций выявлено существенное перераспределение напряжений между полимерными слоями и армирующим алюминиевым слоем в процессе ползучести, что необходимо учитывать при определении предельного давления, действующего на трубу;
- разработанный автором аналитический метод расчета многослойных труб из полиолефинов позволяет определить их НДС как в начале, так и в конце процесса ползучести, не прибегая к численным методам.

**Методы исследования.** Исследование производилось при помощи аналитических и численных методов. Численное моделирование НДС полимерных труб выполнялось при помощи метода конечных элементов и метода конечных разностей. Вычисления проводились на базе современных ПЭВМ с использованием математического пакета Matlab.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

- методика определения релаксационных констант полимеров с учётом изменения температуры;
- методика численного расчёта однослойных и многослойных термопластичных труб с учётом изменения температуры и ползучести;
- аналитический метод расчёта многослойных полимерных труб из полиолефинов;
- результаты теоретического исследования ползучести трёхслойных и однослойных термопластических труб;

- полученные автором из анализа уравнения Максвелла-Гуревича величины длительного модуля и длительного коэффициента Пуассона;
- решения задач оптимизации для толстостенных полимерных труб из полиолефинов.

**Достоверность полученных результатов обеспечивается:**

- проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений;
- сравнением полученных результатов с известными решениями других авторов;
- применением нескольких методов к решению одной задачи с последующим сопоставлением результатов.

**Внедрение результатов работы.** Результаты работы внедрены в практику проектирования группы компаний «АКСстрой».

**Апробация работы.** Результаты исследования доложены на двух международных научно–практических конференциях «Строительство» (Ростов–на–Дону, 2014, 2015 гг.), международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию ФГБОУ ВПО «ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщика» в г. Грозный; научном семинаре кафедры «Сопротивление материалов» Ростовского государственного строительного университета (Ростов–на–Дону, 2015 г.); международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы» (г. Нальчик, 2015–2016 гг.).

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, четырёх глав, основных выводов, списка использованной литературы и приложений. Изложена на 133 страницах машинописного текста и содержит 51 рисунок и 18 таблиц.

**Публикации.** Основные положения диссертационной работы опубликованы в 15 печатных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК РФ — 8, получено 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

## **Основное содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность проблемы и выбор направления исследования, сформулированы цели и задачи, основные положения, приведена краткая аннотация всех глав работы.

**В главе 1** приводится классификация рассматриваемых полимеров, методика исследований, рассматриваются факторы, оказывающие влияние на напряженно-деформированное состояние полимерных трубопроводов, приводятся основные уравнения механики упругорелаксирующих сред, коими являются полимеры, рассматривается методика определения релаксационных констант полимеров с учетом изменения температуры. Приводятся полученные автором зависимости от температуры модуля упругости, модуля высокогоэластичности, начальной релаксационной вязкости и модуля скорости для вторичного поливинилхлорида.

**В главе 2** получены разрешающие уравнения для решения задач термовязкоупругости полимерных цилиндров методом конечных элементов в одномерной и двумерной постановке.

Рассматривается толстостенный полимерный цилиндр, находящийся в условиях как плоского напряженного состояния (ПНС), так и плоского деформированного состояния (ПДС), испытывающий действие внутреннего давления  $p_a$  и внешнего давления  $p_b$ . В настоящей главе решение выполнялось при помощи метода конечных элементов, который позволяет рассчитывать и многослойные цилиндры.

В поставленной задаче использовался одномерный элемент с двумя узлами и одной степенью свободы в узле — перемещением *и* вдоль радиуса.

Проведен анализ применимости гипотезы о равенстве нулю объемной деформации ползучести. При этом использовалось уравнение Максвелла-Гуревича для одноосного напряженного состояния и принцип суперпозиции. Установлено, что применение гипотезы о равенстве нулю величины  $\theta^*$  приводит к завышенным значениям напряжений в конце процесса ползучести. Максимальные значения напряжений  $\sigma_r$  отличаются на 35%, а  $\sigma_\theta$  — на 27%.

Исследовано влияние переменного теплового режима на НДС трубы из поливинилхлорида. Установлено, что при нестационарном тепловом режиме могут возникать напряжения существенно выше, чем при стационарном температурном поле.

**В главе 3** рассматривается задача ползучести трехслойной трубы. Исследуется перераспределение напряжений между полимерными слоями и внутренним армирующим слоем. Приводится аналитический метод расчета многослойных труб.

Показано, что в процессе ползучести происходит перераспределение напряжений между полимерными слоями и внутренним армирующим слоем: напряжения в слоях из полиэтилена высокой плотности с течением времени убывают, а в армирующем слое возрастают на 25%.

Подробно показан анализ уравнения Максвелла-Гуревича при  $t \rightarrow \infty$ , и в результате получена связь между напряжениями и деформациями в конце процесса ползучести. Введена впервые величина длительного модуля и длительного коэффициента Пуассона.

Разработан аналитический метод расчета многослойных труб, базирующийся на решении задачи Ламе. Выполнено сравнение результатов численного решения в одномерной и двумерной постановке с аналитическим решением.

**Глава 4** посвящена решению задач оптимизации толстостенных цилиндрических оболочек. Эквивалентное напряжение представляется в виде линейной комбинации напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ . Такой подход является обобщением первой, второй и третьей теории прочности, а также упрощенной теории прочности Мора.

Решены задачи оптимизации толстостенных цилиндрических оболочек, испытывающих действие силовых и температурных нагрузок.

На основе обобщенной теории прочности аналитически получен закон изменения модуля упругости по толщине толстостенной трубы, при котором она будет равнонапряженной по обобщенной теории прочности при действии внутреннего и внешнего давления.

Также численно, с использованием метода Рунге-Кутта четвертого порядка, получено решение задачи оптимизации при совместном действии температурных и силовых воздействий. Установлено что при определенном соотношении между внутренним давлением и разницей температур на внутренней и внешней поверхности однородный цилиндр может быть равнонапряженным по третьей теории прочности. Таким образом, неравномерный нагрев цилиндра может выступать в качестве еще одного способа создания равнонапряженного состояния.

Создание искусственной неоднородности в рассмотренной модельной задаче привело к увеличению несущей способности цилиндра при той же толщине в 1.4 раза.

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

## ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1 Современные полимерные материалы для внутренних трубопроводов систем холодного и горячего водоснабжения и отопления.

Основанных на неограниченных сырьевых возможностях нефтепереработки, пластмассовые трубы стали детищем бурного развития химии высокомолекулярных соединений, второй половины XX в. Середина двадцатого столетия появилась особая необходимости интенсифицировать поиски новых видов полимерных труб. Появившиеся вначале века трубы из поливинилхлорида (винипластика), через 15–17 лет из более современного полиэтилена, превосходили по многим показателям традиционные трубы из чугуна и стали, например, пропускной способности, по массе на единицу длины, быстроте строительства и особенно по долговечности.

Индивидуальное строительство, развивающееся быстрыми темпами, вызвало применение новых материалов и технологий. Использование в производстве пластиковых труб для промышленности началось в Европе, США и Японии в начале 50-х годов двадцатого века. Современные, легкие пластиковые трубы быстро завоевали рынок стальных труб, так как весили в 3–5 раз меньше, прочностыковались, и что самое главное, не ржавый. Современные строительные технологии быстро проникнув на рынок коснулись и инженерного оборудования зданий. Сейчас уже не нужно, убеждать дизайнера, строитель или монтажника в преимуществе использования современных пластиковых труб. Пластмассовые трубы на рынок труб для водоснабжения и отопления в странах Европы, проникают со средним годовым темпом роста около 8 %, это не идет в сравнение по конкуренции со стальными, медными и латунными трубами. В европейских странах, таких как, Швейцария — 69 %, Финляндия — 49 %, Германия — 39 %, наибольший объем применения труб из полимерных материалов.

В 90-х годах из-за рубежа на строительный рынок России пришли полипропиленовые трубы.

В табл. 1.1 приведены основные материалы для производства пластмассовых трубопроводов.

Табл. 1.1 — Материалы для пластмассовых трубопроводов

<b>Материал</b>	<b>Обозначения</b>	
	<b>RUS</b>	<b>International</b>
<b>Полипропилен :</b> • Тип 1 Гомополимер • Тип 2 Блоксополимер • Тип 3 Рандомсополимер • PP-R с противокислородным диффузионным барьером из алюминия	ПП	PP PP-H PP-B PP-R PPR-Al
<b>Поливинилхлорид</b>	ПВХ	PVC
<b>Хлорированный поливинилхлорид</b>	ПВХХ	PVCC
<b>Стеклопластики</b> Со связующими из: • Эпоксидных смол • Полиэфирных смол		GRE GRP
<b>Полиэтилен:</b> • Низкой плотности (высокого давления) • Линейной низкой плотности • Средней плотности • Высокой плотности (низкого давления)	ПЭ ПНП(ПВД) ЛНП ПСП ПВП(ПВД)	PE PELD PELLD (PEL) MDPE HDPE
<b>Сшитый полиэтилен:</b> Классификация по способу сшивки и защиты от диффузии кислорода • Органосилоксанами • Пероксидный • Радиационный • Азосоединениями  С противокислородным диффузионным барьером из: • Алюминия • Этиленвинилового спирта	ПЭС	PE-X  PE-Xb PE-Xa PE-Xc PE-Xd  PE-Xa-Al- PE-X PE-Xa-EVOH

Вышеперечисленные материалы экспортirуются в первую очередь из Италии (AQUATECHNIK), Чехии (EKOPLASTIK), Германии (AQUATHERM), Турции. В последствии появились и другие виды пластмассовых трубопроводов разных фирм. Это, в частности, полиэтиленовые трубы систем: UNIPIPE REHAU, CRONATHERM, — Германия, HENCO — Бельгия, WIRSBO — Швеция, GIACOMINI — Италия, KISAN — Польша, METZERPLAS — Израиль, и некоторые другие.

Согласно статистике и анализу российского рынка в последние годы предлагается высокий ассортимент пластмассовых труб. Во внутренних санитарно-технических системах сооружений и зданий рекомендуется использовать трубы из сшитого полиэтилена, полибутина, полипропилена, поливинилхлорида, хлорированного поливинилхлорида, полиэтилена, а также композиты на их основе.

В целом можно резюмировать, что все группы полимерных материалов характеризуются одинаковой стойкостью к давлению и температуре. Так, все рекомендуемые трубопроводы для горячего водоснабжения должны быть рассчитаны на максимальную рабочую температуру до 75°C, а для отопления - 90°C при соответствующем давлении до 1,0 МПа с учетом 25 лет эксплуатации.

Однако надо признать и отметить, что, обладая положительными свойствами, полимерные трубы стареют с течением времени. Это качество характерно для всех видов полимеров, ибо они находятся на грани "живого неживого" и подчиняются многим законам живого мира. Скорость их "наследственного старения" зависит от температуры и давления. Процесс старения при этом, сопровождается повышение хрупкости, как и у живого организма, а также склонностью к трещинообразованию, снижение эластичности и прочности. К снижению основного качества пластмассовых труб - их стойкости к агрессивным средам приводит появление трещин, в том числе и микротрещин, в стенке трубы.

**Полиэтилен** — самый распространенный материал для систем холодного водоснабжения, но его использование ограничено отсутствием необходимой номенклатуры соединительных деталей.

**Сшитый полиэтилен** является одним из наиболее распространенных материалов. Сшивание полиэтилена осуществляется химическим и физическим способами, это позволяет получать материалы с разными потребительскими свойствами. Трубы PEX наиболее часто используемые системы отопления пола. В Европе спрос на PEX труб оценивается в 329 млн., рынок составляет 61% от всех проданных систем в пластиковых трубах. Системы из сшитого полиэтилена выдерживают температуру 95°C при давлении 1 МПа. Трубы из полиэтилена имеют хорошую гибкость. Одним из недостатков является возрастающая с увеличением

диаметра трубы, стоимость производства. В основном диаметр таких труб не превышает 32 мм.

### ***1.1.1 Трубы из полиэтилена***

В зависимости от режима синтеза, получают полиэтилен: высокой плотности (HDPE или ПЭНД). Данный вид полиэтилена синтезируется при низком давлении с катализаторами. Полиэтилен низкой плотности (LDPE или ПЭВД) синтезируется под высоким давлением. В табл. 1.2 приведены типы ПЭ.

Табл. 1.2 — Типы полиэтилена

№	Тип ПЭ		Номинальное давление (атм.)	Достоинства	Недостатки
1	легкие	(Л)	2-2,5 атм.	A) высокая морозостойкость, выдержка высоких отрицательных температур до -60 – 70 °C.; Б) в ценовой политике экономична.	A) выдержка температур до 60–70 °C в безнапорных системах, под давлением — не выше 40–50 °C; Б) быстрое старение под воздействием ультрафиолета. Г) неустойчивость к ПАВ
2	средне-легкие	(СЛ)	до 3,5 атм.		
3	средние	(С)	до 5,8 атм.		
4	тяжелые	(Т)	до 9 атм.		
5	особо тяжелые	(ОТ)	до 15 атм.		

Основной ареал применения полиэтиленовых труб является хозяйственно-питьевое водоснабжение, и трубопроводы для транспортировки газообразных веществ, жидких, к которым полиэтилен, как отмечено ранее, химически стоек.

### ***1.1.2 Трубы из полипропилена***

В свою очередь, полипропилен получил наибольшее распространение в системах водоснабжения и сантехнических потреблений (табл. 1.3).

Табл. 1.3 — Классификация труб из полипропилена

№	Тип труб из полипропилена	Материал	Область применения
1	(ПП Тип 1) РРН	гомополипропилен	для инженерно-коммуникационных систем и вентиляции.

2	(ПП Тип 2) PPВ	Блоксополимер полипропилена	для трубопроводов водоснабжения, отопительных систем, для высокоударопрочных труб и фитингов.
3	(ПП Тип 3) PPR	статсополимер полипропилена формовая стабильность (не сгибаются) и устойчивость к высоким температурам.	для инженерно- коммуникационных систем, водяного отопления.
№	Толщина стенки трубы $\delta$		
1	для холодно й воды (PN10)	для систем отопления (до 75°C) армированные алюминиевой фольгой (PN25).	для горячей воды (PN20)
2	Виды армированных труб		
	крепление алюминиевой фольги поверх толстостенной рабочей трубы (PP) с помощью клея.	соединение рабочей трубы, фольги и защитного слоя с помощью перфорированных фольге отверстий.	слоеная конструкция.

Применяются трубопроводы из полипропилена PPR в зависимости от выбранного давления. Данный вид труб могут использовать при длительном воздействии температур до +70°C. Экстремальное превышение температуры возможно лишь кратковременно. Ниже приведены достоинства и недостатки труб из полипропилена (табл. 1.4).

Табл. 1.4 — Преимущества и недостатки труб из полипропилена.

№	Особенности труб из полипропилена		
1	<i>Достоинства:</i>	— за счет дешевых фитингов минимальная стоимость системы; — однотипность фитингов позволяет использовать для транспортировки агрессивных жидкостей; — на молекулярном уровне система полностью герметична. — $\delta$ стенок полипропиленовых труб больше чем у других сшитых труб;	
2	<i>Недостатки:</i>	— малая гибкость полипропиленовых труб ограничивает минимальное использование фитингов; — разница коэффициента линейного температурного расширения полипропилена и металла приводящая к нарушению герметичности стыка; — уступает сшитому полиэтилену в теплостойкости;	

		<ul style="list-style-type: none"> <li>— менее удобно при транспортировке и монтаже;</li> <li>— образующийся при сварке наплыв внутри трубы, часто сужает внутренний диаметр и является причиной образования нароста;</li> <li>— затруднен аварийный ремонт (трубы плохо гнутся);</li> <li>— необходимость установки компенсаторов.</li> </ul>
--	--	--

По использованию в производстве труб полипропилен занимает следующее место вслед за сшитым полиэтиленом. Его широко используют на Западе. Более 70 млн. м, что составило 41% от общего числа всех пластиковых труб. Такое широкое и популярное распространение полипропилен получил благодаря тому, что можно использовать дешевые соединительные детали.

Полипропилен используется для монтажа канализационных систем, водопроводных и отопительных труб.

Основные производители труб из ПП: Novaplast (Vesbo), Dizayn Teknik, Firat (Турция), Ekoplastik, Hidroplast HP-TREND (Чехия), Aquatherm, Pipe-Life, Banninger, Polymutan (Германия), Uponor (Финляндия), Wavin (Дания). Из Российских производителей отметим НПО «Стройполимер» (Россия).

### ***1.1.3 Трубы из полибутилена***

Если говорить о так называемом «теплом поле», то РВ-трубы хорошо подходят для создания такой системы. Отметим, что по свойствам Полибутилен очень близок по свойствам полипропилену марки PP-R.

Спрос и перспективы роста на данный тип труб более чем скромны, чем на трубы из сшитого полиэтилена, — в среднем 3–5% в год. Наиболее широко трубы из полибутилена применяются в Европе странах ЕС.

Недостатки и преимущества труб из полибутилена сведены в табл. 1.5.

Отметим, что полибутилен — хорошо освоен и зарекомендован как материал для труб отопления и горячего водоснабжения.

Табл. 1.5 — Преимущества и недостатки труб из полибутилена.

№	Особенности труб из полибутилена	
1	<i>Достоинства:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— хорошо поддается сварным соединениям;</li> <li>— меньшая толщина стенок <math>\delta</math> по сравнению с толщиной стенок <math>\delta</math> полипропиленовых труб;</li> </ul>

		— высокая гибкость позволяет легко укладываются в конструкцию пола, — незначительное линейное расширение;
2	<i>Недостатки:</i>	— Максимальная рабочая температура $T \leq 82^{\circ}\text{C}$ .

#### ***1.1.4 Трубы из поливинилхлорида и хлорированного поливинилхлорида***

Данный тип труб представляют собой жесткие материалы, используемые в основном в системах канализации, водоснабжения. Известны своей жесткостью трубы из поливинилхлорида весьма эффективны для стояков больших диаметров. Их эксплуатация может варьироваться в диапазоне температур до  $+40^{\circ}\text{C}$ , а из хлорированного поливинилхлорида — до  $+95^{\circ}\text{C}$  в системах водоснабжения и отопления.

Идеально подходят для труб из поливинилхлорида — локальные канализационные сети, работающие без давления. Основные преимущества пластиковых труб устойчив к коррозии, легкость монтажа, легкий вес и гладкими стенками. Одна из рациональных областей применения поливинилхлоридных труб — водоотводящие системы с крыш, иначе говоря — водостоки. Недостатки и преимущества поливинилхлоридных труб сведены в табл. 1.6:

Табл. 1.6 — Преимущества и недостатки труб из поливинилхлорида.

№	Особенности поливинилхлоридных труб	
1	<i>Достиоинства:</i>	— наименьший коэффициент линейного температурного расширения; — допуск скрытой и наружной прокладки; — сильная дешевизна поливинилхлоридных труб; — устойчивы к воздействию большого числа химических веществ, в частности, хлора.
2	<i>Недостатки:</i>	— очень хрупок при отрицательных температурах; — для горячего водоснабжения и отопления очень высокая стоимость.

Для применения в системах отопления, а также питьевого и горячего водоснабжения, наиболее известны ПВХ/Х-ПВХ-трубопроводы «Genova System».

### ***1.1.5 Композитные трубы***

Значительные достижения в технологии производства композитных труб определяются следующими факторами:

1. бурный рост внедрения на рынок полимерных систем;
2. блокировка проникновения кислорода в пластиковые системы для горячего водоснабжения и отопления;

Снижение кислородопроницаемости до нормативной является основным преимуществом многослойных композитных труб в системах водоснабжения и отопления.

Рабочий режим эксплуатации таких труб: давление до 1,0 Мпа и температура до 90 С.

Комбинацию сшитой полиэтилен-алюминий представляет собой большинство композитных трубных систем на рынке. В последнее время производители изготавливают полипропиленовые трубы с алюминиевым слоем предотвращающим диффузию . Такие трубы могут быть использованы для систем отопления.

### ***1.1.6 Трубы из металлокомплимеров***

Металлопластиковые трубопроводы (металлокомплимерные) на основе полиэтилена являются разновидностью труб из молекулярно-сшитого полиэтилена, впервые появившаяся в 1979 году в Великобритании. Их общепринятое обозначение — PEX-Al-PEX (сшитый полиэтилен — алюминий — сшитый полиэтилен).

Также встречаются трубы PEX-Al-PE (наружный слой из ПЭНД), PERT-Al-PERT (PERT — полиэтилен термостойкий). По сути, металлопластиковые трубы это те же самые PEX-трубы. Отличие лишь в том, что внутри предписывается тантемный слой из алюминиевой фольги. Основной смысл такой установки — снизить коэффициент линейного расширения PEX-труб. Данный вид труб структурно состоит из пяти слоев и представляет собой сложную конструкцию (рис. 1.1):

1. внутренний из сшитого полиэтилена;
2. слой для более плотного соединения пластика и металла;
3. алюминиевая труба, сваренная встык;
4. слой клея;
5. внешний слой из сшитого полиэтилена.

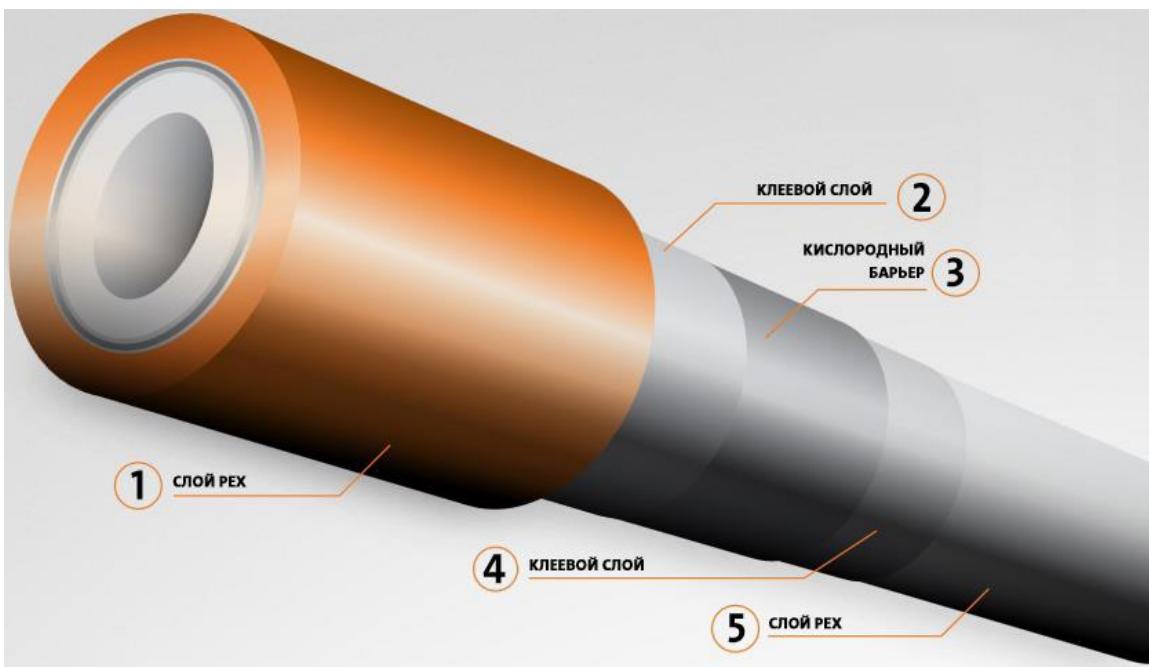


Рис. 1.1 — Конструкция пятислойной композитной трубы.

Эти трубы соединяют в трубопроводе металлическими обжимными фитингами или дорогостоящими пресс-фитингами.

Алюминиевая прослойка в металлополимерных трубах не несет никакой функциональной нагрузки. Основной задачей слоя (алюминиевая фольга) является перекрытие проникновению  $O_2$ , а вторичного слоя фольги — незначительная компенсация температурного расширения.

Необходимо руководствоваться данными о прочности сшитого полиэтилена трубы с правильным расчетом нагревательных металлополимерных труб.

Существуют два типа металлических труб, в зависимости от соотношения толщины слоев полипропилена, внутреннего и внешнего:

1. алюминиевая труба находится в середине поперечного сечения трубы все слои PEX и соединенных клеевыми слоями.

2. Корпус алюминий располагается близко к периферии поверхности, и протекционирует лишь тонкий слой полимера (например, STABIL называется PEX-трубы).

В табл. 1.7 приведены достоинства и недостатки металлопластиковых труб.

Табл. 1.7 — Недостатки и достоинства металлопластиковых труб:

№	Особенности металлопластиковых труб	
1	<i>Достоинства:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— упругость формы во время эксплуатации;</li> <li>— 100%-я непроницаемость газов;</li> <li>— уменьшение КТЛР благодаря наличию слоя алюминия;</li> </ul>
2	<i>Недостатки:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— отсутствие данных о сроках службы в зависимости от температуры и давления;</li> <li>— присутствие резиновых уплотнительных колец рекомендательно;</li> <li>— из-за разности КЛТР полиэтилена и КЛТР алюминия, при использовании м/п труб в горячем водоснабжении и отоплении, со временем происходит расслоение трубы;</li> <li>— недопустим изгиб трубы в одном и том же месте, так как повреждается алюминиевый слой;</li> </ul>

Композитные трубы хотя и используются, как для систем водоснабжения, так и отопления, вероятно, наиболее быстрыми темпами будет развиваться использование их для радиаторного отопления, на которое в настоящее время приходится 45% всех продаж. Несмотря на то, композитные трубы, используются для водоснабжения и отопления, наиболее быстрыми темпами развивается использование для радиаторных систем отопления, что составляет 45% всех продаж

Сварка труб из полибутена аналогична сварке труб из полиэтилена и полипропилена.

Что касается специфики расчетов на прочность трубопроводов из полимеров то оно заключается в необходимости учета нелинейного их поведения при деформировании и существенной зависимости механические свойств термопластов от температуры. В температурном диапазоне от 0 °C до +95 °C термопласти могут деформироваться упруго до 10–20% [13, 14, 15].

Вопросы влияния нелинейности поведения полимеров на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций трубопроводов практически не исследовались.

Для термопластических материалов характерна вязкоупругость (полипропилен, полиэтилен, полиметилметакрилат, поливинилхлорид и др.) [21, 22, 23].

Длительная прочность элементов конструкций из вязкоупругих материалов определяется условиями нагружения [8, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. При циклических деформациях за счет тепловыделения в зоне деформаций прочностные свойства термопластов могут снижаться [13].

В отличие от металлических трубопроводов, для полимерных труб, используемых в горячем водоснабжении, исследования прочности при вибрационных и циклических воздействиях практически не проводилось [29]. Поэтому важным и актуальным является также анализ влияния параметров циклического нагружения на усталостную прочность таких труб.

### ***1.1.7 Трубы из сшитого полиэтилена (PEX)***

Необходимость использования труб для отопления и горячей воды (при более высоких температурах и давлениях) привело к острой разработке методов производства полиэтилена с высокой молекулярной массой. Что стало возможным, с помощью образования дополнительных поперечных связей полимера под высоким давлением. Этот процесс называется совместным, и полученный таким образом полиэтилен - сшитый полиэтилен (PEX).

Впервые трубы из сшитого полиэтилена были разработаны шведской компанией «WISBO» в начале семидесятых годов. Трубы из сшитого полиэтилена, из всех пластиковых труб, наиболее широко используются в системах напольного отопления. В Европе спрос на трубы из сшитого полиэтилена оценивается порядка 218 млн. м, что составляет 59% всех проданных пластиковых систем труб.

XLPE трубы работают при температурах до 95 (в чрезвычайных ситуациях до 110 ° С). При сшивке в молекулярных цепочках, содержащих атомы углерода и

водорода, под воздействием определенных факторов у звеньев молекул полиэтилена отрываются отдельные атомы водорода. Полученная свободная связь используется для соединения отдельных цепочек вместе. В зависимости от используемого воздействия различают два типа сшивки полиэтилена: *химическую* и *физическую*.

Труба из полиэтилена облучается жесткими рентгеновскими лучами, при *физической сшивке*, а при *химической* - атомы водорода в молекулах полиэтилена замещаются под воздействием химических веществ.

Первым был изучен пероксидный способ химической сшивки, особенности которого заключалось в том, что полиэтилен и инициатор сшивки — пероксид — предварительно равномерно перемешиваются. Сшивка производится в расплавленном состоянии под высоким давлением. При этом процент сшивки достигается равный в среднем 85%. Отметим, что свойства материала одинаковы в каждой точке материала независимо от толщины.

Следующий химический способ сшивки производится с помощью силана. Отсюда и название сшивки - силановая. Привитая силаном, труба из полиэтилена, после производства помещается в ванну с горячей водой, процесс сшивки идет от двух поверхностей — наружной и внутренней, вглубь стенки трубы. В этом случае в середине толщины трубы самый маленький процент сшивки. Данный полиэтилен получил название PEX-B.

Ну и наконец, третий способ химической сшивки — сшивка азотными радикалами. Такой полиэтилен сшитый этим способом, получил название PEX-D. Трубы из сшитого полиэтилена демонстрируют ряд особых свойств, представленных в табл. 1.8.

Трубы из полиэтилена с поперечными сшитием, покрытые диффузионным барьером из этилен виниловый спирт (EVOH) для предотвращения проникновения свободного кислорода в системе. Трубы со слоем из EVOH бывают трехслойными (PEX-клей-EVOH), либо пятислойными (PEX-клей-EVOH-клей-PEX).

Монтаж систем из труб PEX осуществляется в двух вариантах: разъемном и неразъемном.

Табл. 1.8 — Особенности труб сшитого полиэтилена

№	Особенности труб сшитого полиэтилена	
1	<i>Достоинства:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— срок службы составляет 30 лет для горячего водоснабжения и более 50 лет для холодного;</li> <li>— простота эксплуатации и монтажа;</li> <li>— устойчивость к воздействию агрессивных сред;</li> <li>— высокая температурная устойчивость, при рабочих температурах носителя до 90–95 °C, а аварийных — до 110 °C;</li> <li>— циклическое размораживание-замораживание труб, заполненные водой;</li> <li>— способность к восстановлению первоначальной формы после деформации;</li> <li>— блокирование проникновения кислорода в систему отопления;</li> <li>— совместимость с трубами других производителей;</li> </ul>
2	<i>Недостатки:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— высокий КЛТР, что исключает монтаж открытой подводки;</li> <li>— стойкость к УФ-излучению невысокое;</li> </ul>

## 1.2 Краткая характеристика и методы исследований полимерных труб PEX.

Для исследования труб, PEX-а традиционно используется порошкообразный полиэтилен высокой плотности (ПЭВП) марки Lupolen 5261Z.

Основной областью применения данного материала является производство сшитых труб по технологии PEX-а. Краткие характеристики (ПЭВП) марки Lupolen 5261Z приведены в табл. 1.9.

Табл. 1.9 — Краткие характеристики сшитых труб по данным производителя

Наименование показателя	Стандарт и условия определения	Значение
ПТР	ISO 1133	2,0 г/10 мин
Плотность	ISO 1183	0,954 г/см <sup>3</sup>
Модуль при растяжении	ISO 527-1, -2 (23°C, v=1 мм/мин)	1100 МПа
Прочность при разрыве	ISO 527-1, -2 (23°C, v=50 мм/мин)	27 МПа
Удлинение при разрыве	ISO 527-1, -2 (23°C, v=50 мм/мин)	9%
Твердость	ISO 868, (по Шору)	65

Температура плавления	ISO 3146	134°C
Среднечисленная молекулярная масса		25000
Среднемассовая молекулярная масса		450000

### *Приготовление лабораторных рабочих смесей.*

Порошок ПЭ весом 100 г помещаем в стеклянную сосуд с подогнанной пробкой, затем добавляются надлежащие навески готовых смесей жидких компонентов. Состав этих смесей варьируются. Далее колбу плотно закрываем и встряхиванием смесь интенсивно перемешивается в течение 30 мин. При использовании антиоксидантов смеси, полученную твердую фазу до эксперимента держали в плотно запечатанной колбе в течении 24 часов.

### *Изготовление образцов труб.*

Технология изготовления труб РЕХ-а методом плунжерной экструзии содержит следующие этапы:

- 1) Подготовка рабочей смеси (введение добавок в порошок ПЭВП, а именно органического пероксида термо- и светостабилизаторов);
- 2) Выстаивание рабочей смеси в промышленных бункерах в течение суток (предполагается, что при этом улучшается диффузия добавок в частицы порошка ПЭ и обеспечивается более равномерное смешение этих добавок в полимере);
- 3) Непосредственно плунжерная экструзия. На данном этапе происходят разложение пероксида и сшивка полиэтилена. Сшитый экструдат проходит через калибр, смонтированный на входе в охлаждающую кювету, где происходит финальное формирование трубы согласно требуемой геометрии.

### *Физико-механические испытания.*

ГОСТ 11262-80 Согласно которому контролируется относительные удлинения при разрыве и выход, прочность на разрыв, прочность на разрыв. Этот тест выполняется на разрывной машине INSTRON 1185 в пяти параллельных пробах.

Стандартные материалы - лопатки типа 5. Скорость перемещения  $\vartheta = 100$  мм/мин.

***Определение стойкости образцов труб при постоянном внутреннем давлении.***

В соответствии с ГОСТ 24157-80, длительное сопротивление сшитых полиэтиленовых труб  $\sigma$  в диапазоне температур от 10 до 95 ° С, внутренние гидростатические испытательные давления не должны быть меньше, чем значения, которые определяются уравнением:

$$\lg t = -105,8618 - \frac{18506,15}{T} \lg \sigma + \frac{57895,49}{T} - 24,7997 \lg \sigma$$

Здесь,

$t$  – время до разрушения, ч;

$T$  – температура испытания, К;

$\sigma$  – окружные напряжения в толще трубы, Мпа.

Диагностику и испытания проводят на образцах труб  $1\frac{1}{4}''$  или  $2\frac{1}{2}''$  дюйма путем установления стойкости при постоянном внутреннем давлении. Температура при этом 20°C и 95°C соответственно. Для каждого уровня, число выборок напряжения - три.

Минимальные значения стойкости должны соответствовать следующим параметрам при постоянном внутреннем гидростатическом давлении табл. 1.10.

Табл. 1.10 — Стойкость при постоянном давлении

№	Температура (градусы)	Время (час)	Давление (МПа)
1	20°C	1	12
2	95°C	1	4,8
3	95°C	22	4,7
4	95°C	165	4,6
5	95°C	1000	4,4

***Визуальное наблюдение реакции поверхности трубы после прогрева T=160°C.***

Согласно стандарта ГОСТ 27078-86 снятие показания проводится согласно регламента 2 суток на образцах труб длиною 4 см с использованием внешних источников аппаратуры.

Исключив соприкосновение образцов со стенками шкафа и соответственно друг с другом, образцы размещают в шкафу для сушки строго вертикально, например, на слой талька. Выдержка при температуре  $(160 \pm 2)$  °C составляет 48 ч ± 15 мин, затем вынимают, охлаждают до комнатной температуры. Далее происходит осмотр, где фиксируют появление шершавости и рытвин, изменения цвета, появление локальных изменений колористики трубы, признаков плавления и др.

***Калориметрия сканирующая (дифференциальная)***

Вычисление температуры фазового перехода, энталпия плавления в индукционного периода композиций является окисление смесей, готовых для работы и образцов, выполненных в соответствии с [113] ISO 11357 в дифференциальном калориметре Pyris 6 DSC a. Perkin Elmer.

Кристаллизация и температура плавления определяются следующим образом: при постоянной скорости нагрева и охлаждения ( $\vartheta = 20$  °C/мин) и функциональной зависимости теплового потока от температуры среде азота.

В расчете на массу образца рассчитываются энталпия плавления полимерных образцов (из площади пика плавления).

Методом ДСК определяются термоокислительной стабильность готовых образцов и рабочих смесей по изменению индукционного периода окисления. Определение индукционных периодов окисления смесей проводятся в соответствии с ГОСТ Р 50838-95.

***Термогравиметрический анализ.***

ТГА исследования проводятся в соответствии с ISO 11358 на приборе Perkin Elmer Pyris Diamond TGA в среде воздуха, фиксируется изменение веса при нагреве

со скоростью  $\vartheta = 10^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ . Температура начала разложения используется в качестве критерия термостойкости образцов.

### ***Определение содержания гель-фракции в образцах.***

Анализ проводится согласно ISO 10147. От образца при помощи микротома отрезается стружка  $\delta = 150 \text{ мкм}$ , обволакивающую полную толщину стенки как минимум одного поперечного сечения.

В металлический контейнер (сухой чистый) помещается навеска полимера  $0,5\text{--}1,0 \text{ г}$  с погрешностью до  $1 \text{ мг}$  (масса  $m_1$ ). Помещается образец для испытаний в контейнер и взвешивается (масса  $m_2$ ). Далее контейнер помещается в круглодонную колбу на  $250 \text{ мл}$  и добавляется  $200 \text{ мл}$  о-ксилола. Содержимое колбы кипятится с обратным холодильником в течение  $(8\pm0,1)\text{ч}$ , поддерживая энергичное кипение раствора. Затем удаляется остатки образца из бурлящего раствора, обсушивается наружная поверхность контейнера тканью, и помещается на  $3 \text{ ч}$  в сушильный шкаф при температуре  $140^{\circ}\text{C}$ .

В заключении в эксикаторе контейнер охлаждается до температуры  $(23)^{\circ}\text{C}$  и вновь взвешивается (масса  $m_3$ ).

Для каждого образца степень сшивки определяется:

$$G = \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}, \text{ где}$$

$m_1$  – вес контейнера, мг;

$m_2$  – вес первоначального образца для испытания и контейнера, мг;

$m_3$  – вес остатка и контейнера, мг.

Окончательно принимается среднее арифметическое значение степени сшивки двух испытанных образцов, округляя при этом до ближайшего целого числа.

### ***Виброреометрия.***

Изучение кинетики образования поперечных связей, осуществляемых методом виброреометрии. Производимые регистровой пары изменения во время проб процесса сшивания.

### ***УФ-спектроскопия.***

Исследования проводятся на однолучевом спектрометре Helios  $\gamma$  ф. Thermo Electron.

#### Определение суммарного содержания фенольных АО

В круглодонную колбу делается точная навеска стружки (150 мкм) исследуемого полимера в количестве ( $2,0000 \pm 0,0002$ ) г. Затем полимер заливают 50 мл хлороформа и проводится экстракция при кипячении с обратным холодильником в течение 16 часов. Далее экстракт фильтруется, сливаются в мерную колбу на 100 мл и доводится до метки хлороформом. Затем снимается УФ-спектр полученного раствора относительно чистого хлороформа в диапазоне 220-300 нм, толщина кюветы составляет 10 мм.

#### Определение содержания фосфора в полимерных образцах

Анализ фосфора проводят с использованием аналитической процедуры. Идея метода основана на минерализации пробы полимера смесью азотной и хлорной кислот с последующей реакцией с молибдатом аммония и фотометрировании фосфорномолибденового комплекса, восстановленного аскорбиновой кислотой в присутствии катализатора.

### ***Спектроскопия ядерного магнитного резонанса.***

Спектры ЯМР снимается на приборе Bruker CXP-200 на ядрах  $^1H$  и  $^{13}C$  при частотах 200-50.32 МГц. В качестве внутреннего стандарта используется тетраметилсилан. В качестве растворителя используется дейтерохлороформ.

### ***Фурье-ИК-спектроскопия.***

По инверсии оптической плотности полосы абсорбции карбонильной группы в ИК-спектрах определяется расходование антиоксидантов. ИК- исследования проводится на приборе Фурье-ИКС Thermo Nicolet Avatar 370 (глубина проникновения 0,66 мкм).

### 1.3 Основные уравнения механики упругорелаксирующей полимерной среды. Обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича

Процессы ползучести и релаксации напряжений подразделяются на линейные и нелинейные. Линейная теория вязкоупругости оперирует с линейными дифференциальными либо интегро-дифференциальными уравнениями. Разработка данной теории в значительной мере стимулировалась расширением области применения полимеров и композитов на их основе. Современная теория линейной вязкоупругости в основном базируется на принципах Больцмана и Вольтерры или на теории вязкоупругих реологических моделей. Основы линейной теории вязкоупругости были заложены Дж. Максвеллом и В. Фойгтом.

Уравнение Больцмана-Вольтерра в интегральной форме для случая одноосного растяжения записывается в виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( \sigma(t) + \int_0^t L(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right) \quad (1.1)$$

или

$$\sigma(t) = E \left( \varepsilon(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad (1.2)$$

где  $L(t - \tau)$  — ядро ползучести;  $\Gamma(t - \tau)$  — резольвента ядра ползучести.

На стареющие материалы распространение теории линейной вязкоупругости было выполнено Н. Х. Арутюняном [31], который использовал ее для решения задач ползучести бетона.

Для математического описания линейных процессов ползучести и релаксации наиболее часто используются следующие методы:

- а) спектров времен релаксации и запаздывания [32];
- б) Кольрауша [33].

Первый метод применяется при описании периодических и квазистатических процессов, второй — при описании процессов механической релаксации при

квазистатических режимах (ползучесть при постоянном напряжении, релаксация напряжений при постоянной деформации).

Наиболее простой в математическом отношении способ построения нелинейных феноменологических теорий ползучести состоит в использовании теорий типа течения, старения, упрочнения, а также их различных модификаций [34].

Практически во всех подходах на первом шаге выполняется разделение полной деформации на мгновенную деформацию  $\varepsilon_0$  и деформацию ползучести  $\varepsilon^*$ . В свою очередь мгновенная деформация может быть упругой, а может включать в себя упругую и пластическую составляющую.

В общем случае деформация ползучести  $\varepsilon^*$  представляет собой функцию напряжения  $\sigma$ , времени  $t$  и температуры  $T$ :

$$\varepsilon^* = f(\sigma, t, T). \quad (1.3)$$

Обычно выражение (1.3) представляется в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$\varepsilon^* = f_1(\sigma)f_2(t)f_3(T). \quad (1.4)$$

В теории старения в явном виде устанавливается связь между деформацией ползучести, напряжением и временем:

$$\varepsilon^* = f_1(\sigma)f_2(t). \quad (1.5)$$

В литературе можно встретить следующие выражения для функций  $f_1(\sigma)$ :

$$f_1(\sigma) = B\sigma^n; \quad (1.6)$$

$$f_1(\sigma) = C \operatorname{ch}(\alpha\sigma); \quad (1.7)$$

$$f_1(\sigma) = D e^{\beta\sigma}; \quad (1.8)$$

$$f_1(\sigma) = B(\sigma - \bar{\sigma})^n. \quad (1.9)$$

Выражение (1.6) соответствует закону Нортонса; (1.7) — закону Прандтля, (1.8) — закону Дорна; (1.9) — закону трения.

Для функции  $f_2(t)$  приводятся следующие зависимости:

$$f_2(t) = t; \quad (1.10)$$

$$f_2(t) = Bt^m; \quad (1.11)$$

$$f_2(t) = \left(1 + bt^{\frac{1}{8}}\right) e^{kt}; \quad (1.12)$$

$$f_2(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^{m_i}. \quad (1.13)$$

Формула (1.11) соответствует закону Бейли, (1.12) — закону Андраде; (1.13) — закону Грехема и Уоллеса.

Одним из вариантов теории старения является зависимость скорости роста деформации ползучести от напряжения и времени:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(\sigma, t). \quad (1.14)$$

Перечисленные теории применимы только в случае постоянного или медленно меняющегося напряжения и представляют собой попытку математически formalизовать первую и вторую стадию ползучести.

В теории течения (теории постоянной скорости) устанавливается связь напряжения и скорости деформации:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(\sigma). \quad (1.15)$$

Данная теория справедлива в случае медленно и монотонно меняющегося напряжения и не слишком малых скоростей ползучести.

Выбор зависимостей скоростного типа — это попытка математического моделирования первой стадии ползучести, характеризующейся затуханием скорости роста деформаций — данный процесс получил название упрочнения.

Теория упрочнения предполагает зависимости скорости роста деформаций ползучести в любой момент времени от действующих напряжений и накопленных деформаций ползучести:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon^*). \quad (1.16)$$

Теория упрочнения получила существенное развитие в работах Ю. Н. Работнова [25, 26] и его учеников.

Для полимеров наиболее общим и дающим хорошее совпадение с экспериментальными данными является нелинейное уравнение Максвелла [35, 36].

Обобщение нелинейного уравнения Максвелла на случай трехосного напряженного состояния было выполнено Г. И. Гуревичем [37]:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*}, \quad i = (r, \theta, z), j = (r, \theta, z), \quad (1.17)$$

где  $\varepsilon_{ij}^*$  — высокоэластическая деформация (деформация ползучести);  $f_{ij}^*$  — функция напряжений;  $\eta^*$  — релаксационная вязкость.

$$f_{ij}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) - E_\infty \varepsilon_{ij}^*;$$

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|f_{\max}^*|}{m^*}\right),$$

где  $p = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3$  — среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $E_\infty$  — модуль высокоэластичности;  $m^*$  — модуль скорости;  $\eta_0^*$  — начальная релаксационная вязкость.

Уравнение (1.17) представляет собой обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича для одного члена спектра. В общем случае, ввиду сложности строения, неоднородности, как на молекулярном, так и на более высоких уровнях, для многих полимеров характерен дискретный спектр времен релаксации, так что полная деформация ползучести по каждому направлению должна состоять из суммы нескольких членов:

$$\varepsilon_{ij}^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{ij,s}^*. \quad (1.18)$$

В результате анализа данных экспериментов в работах [38, 39, 40] показывается, что при решении конкретных задач механики полимеров достаточно учета только двух составляющих высокоэластической деформации: «старшей» и «младшей». Старшей считается составляющая с наибольшим модулем высокоэластичности  $E_{\infty s}$  (т.е.  $E_{\infty 1} > E_{\infty 2}$ ) и наименьшим коэффициентом релаксационной вязкости  $\eta_{0s}^*$  (т.е.  $\eta_{01}^* < \eta_{02}^*$ ).

## 1.4 Определение реологических параметров полимеров с учетом изменения температуры

На сегодняшний день рынок всех пластиковых конструкционных материалов на 69% обеспечивают материалы на основе поливинилхлорида [41]. Они используются при производстве труб, окон, наружной облицовки стен, декоративных отделочных материалов, изоляции проводов и кабелей и т.д. Такое широкое применение поливинилхлорида объясняется как его высокими физико-механическими характеристиками, так и высокой огнестойкостью, устойчивостью к воздействиям окружающей среды.

Механическое поведение полимеров и их эксплуатационные качества неразрывно связаны с релаксационными процессами, происходящими в них.

Поэтому важно уметь прогнозировать реологическое поведение полимерных материалов с учетом фактора времени, а для этого нужно знать уравнение связи между высокоэластическими деформациями полимера и возникающими в нем напряжениями, а также все входящие в это уравнение релаксационные параметры.

К сожалению, для поливинилхлорида, несмотря на его очень широкое применение, в литературе достаточно редко встречаются данные по ползучести и релаксации. Кроме того, все упругие и релаксационные параметры ПВХ, как и для других полимеров, сильно зависят от температуры.

Из последних работ, в которых учитывалось указанное выше обстоятельство, стоит отметить работы [42, 43]. В данных работах проводится исследование релаксации первичного и вторичного ПВХ при различных температурах. Для вторичного поливинилхлорида на рис. 1.2 показаны полученные в работах [42, 43] кривые релаксации напряжений при относительной деформации  $\varepsilon = 3\%$ .

В табл. 1.11 представлены значения напряжений в различные моменты времени, соответствующие рис. 1.2.

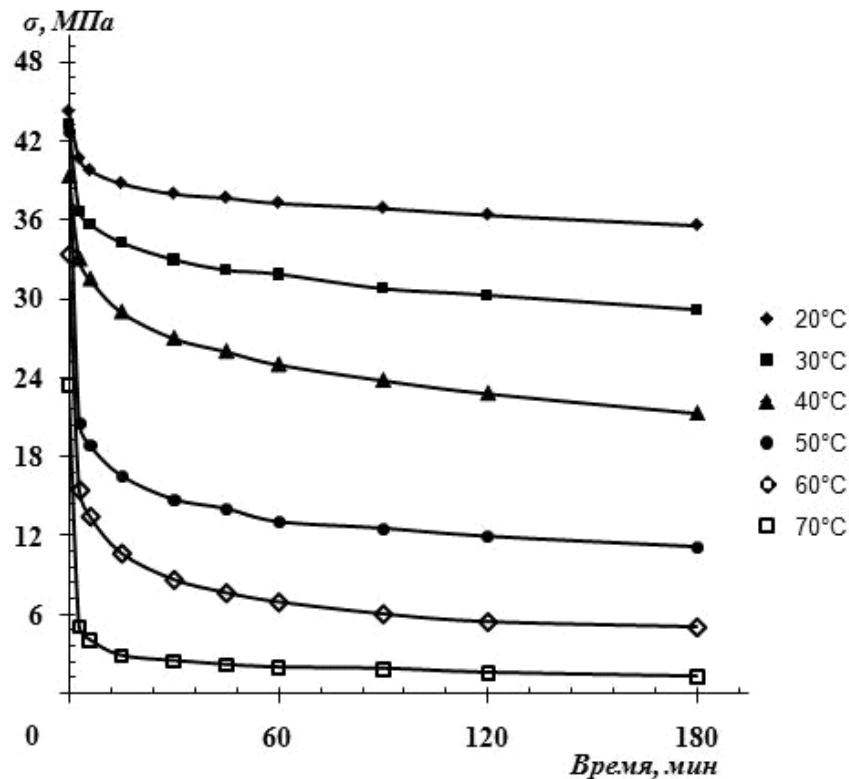


Рис. 1.2 — Кривые релаксации вторичного ПВХ, полученные в работах [42, 43]

Табл. 1.11 — Изменение напряжений во времени при различной температуре

$t$ , мин	0	3	6	15	30	45	60	90	120	180
$\sigma$ , МПа	20 °C	44.4	40.8	39.8	38.8	38	37.7	37.3	36.9	36.4
	30 °C	43.4	36.7	35.7	34.3	33	32.2	31.9	30.8	30.3
	40 °C	39.3	32.9	31.4	29	27	25.9	24.9	23.8	22.7
	50 °C	36.4	20.5	18.8	16.5	14.7	13.9	13	12.5	11.9
	60 °C	33.4	15.4	13.4	10.6	8.61	7.63	6.95	6.02	5.42
	70 °C	23.4	5.06	4.05	2.84	2.48	2.16	2	1.85	1.58

Для описания полученных кривых авторы работ [42, 43] используют интегральное уравнение Больцмана-Вольтерра:

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 - \int_0^t T(\tau) d\tau \right], \quad (1.19)$$

где  $\sigma$  — напряжение в текущий момент времени  $t$ ;  $\sigma_0$  — напряжение в начальный момент времени;  $\tau$  — переменная, пробегающая значения от 0 до  $t$ ;  $T(\tau)$  — ядро релаксации.

Авторами работ [42, 43] применяется достаточно сложное ядро, имеющее вид:

$$T(\tau) = -\frac{S_0}{k_B m} \left[ \frac{1}{\alpha \ln \alpha + (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)} - \frac{1}{\ln 0,5} \right], \quad (1.20)$$

где  $m = m^* \int_0^\infty T^*(\tau) d\tau$ ;  $T^*(\tau)$  — переменная часть ядра;  $k_B$  — постоянная Больцмана;  $m^*$  — общее число кинетических единиц (релаксаторов и нерелаксаторов в единице объема);  $\alpha$  — доля релаксаторов в общем числе кинетических единиц;  $S_0$  — величина начальной энтропии системы.

Величина  $\alpha$  также является функцией от  $\tau$ :

$$\alpha = \frac{1}{\left(1 + \frac{k^*}{\beta} \tau\right)^\beta}, \quad (1.21)$$

где  $k^* = k^{n-1}$ ;  $\beta = \frac{1}{n-1}$ ;  $n$  — порядок реакции взаимодействия релаксаторов;  $k$  — постоянная скорости такого взаимодействия.

Интегральная форма уравнений удобна для обработки экспериментальных данных и позволяет описывать процессы ползучести и релаксации с высокой степенью точности, однако при решении задач механики полимеров ее использование связано с большими математическими трудностями. Поэтому по возможности выполняется переход от интегральной формы к дифференциальной.

Рассмотрим методику определения реологических параметров, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, по кривым релаксации и установим зависимость каждого параметра от температуры на примере вторичного ПВХ, используя кривые, показанные на рис. .

В случае одноосного напряженного состояния уравнение Максвелла-Гуревича при расчете с учетом одного члена спектра времен релаксации записывается в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}, \quad (1.22)$$

где  $\varepsilon^*$  — высокоэластическая деформация (деформация ползучести);  $f^*$  — функция напряжений;  $\eta^*$  — релаксационная вязкость.

Функция напряжений  $f^*$  и релаксационная вязкость вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} f^* &= \sigma - E_\infty \varepsilon^*; \\ \eta^* &= \eta_0^* e^{-\frac{|f^*|}{m^*}}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где  $\sigma$  — напряжение;  $E_\infty$  — модуль высокоэластичности;  $\eta_0^*$  — начальная релаксационная вязкость;  $m^*$  — модуль скорости.

Полная деформация  $\varepsilon$ , в процессе релаксации остающаяся постоянной, представляет собой сумму упругой и высокоэластической деформации:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon^*(t), \quad (1.24)$$

где  $E$  — мгновенный модуль упругости.

Так как в начальный момент времени высокоэластическая деформация отсутствует, то мы можем сразу найти величину  $E$ :

$$E = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon}. \quad (1.25)$$

Зная модуль упругости, можно определить величину высокоэластической деформации в каждый момент времени:

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon - \frac{\sigma(t)}{E}. \quad (1.26)$$

Дифференцируя (1.26) по времени, получим:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Далее функцию  $\sigma(t)$  необходимо численно продифференцировать по  $t$ , чтобы найти величину  $v_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon^*(t)}{\partial t}$  в каждый момент времени. Так как измерение напряжений выполнялось не через равные промежутки времени, то будем использовать метод неопределенных коэффициентов. Обозначим штрихом

производную по  $t$ . Для первой точки при  $t_1 = 0$  производную  $\sigma'$  запишем в виде линейной комбинации напряжений в данной точке и в двух расположенных рядом:

$$\sigma'_1 \approx c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3. \quad (1.28)$$

Если аппроксимация (1.28) справедлива для произвольной функции  $\sigma(t)$ , то она должна быть справедлива и для следующих функций:

$$\sigma = 1; \sigma = t - t_1 \text{ и } \sigma = (t - t_1)^2. \quad (1.29)$$

Вычислим производные функций (1.29):

$$\sigma' = 0; \sigma' = 1 \text{ и } \sigma' = 2(t - t_1). \quad (1.30)$$

Подставив каждую из функций (1.29) в (1.28), получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_1) = 1; \\ c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t_1)^2 = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Решая эту систему, найдем коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$ :

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{(t_2 - t_1)\left(1 - \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\right)}; \\ c_3 &= -c_2 \frac{(t_2 - t_1)^2}{(t_3 - t_1)^2}; \\ c_1 &= -(c_2 + c_3). \end{aligned} \quad (1.32)$$

В частном случае при  $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$  выражение для  $\sigma'_1$  примет вид:

$$\sigma'_1 \approx \frac{1}{2\Delta t}(-3\sigma_1 + 4\sigma_2 - \sigma_3). \quad (1.33)$$

Для точек с номерами  $i = 2 \dots n - 1$  производную  $\sigma'_i$  записываем в виде:

$$\sigma'_i = c_1\sigma_{i-1} + c_2\sigma_i + c_3\sigma_{i+1}. \quad (1.34)$$

Для определения коэффициентов  $c_1, c_2, c_3$  подставляем в (1.34) следующие функции:

$$\sigma = 1; \sigma = t - t_i; \sigma = (t - t_i)^2. \quad (1.35)$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_{i-1} - t_i) + c_3(t_{i+1} - t_i) = 1; \\ c_1(t_{i-1} - t_i)^2 + c_3(t_{i+1} - t_i)^2 = 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\Delta t_1 \left(1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right)}; \\ c_3 &= \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2^2 \left(1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right)}; \\ c_2 &= -(c_1 + c_3), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где  $\Delta t_1 = t_i - t_{i-1}$ ,  $\Delta t_2 = t_{i+1} - t_i$ .

В частном случае при равномерном шаге по времени ( $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$ ), получим известную формулу:

$$\sigma'_i \approx \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}}{2\Delta t}. \quad (1.38)$$

В последней точке  $\sigma'_n$  не определяем, считая, что  $\sigma'_n \approx 0$ .

В конце процесса релаксации скорость роста высокоэластической деформации равна нулю. Из этого условия можно получить величину  $E_\infty$ :

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &= \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*} = 0; \\ f^* &= \sigma - E_\infty \varepsilon^* = 0; \\ E_\infty &= \frac{\sigma(\infty)}{\varepsilon^*(\infty)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Зная величину  $E_\infty$ , можно найти в каждый момент времени значения  $f^*$  и  $\eta^* = f^*/v_\varepsilon$ . Прологарифмируем выражение для  $\eta^*$  в (1.23):

$$\ln \eta^* = \ln \left( \eta_0^* e^{-\frac{|f^*|}{m^*}} \right) = \ln \eta_0^* - \frac{|f^*|}{m^*}. \quad (1.40)$$

Из выражения (1.40) видно, что величина  $y = \ln \eta^*$  должна линейно зависеть от величины  $x = |f^*|$ , т. е.

$$y = ax + b, \text{ где } a = -1/m^*, b = \ln \eta_0^*.$$

Имея несколько значений  $\ln \eta^*$ , соответствующих различным величинам  $|f^*|$ , можно подобрать при помощи метода наименьших квадратов коэффициенты  $a$  и  $b$  и найти затем модуль скорости  $m^*$  и начальную релаксационную вязкость  $\eta_0^*$ .

Кривая изменения величины  $\ln \eta^*$  от  $|f^*|$ , полученная при обработке данных при  $T = 20^\circ\text{C}$ , представлена на рис. 1.3.

Отклонение от прямой на рис. 1.3 обусловлено рядом факторов, основные из которых — небольшое число точек по времени, что сказывается на погрешности численного дифференцирования, а также погрешности измерения напряжений в эксперименте.

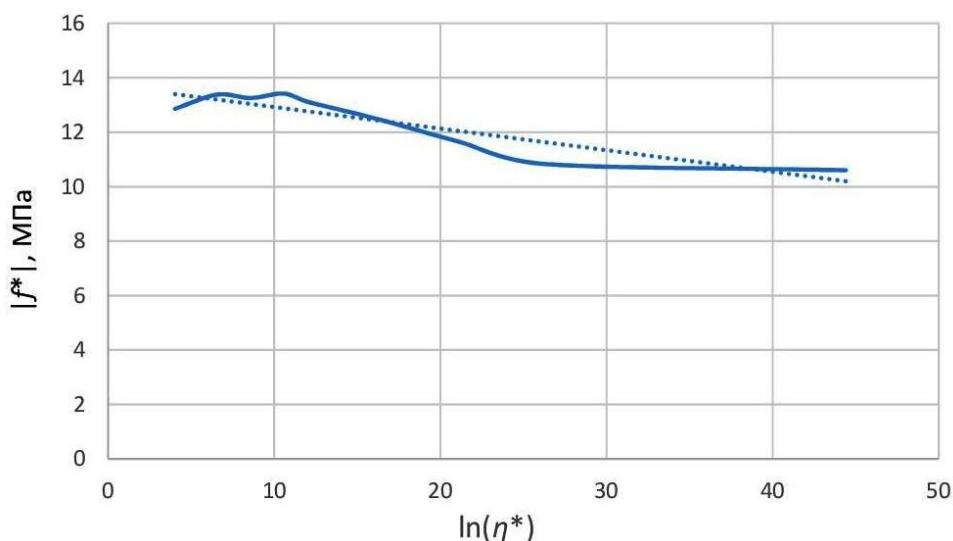


Рис. 1.3 — Изменение величины  $\ln \eta^*$  в зависимости от  $|f^*|$

Из опыта на релаксацию напряжений можно определить все параметры, входящие в уравнение Максвелла-Гуревича. Результаты обработки релаксационных кривых, представленных на рис. 1.2, сведены в табл. 1.12.

Табл. 1.12 — Упругие и релаксационные параметры вторичного ПВХ при различной температуре

$T, ^\circ\text{C}$	20	30	40	50	60	70
$E, \text{МПа}$	1480	1450	1310	1210	1110	780
$E_\infty, \text{МПа}$	5990	2975	1550	532	198	46.3
$m^*, \text{МПа}$	12.6	12.1	13.9	11.2	11.8	7.76
$\eta_0^* \cdot 10^{-5}, \text{МПа} \cdot \text{мин}$	9.06	5.17	2.81	0.891	0.48	0.256

Графики изменения в зависимости от температуры модуля упругости  $E$ , модуля высокоэластичности  $E_\infty$ , начальной релаксационной вязкости  $\eta_0^*$  и модуля скорости  $m^*$  представлены соответственно на рис. 1.4–рис. 1.7.

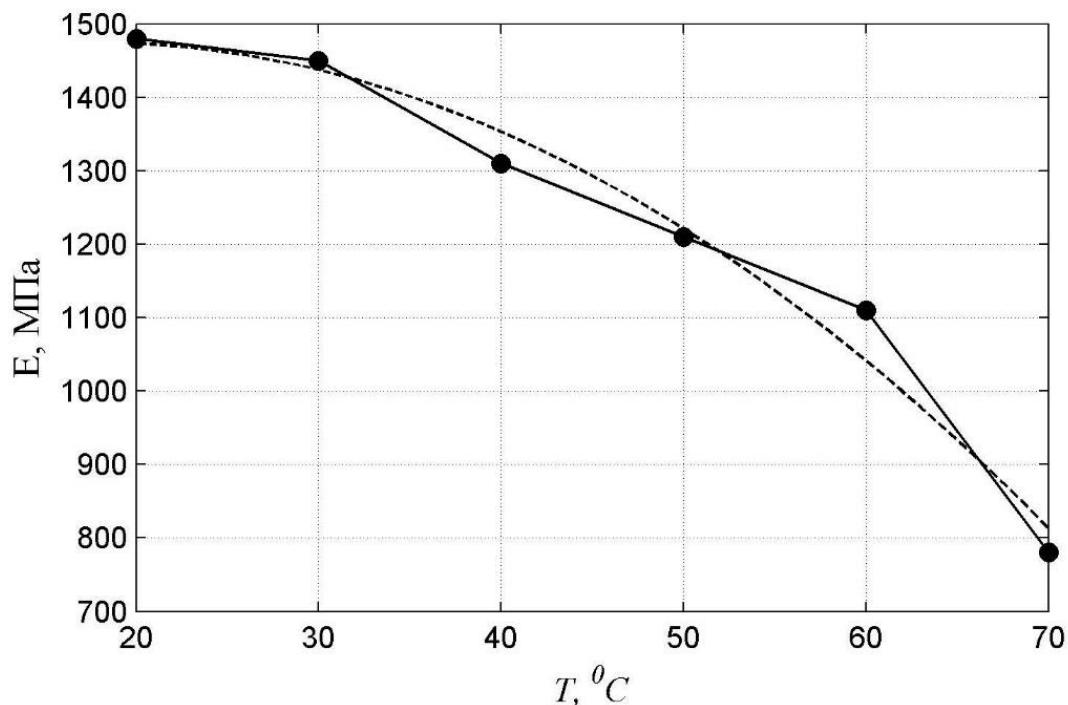


Рис. 1.4 — Зависимость модуля упругости вторичного ПВХ от температуры

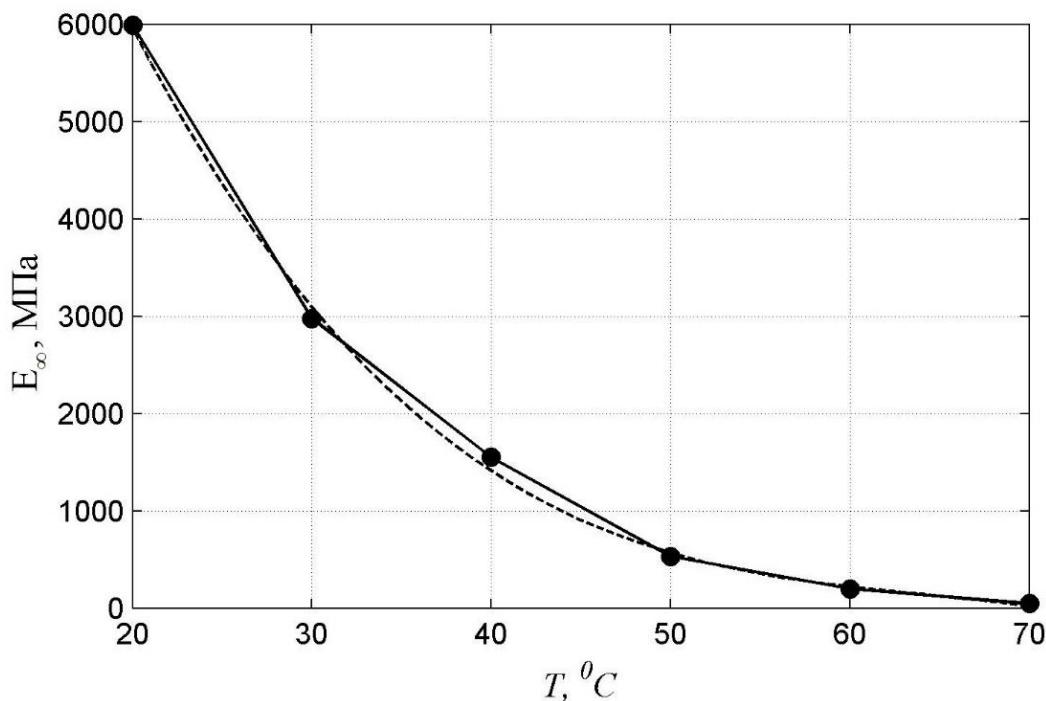


Рис. 1.5 — Зависимость модуля высокоэластичности от температуры

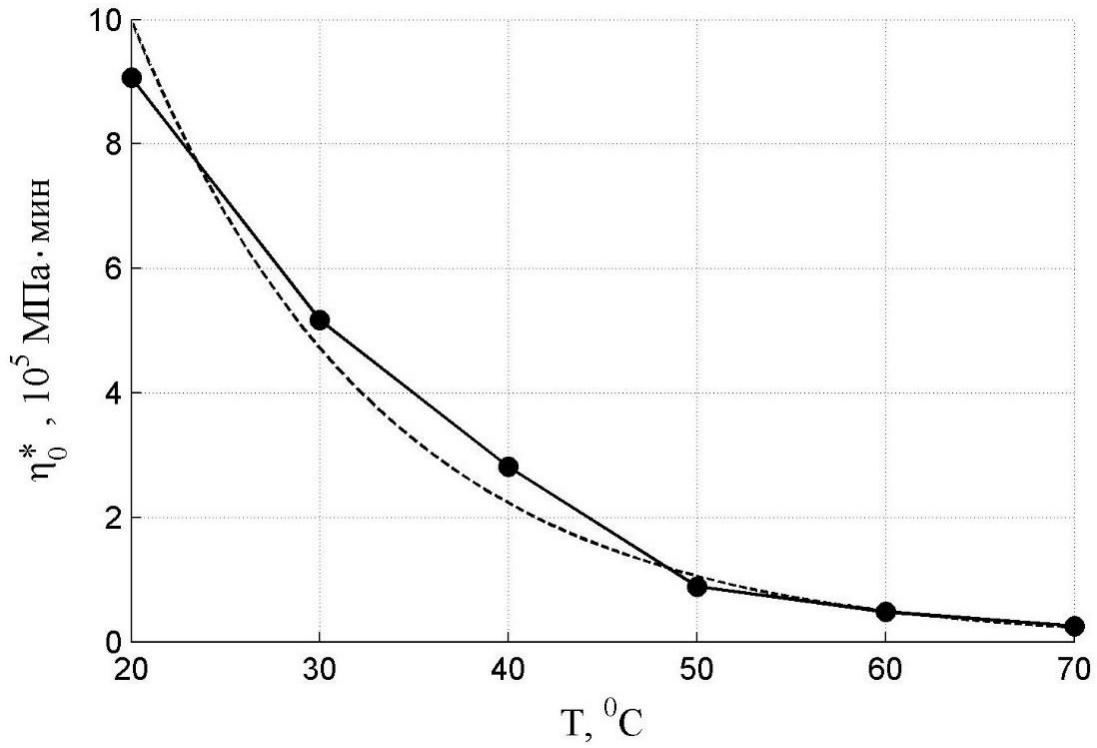


Рис. 1.6 — Зависимость начальной релаксационной вязкости от температуры

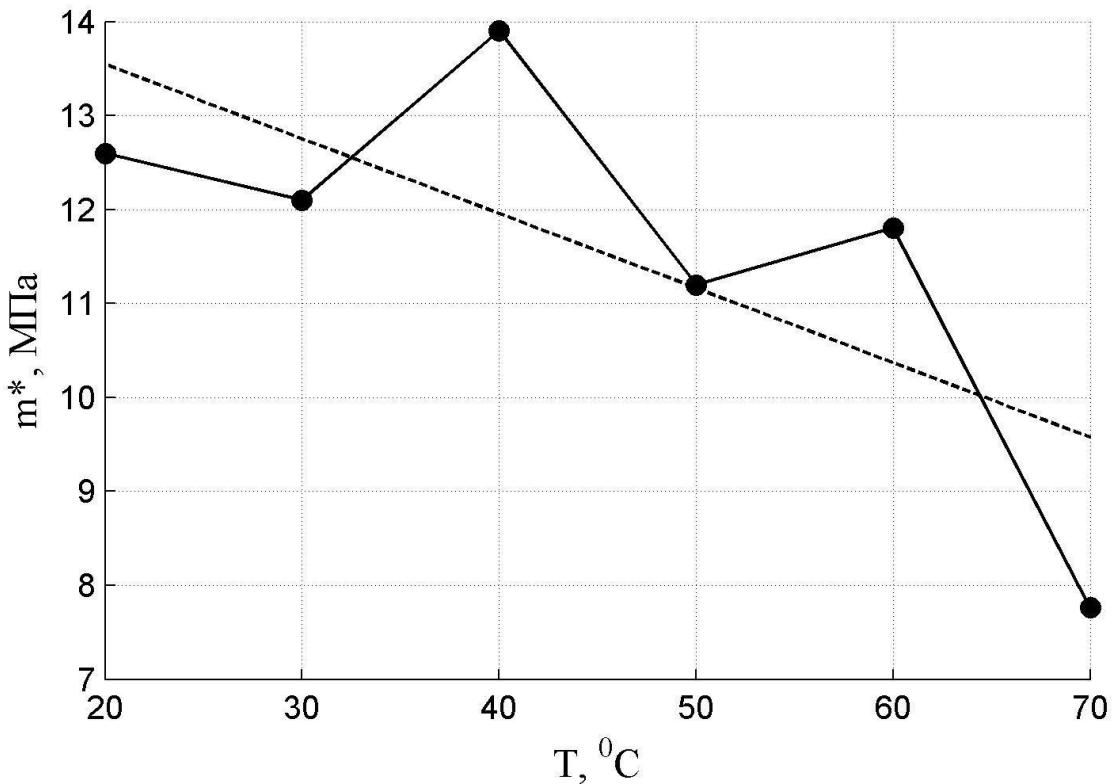


Рис. 1.7 — Изменение модуля скорости  $m^*$  в зависимости от температуры

Из рис. 1.4–рис. 1.7 видно, что модуль упругости, модуль высокомодульности, а также начальная релаксационная вязкость ПВХ сильно

зависят от температуры. Штриховыми линиями на каждом из графиков показаны аппроксимирующие кривые. Зависимость модуля упругости от температуры имеет вид:

$$E(T) = -0.2393T^2 + 8.3357T + 1402.6, [\text{МПа}], \quad (1.41)$$

где  $T$  — температура в градусах Цельсия.

Достоверность аппроксимации формулой (1.41)  $R^2 = 0.976$ . Зависимость модуля высокоэластичности от температуры с достоверностью  $R^2 = 0.9986$  аппроксимируется следующим образом:

$$E_\infty(T) = -0.0575T^3 + 11.095T^2 - 732T + 16618, [\text{МПа}]. \quad (1.42)$$

Связь между начальной релаксационной вязкостью и температурой достаточно точно (с  $R^2 = 0.989$ ) аппроксимируется экспоненциальной зависимостью:

$$\eta_0^*(T) = 44.78 \cdot 10^5 e^{-0.075T}, [\text{МПа} \cdot \text{мин}]. \quad (1.43)$$

Отметим, что для полимеров ЭДТ и ПММА зависимость начальной релаксационной вязкости от температуры также экспоненциальная [38, 44].

Величина модуля скорости при температуре от 20 до 60°C остается примерно постоянной, а при 70°C немного убывает. Предлагается аппроксимировать  $m^*(T)$  линейной функцией:

$$m^* = -0.0794T + 15.134, [\text{МПа}]. \quad (1.44)$$

На рис. 1.8 сплошными линиями показаны кривые релаксации, построенные на основе уравнения Максвелла-Гуревича и зависимостей (1.41)–(1.44). Треугольным маркерам соответствуют экспериментальные значения напряжений. При  $T = 20$  °C, 30 °C и 60 °C совпадение с данными эксперимента очень хорошее, при остальных температурах — удовлетворительное.

Также помимо ПВХ автором была выполнена обработка кривых релаксации первичного и вторичного полипропилена (ПП) при комнатной температуре, приведенных в работе [45] и представленных на рис. 1.10.

В табл. 1.13 представлены значение напряжений в различные моменты времени, соответствующие рис. 1.9.

Полученные в результате обработки кривых релаксации характеристики материала представлены в табл. 1.13.

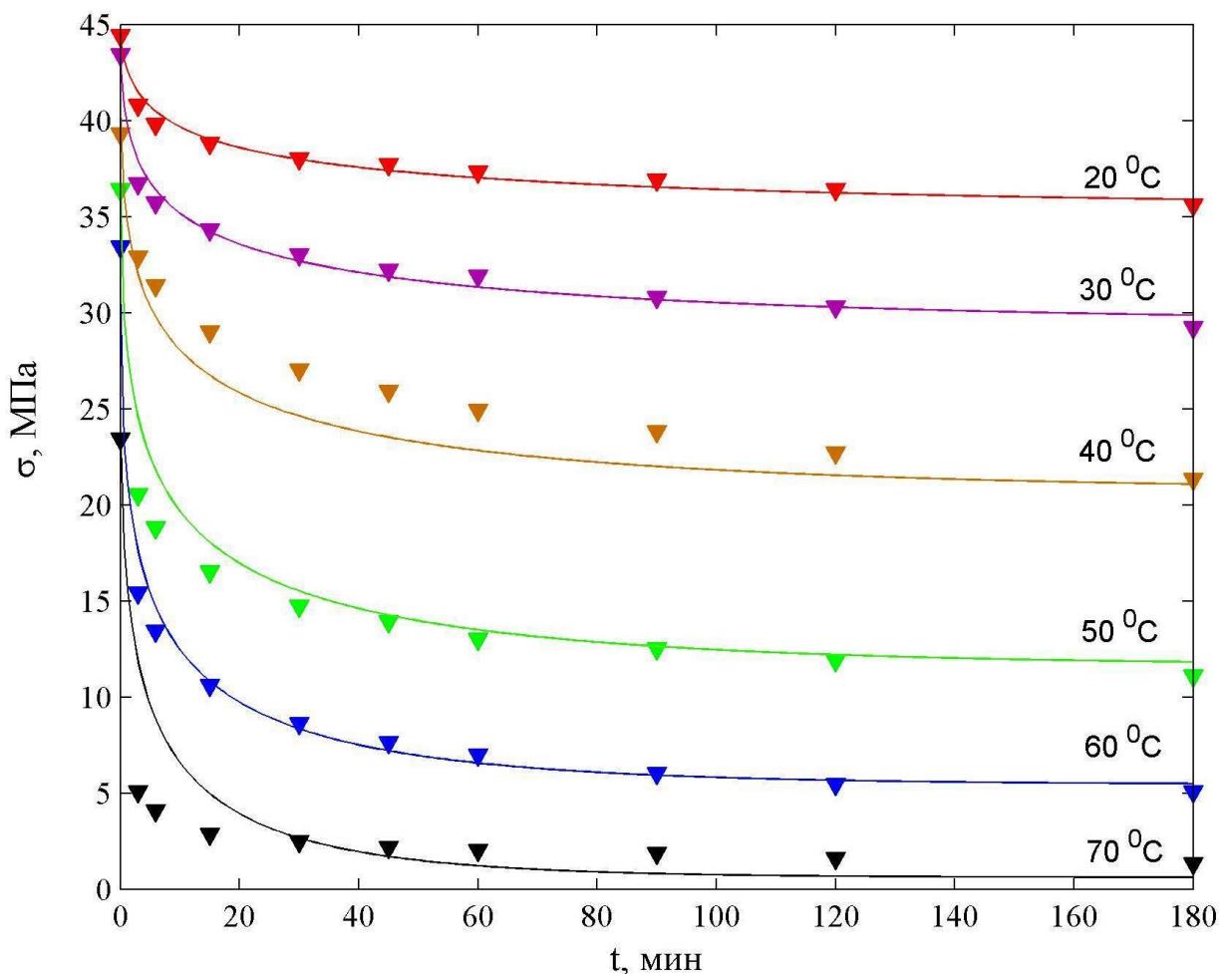


Рис. 1.8 — Экспериментальные кривые релаксации ПВХ и их аппроксимация

Табл. 1.13 — Изменение напряжений во времени для первичного ( $\sigma_1$ ) и вторичного ( $\sigma_2$ ) полипропилена

$t$ , мин	0	3	6	15	30	45	60	90	120	150	180
$\sigma_1$ , МПа	12,2	7,59	7,13	6,37	5,89	5,63	5,45	5,19	5,06	4,9	4,74
$\sigma_2$ , МПа	23,6	17,9	17	16	15,3	14,8	14,5	14,1	13,7	13,4	13,3

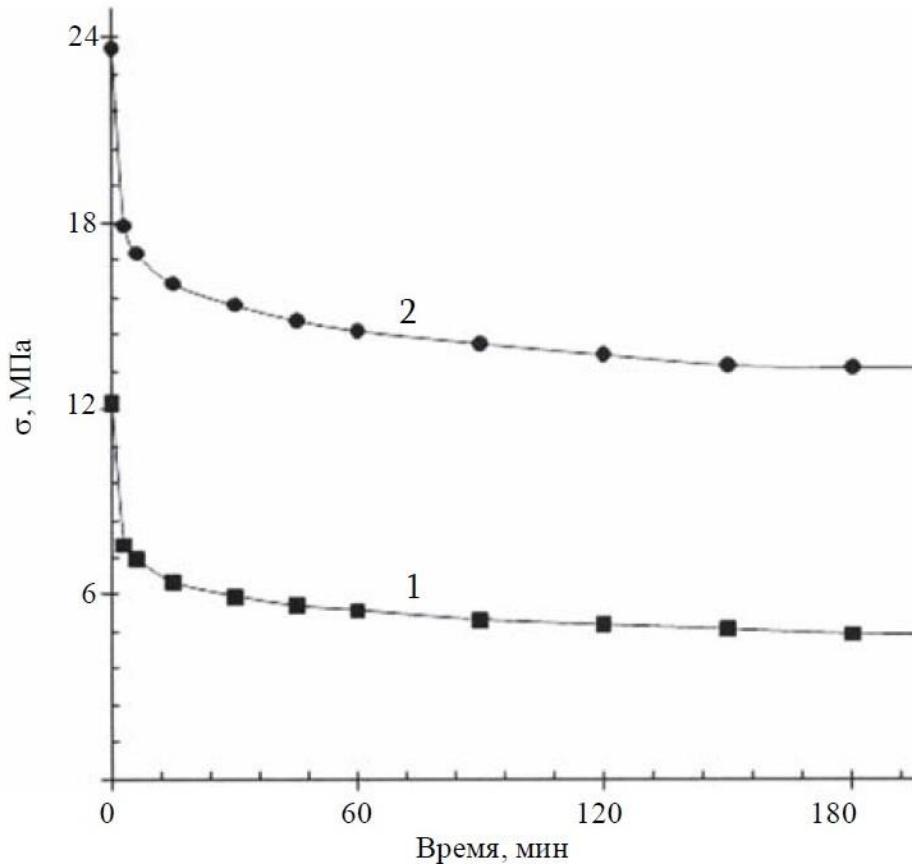


Рис. 1.9 — Кривые релаксации первичного (1) и вторичного (2) полипропилена при комнатной температуре, определенные при  $\varepsilon = 3\%$

Табл. 1.13 — Упругие и реологические параметры первичного и вторичного полипропилена при комнатной температуре

	$E$ , МПа	$E_\infty$ , МПа	$m^*$ , МПа	$\eta_0^* \cdot 10^{-4}$ , МПа · мин
Первичный ПП	407,7	258,4	3,66	3,83
Вторичный ПП	787,7	1016	8,48	8,68

На рис. 1.10 сплошными линиями показаны кривые релаксации, построенные на основе нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича и релаксационных констант, приведенных в табл. 1.13. Штриховыми линиями соответствует аппроксимация на основе линейного уравнения Максвелла-Томпсона, имеющего вид:

$$nE \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + H\varepsilon = n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma, \quad (1.45)$$

где  $H$  и  $E$  — соответственно мгновенный и длительный модули упругости;  $n$  — время релаксации;  $\varepsilon$  — полная деформация.

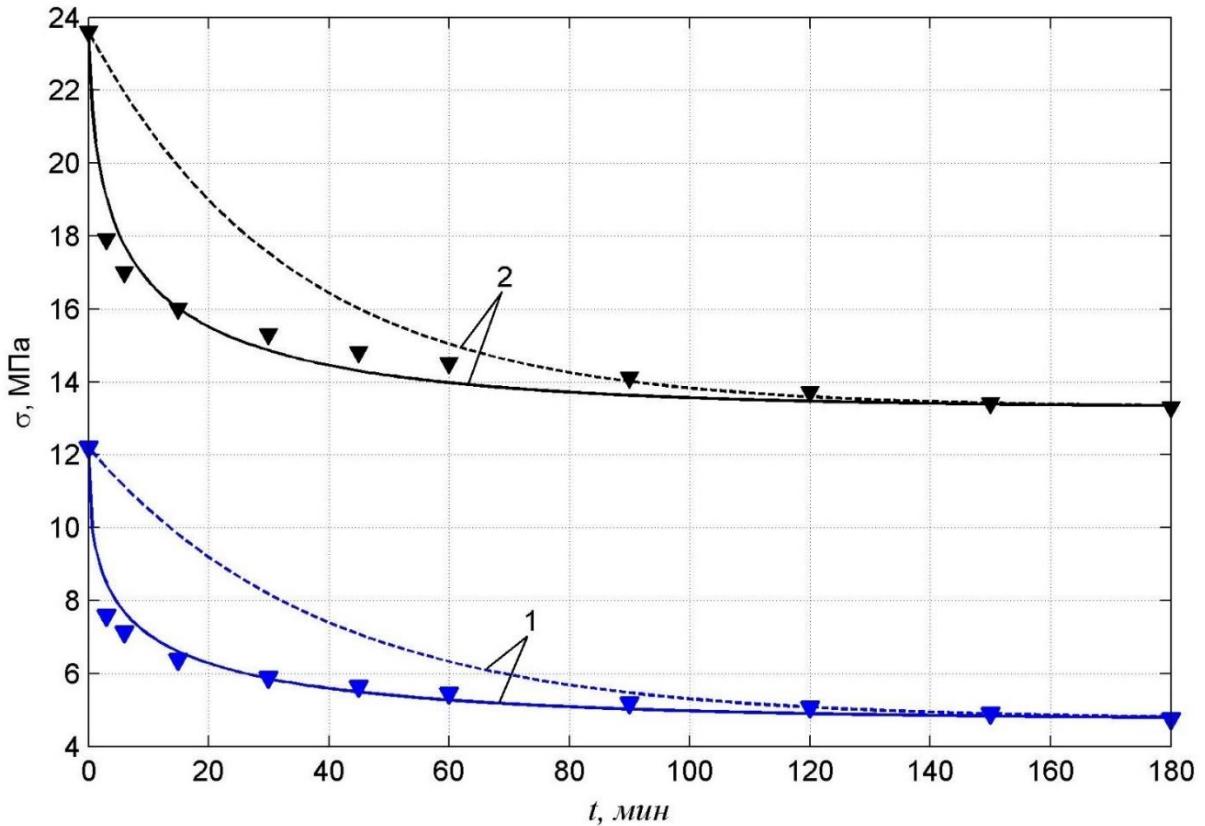


Рис. 1.10 — Аппроксимация кривых релаксации полипропилена на основе уравнения Максвелла-Гуревича (сплошные линии) и Максвелла-Томпсона (штриховые линии)

Из рис. 1.10 видно, что уравнение Максвелла-Гуревича хорошо аппроксимирует экспериментальные данные, а линейное уравнение Максвелла-Томпсона дает неудовлетворительные результаты в начале процесса релаксации.

## ГЛАВА 2. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОСЛОЙНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ЦИЛИНДРОВ

### 2.1 Плоское напряженное состояние полимерного цилиндра

Рассмотрим толстостенный цилиндр, находящийся в условиях плоского напряженного состояния (ПНС), испытывающий действие внутреннего давления  $p_a$  и внешнего давления  $p_b$  (рис. 2.1).

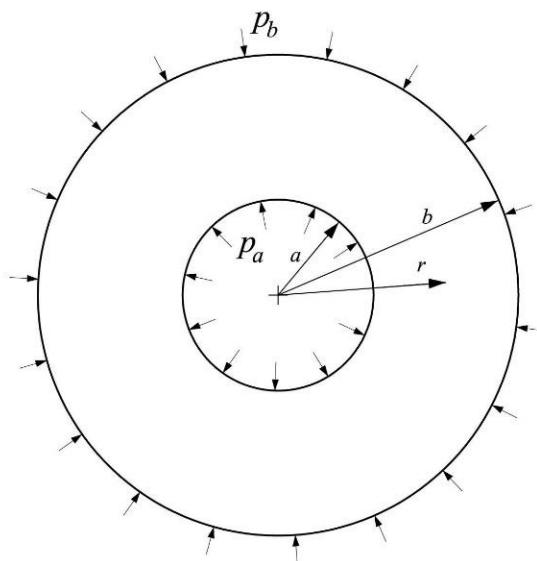


Рис. 2.1 — Толстостенный цилиндр под действием внутреннего и внешнего давления

Будем считать, что температура цилиндра, а также модуль упругости и все релаксационные характеристики материала являются функциями от радиуса  $r$  и времени  $t$ .

Связь между напряжениями и деформациями для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \varepsilon_r^* + \alpha\Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \varepsilon_\theta^* + \alpha\Delta T,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $\varepsilon_r^*$ ,  $\varepsilon_\theta^*$  — деформации ползучести.

В случае плоской осесимметричной задачи связь между перемещениями и деформациями записывается в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Из соотношений (2.2) может быть получено уравнение совместности деформаций:

$$\begin{aligned}u &= \varepsilon_\theta r; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_\theta r) = \varepsilon_\theta + r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}; \\ \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Уравнение равновесия для плоской осесимметричной задачи записывается в виде:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.\tag{2.4}$$

Из (2.4) можно выразить напряжение  $\sigma_\theta$ :

$$\sigma_\theta = r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r.\tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.1), а затем (2.1) в (2.3), получим следующее разрешающее уравнение в напряжениях:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \left( \frac{3}{r} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \sigma_r \left( \frac{1-\nu}{rE} \frac{\partial E}{\partial r} \right) = -\frac{E}{r} \left( \frac{\partial \varepsilon_\theta^*}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\alpha \Delta T) + \frac{\varepsilon_\theta^* - \varepsilon_r^*}{r} \right).\tag{2.6}$$

Границные условия для уравнения (2.6) записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r(a) &= -p_a; \\ \sigma_r(b) &= -p_b.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Чтобы получить решение задачи в перемещениях, в (2.1) напряжения выражают через деформации:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha \Delta T - (\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*)) = \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha \Delta T - (\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*) \right); \\
\sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r - (1+\nu)\alpha \Delta T - (\varepsilon_\theta^* + \nu \varepsilon_r^*)) = \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} - (1+\nu)\alpha \Delta T - (\varepsilon_\theta^* + \nu \varepsilon_r^*) \right);
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Разрешающее уравнение получается путем подстановки (2.8) в (2.4):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{u}{r} \left( \frac{\nu}{E} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \\
&= (1+\nu) \left( \frac{\partial}{\partial r} (\alpha \Delta T) + \alpha \Delta T \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*) \\
&+ (\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*) \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r^* - \varepsilon_\theta^*}{r} (1-\nu).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) можно переписать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{u}{r} \left( \frac{\nu}{E} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial r} [E(\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*) + (1+\nu)\alpha \Delta T] + \frac{\varepsilon_r^* - \varepsilon_\theta^*}{r} (1-\nu).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Границные условия для уравнения (2.10) такие же, как и для уравнения (2.7), но напряжения  $\sigma_r(a)$  и  $\sigma_r(b)$  должны быть выражены через перемещения при помощи (2.8).

Решение плоской осесимметричной задачи методом конечных разностей для однослойного цилиндра приводится в работах [46, 47, 48, 49, 50]. В настоящей работе решение будет выполнено при помощи метода конечных элементов, который позволяет рассчитывать и многослойные цилиндры.

Перепишем соотношения (2.1) в матричном виде:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \{\sigma\} + \{\varepsilon_B\}, \tag{2.11}$$

где  $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}$  — вектор напряжений;  $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix}$  — вектор полных деформаций;

$\{\varepsilon_B\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \end{Bmatrix}$  — вектор вынужденных (неупругих) деформаций.

Выразим из (2.11) напряжения через деформации:

$$\{\sigma\} = \left( \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_B\}) = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_B\}), \quad (2.12)$$

где  $[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}$ .

Будем использовать одномерный элемент с двумя узлами и одной степенью свободы в узле — перемещением  $u$  вдоль радиуса (рис. 2.2).

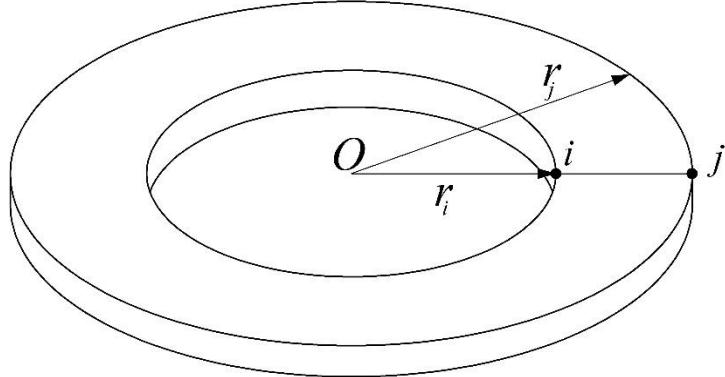


Рис. 2.2 — Конечный элемент для плоской осесимметричной задачи

Запишем связь между перемещениями и деформациями (2.2) в матричном виде:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

В пределах элемента перемещение  $u$  является линейной функцией от радиуса:

$$u(r) = N_i u_i + N_j u_j = \{N_i \quad N_j\} \{U\}, \quad (2.14)$$

где  $N_i, N_j$  — функции формы;  $\{U\} = \{u_i \quad u_j\}^T$  — вектор узловых перемещений.

$$N_i = 1 - \frac{r - r_i}{r_j - r_i} = \frac{r_j - r}{r_j - r_i}; \quad (2.15)$$

$$N_j = \frac{r - r_i}{r_j - r_i}.$$

Подставив (2.14) в (2.13), получим:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}, \quad (2.16)$$

$$\text{где } [B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_j - r_i} & \frac{1}{r_j - r_i} \\ \frac{N_i}{r} & \frac{N_j}{r} \end{bmatrix}.$$

Потенциальная энергия деформации элемента записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} 2\pi r dr, \quad (2.17)$$

где  $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_B\}$  — упругая деформация.

Подставим (2.12) и (2.16) в (2.17), считая, что в пределах элемента вынужденные деформации являются постоянными:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} (\{U\}^T \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D][B] 2\pi r dr \{U\} - 2\{U\}^T \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] 2\pi r dr \{\varepsilon_B\} + \\ & + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr \{\varepsilon_B\}^T [D]\{\varepsilon_B\}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Применяя вариационный принцип Лагранжа, заключающийся в минимизации полной энергии  $\mathcal{E}$ , получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \{U\}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} + \frac{\partial A}{\partial \{U\}} = [K]\{U\} - \{F_B\} - \{F\} = 0, \quad (2.19)$$

где  $A$  — работа внешних сил;  $[K]$  — локальная матрица жесткости;  $\{F_B\}$  — вклад вынужденных деформаций в вектор нагрузки;  $\{F\}$  — вектор внешних узловых нагрузок.

$$[K] = \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D][B] 2\pi r dr \approx [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] 2\pi \bar{r} (r_2 - r_1); \quad (2.20)$$

$$\{F_{\text{в}}\} = \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] 2\pi r dr \{\varepsilon_{\text{в}}\} \approx [\bar{B}]^T [D] 2\pi \bar{r} (r_2 - r_1) \{\varepsilon_{\text{в}}\},$$

где  $\bar{r} = (r_i + r_j)/2$ ;  $[\bar{B}]$  — матрица, в которой, в отличие от матрицы  $[B]$ , вместо переменных коэффициентов стоят постоянные, вычисленные при  $r = \bar{r}$ .

Была решена модельная задача для цилиндра из эпоксидного компаунда ЭДТ-10, имеющего внутренний радиус  $a = 8$  мм и внешний радиус  $b = 28$  мм. В качестве уравнения, устанавливающего связь между напряжениями и деформациями ползучести, применялось обобщенное уравнение Максвелла-Гуревича с одним членом спектра. Использовались эмпирические зависимости модуля упругости и релаксационных констант от температуры представленные в работах [38, 44]:

$$\begin{aligned} E &= -17.5T + 3525 \text{ [МПа];} \\ E_\infty &= -30T + 3150 \text{ [МПа];} \\ m^* &= -0.011T + 4.75 \text{ [МПа];} \\ \eta_0^* &= 104430 \cdot e^{-0.0275T} \text{ [МПа · ч].} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Температуру в зависимости (2.21) следует подставлять в градусах Цельсия. Температура цилиндра на внешней поверхности была постоянной —  $T_b = 28$  °C, а на внутренней росла в течение 1.2 часа от 28 °C до 100 °C с постоянной скоростью:

$$T_a = \begin{cases} T_0 + \beta t, & 0 \leq t \leq 1.2 \text{ ч;} \\ 100 \text{ °C,} & t > 1.2 \text{ ч,} \end{cases} \tag{2.22}$$

где  $\beta = 60$  град/ч.

Механическая нагрузка на цилиндр отсутствовала, т.е.  $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$ .

Решению задачи термовязкоупругости предшествовало определение температурного поля. Для этого использовалось уравнение теплопроводности Фурье, которое в случае плоской осесимметричной задачи имеет вид:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - W, \tag{2.23}$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\rho_0$  — плотность материала;  $c$  — удельная теплоемкость;  $W$  — плотность внутренних источников тепловыделения.

Предполагалось, что внутренние источники тепловыделения отсутствуют, т.е.  $W = 0$ . Границные условия для уравнения (2.23) записываются в виде:

$$T(a) = T_a, \quad T(b) = T_b. \quad (2.24)$$

Задача теплопроводности решалась при помощи метода конечных элементов.

Решение уравнения (2.23) с граничными условиями (2.24) соответствует минимуму следующего функционала:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - W \right) T \right] dV. \quad (2.25)$$

При  $W = 0$  функционал  $\chi$  для одного элемента перепишется в виде:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\lambda}{2} \int_V \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 dV + \rho_0 c \int_V \frac{\partial T}{\partial t} T dV = \\ &= 2\pi \left( \frac{\lambda}{2} \int_{r_i}^{r_j} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 r dr + \rho_0 c \int_{r_i}^{r_j} \frac{\partial T}{\partial t} Tr dr \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Температура в пределах элемента аппроксимируется следующим образом:

$$T(r) = N_i T_i + N_j T_j = \{N_i \quad N_j\} \{T\}, \quad (2.27)$$

где  $\{T\} = \{T_i \quad T_j\}^T$  — вектор узловых значений температуры.

Функции формы  $\{N_i \quad N_j\}$  определяются выражением (2.15). Первая производная от температуры по  $r$  запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad \frac{\partial N_j}{\partial r} \right\} \{T\} = \left\{ -\frac{1}{r_j - r_i} \quad \frac{1}{r_j - r_i} \right\} \{T\}. \quad (2.28)$$

Первый интеграл в (2.26) с учетом (2.28) примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_j} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 r dr &= \{T\}^T \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r_j - r_i} \\ \frac{1}{r_j - r_i} \end{Bmatrix} \left\{ -\frac{1}{r_j - r_i} \quad \frac{1}{r_j - r_i} \right\} \{T\} \int_{r_i}^{r_j} r dr = \\ &= \{T\}^T \frac{1}{(r_j - r_i)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{T\} \frac{r^2}{2} \Big|_{r_i}^{r_j} = \frac{1}{2} \{T\}^T \frac{r_j + r_i}{r_j - r_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{T\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Второй интеграл в (2.26) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\int_{r_i}^{r_j} T \frac{\partial T}{\partial t} r dr &= \int_{r_i}^{r_j} \{T\}^T \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} (\{N_i\} \{N_j\} \{T\}) r dr = \\
&= \{T\}^T \int_{r_i}^{r_j} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} \{N_i\} \{N_j\} r dr \frac{\partial \{T\}}{\partial t} = \\
&= \{T\}^T \frac{r_j - r_i}{12} \begin{bmatrix} 3r_i + r_j & r_i + r_j \\ r_i + r_j & r_i + 3r_j \end{bmatrix} \frac{\partial \{T\}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

После минимизации функционала  $\chi$  по узловым значениям температуры задача сводится к системе линейных дифференциальных уравнений, имеющей вид:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K]\{T\} = 0, \tag{2.31}$$

где  $[K]$  — матрица теплопроводности;  $[C]$  — матрица демпфирования.

Локальные матрица теплопроводности и матрица демпфирования записываются в виде:

$$[K^{(e)}] = \pi \lambda \cdot \frac{r_j + r_i}{r_j - r_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

$$[C^{(e)}] = \pi \rho_0 c \frac{r_j - r_i}{6} \begin{bmatrix} 3r_i + r_j & r_i + r_j \\ r_i + r_j & r_i + 3r_j \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Для производной температуры по времени принималась линейная аппроксимация:

$$\frac{\partial \{T\}}{\partial t} = \frac{\{T_t\} - \{T_{t-\Delta t}\}}{\Delta t}, \tag{2.34}$$

где  $\{T_t\}$  — вектор температур в узлах в текущий момент времени  $t$ ;  $\{T_{t-\Delta t}\}$  — вектор узловых температур в момент времени  $t - \Delta t$ .

Индекс « $t$ » у вектора  $\{T_t\}$  далее будет опущен. С учетом аппроксимации (2.34) система (2.33) в момент времени  $t$  сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left( [K] + \frac{[C]}{\Delta t} \right) \{T\} = \frac{[C]}{\Delta t} \{T_{t-\Delta t}\}. \tag{2.35}$$

Таким образом, зная распределение температур в толще цилиндра в момент времени  $t$ , можно найти распределение температур в момент времени  $t + \Delta t$ .

Задача решалась при коэффициенте температуропроводности  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho_0 c} = 388 \text{ мм}^2/\text{ч}$ . На рис. 2.3 представлено распределение температуры по радиусу в различные моменты времени.

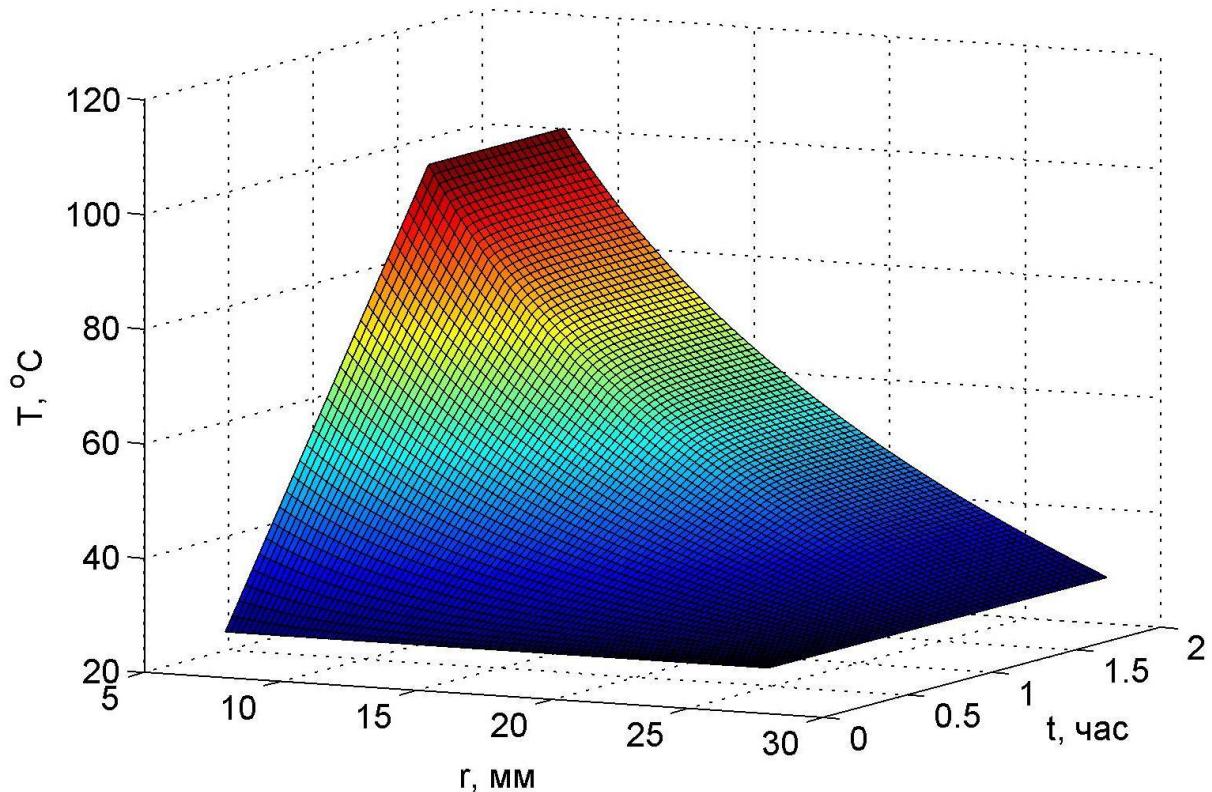


Рис. 2.3 — Изменение температуры в зависимости от  $r$  и  $t$

Графики изменения в зависимости от  $r$  и  $t$  модуля упругости  $E$ , начальной релаксационной вязкости  $\eta_0^*$ , модуля скорости  $m^*$ , модуля высокоэластичности  $E_\infty$  показаны соответственно на рис. 2.4–рис. 2.7.

При решении задачи термовязкоупругости интервал времени, на котором рассматривался процесс ползучести, разбивался на  $n_t$  шагов  $\Delta t$ . Деформации ползучести в момент времени  $t + \Delta t$  определялись при помощи линейной аппроксимации производной по времени:

$$\varepsilon^*(t + \Delta t) = \varepsilon^*(t) + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (2.36)$$

Расчетная блок-схема представлена на рис. 2.8.

На рис. 2.9 и рис. 2.10 представлены соответственно графики изменения по толщине цилиндра напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в следующие моменты времени:  $t = 0.4 \text{ ч}$

(черная кривая),  $t = 1.2$  ч (красная кривая) и  $t = 13.4$  ч (фиолетовая кривая). Штриховой линии соответствует упругое решение.

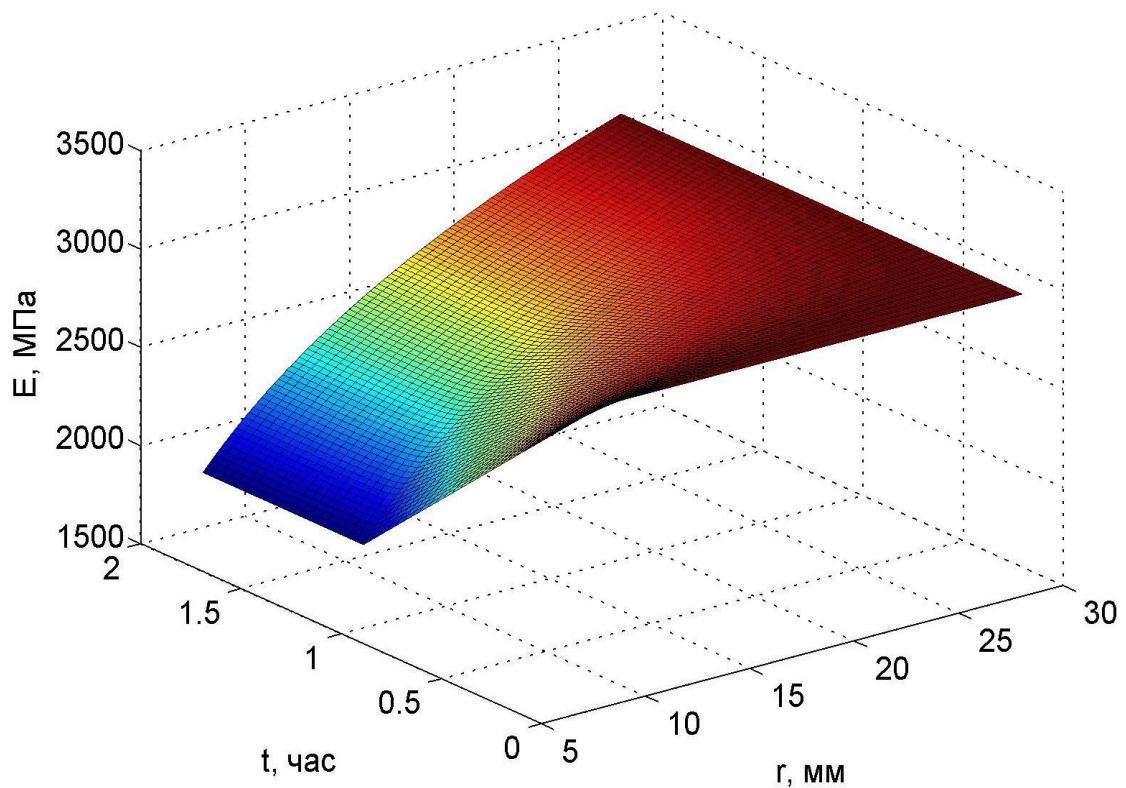


Рис. 2.4 — Изменение модуля упругости материала в зависимости от  $r$  и  $t$

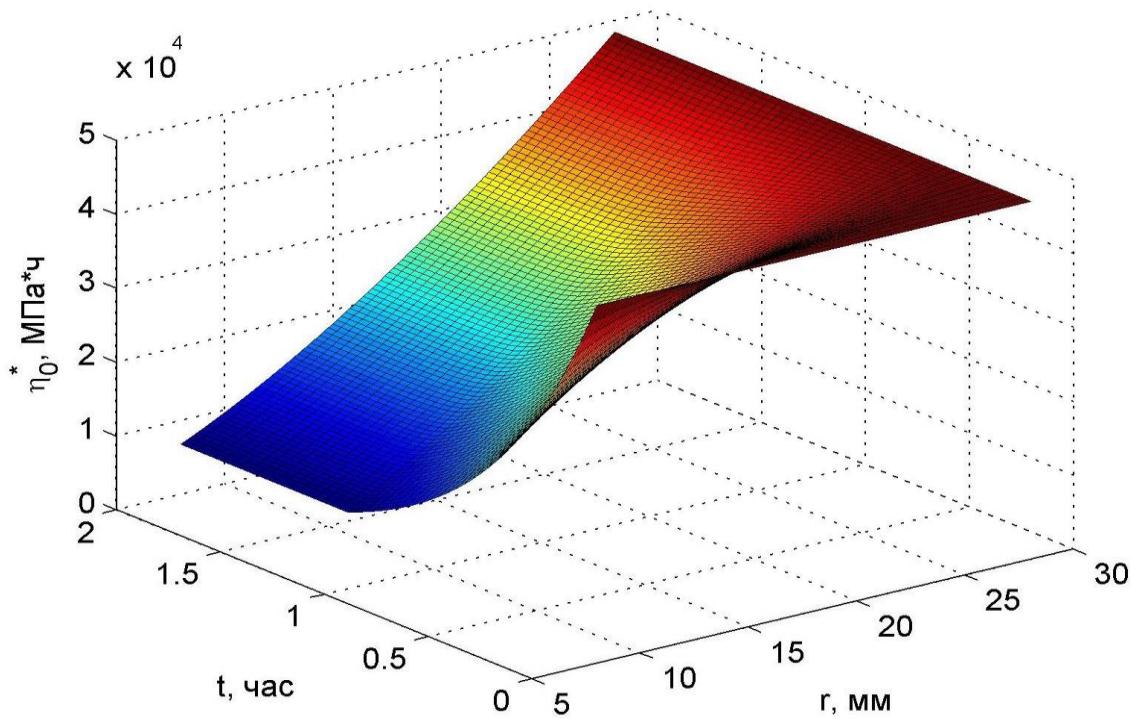


Рис. 2.5 — Изменение начальной релаксационной вязкости в зависимости от  $r$  и  $t$

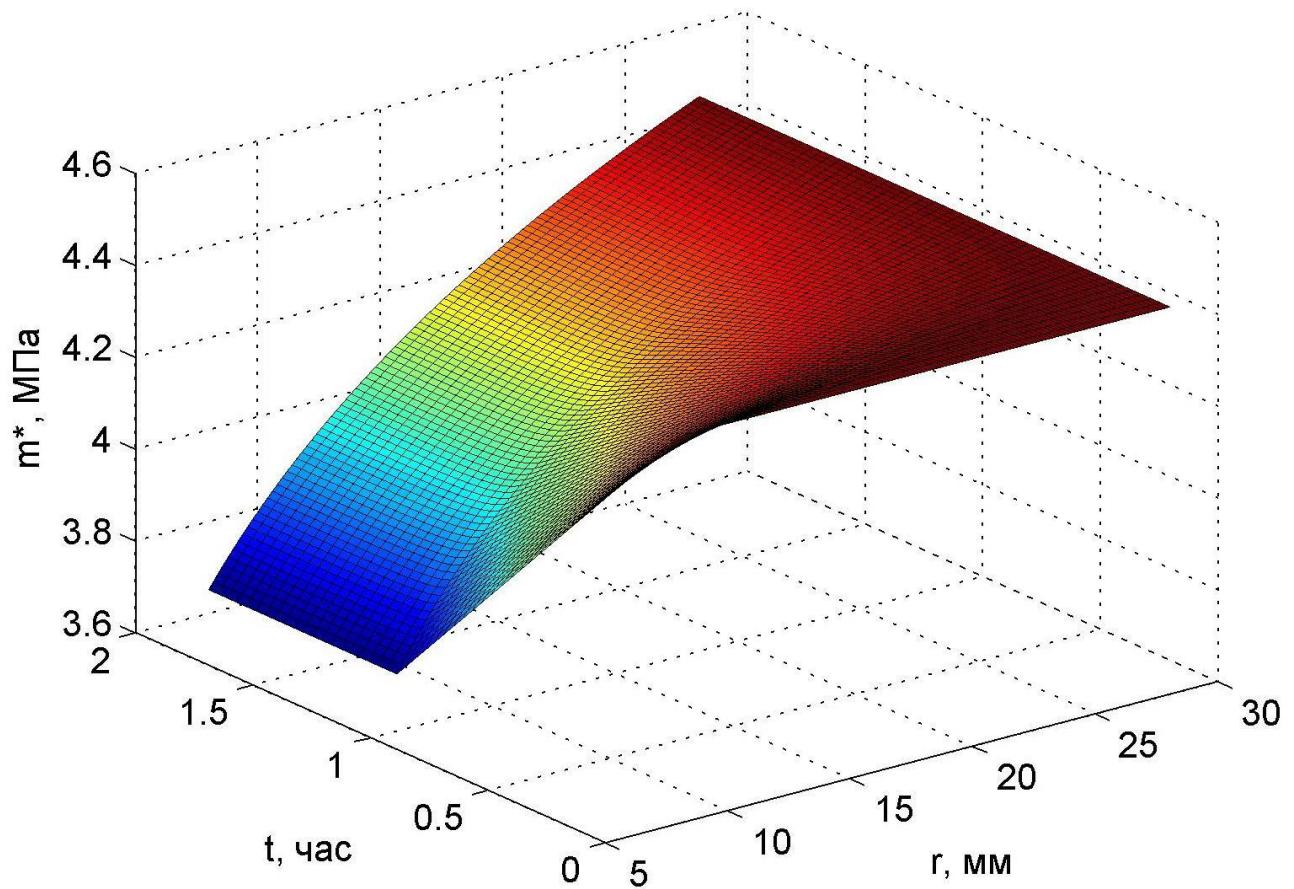


Рис. 2.6 — Изменение модуля скорости  $m^*$  в зависимости от  $r$  и  $t$

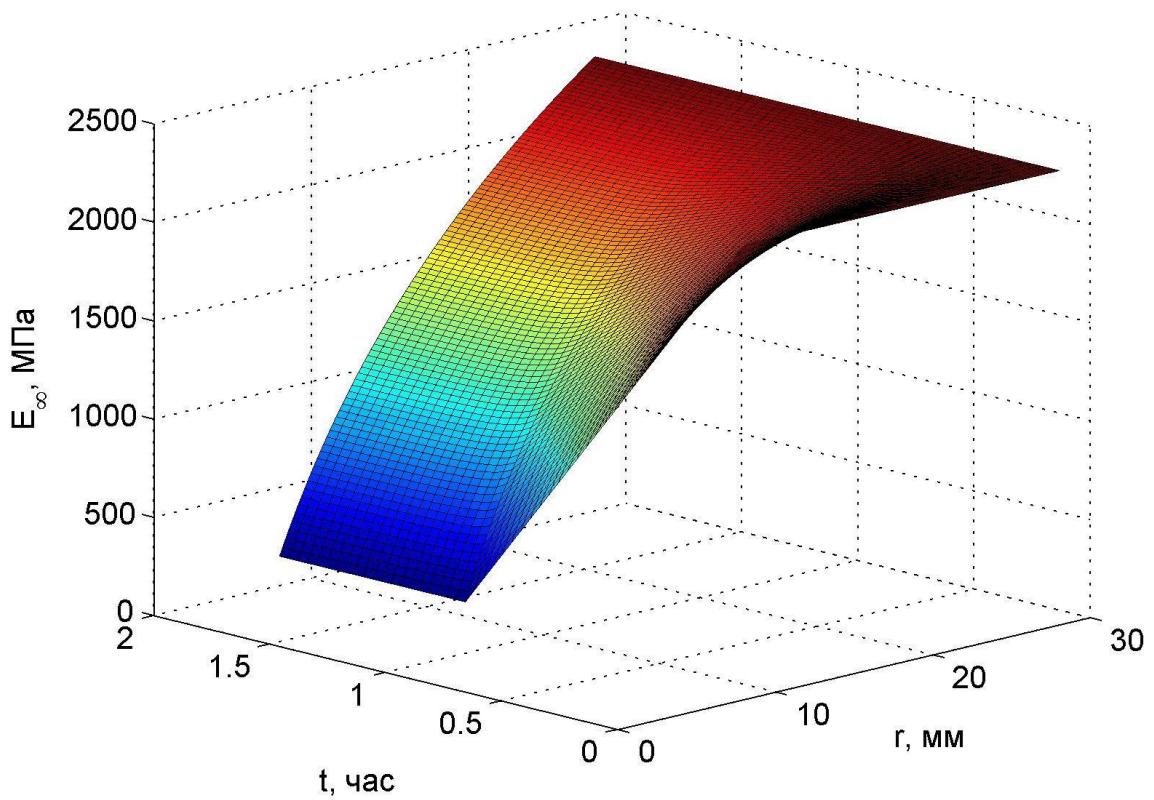


Рис. 2.7 — Изменение модуля высокой эластичности  $E_\infty$  в зависимости от  $r$  и  $t$

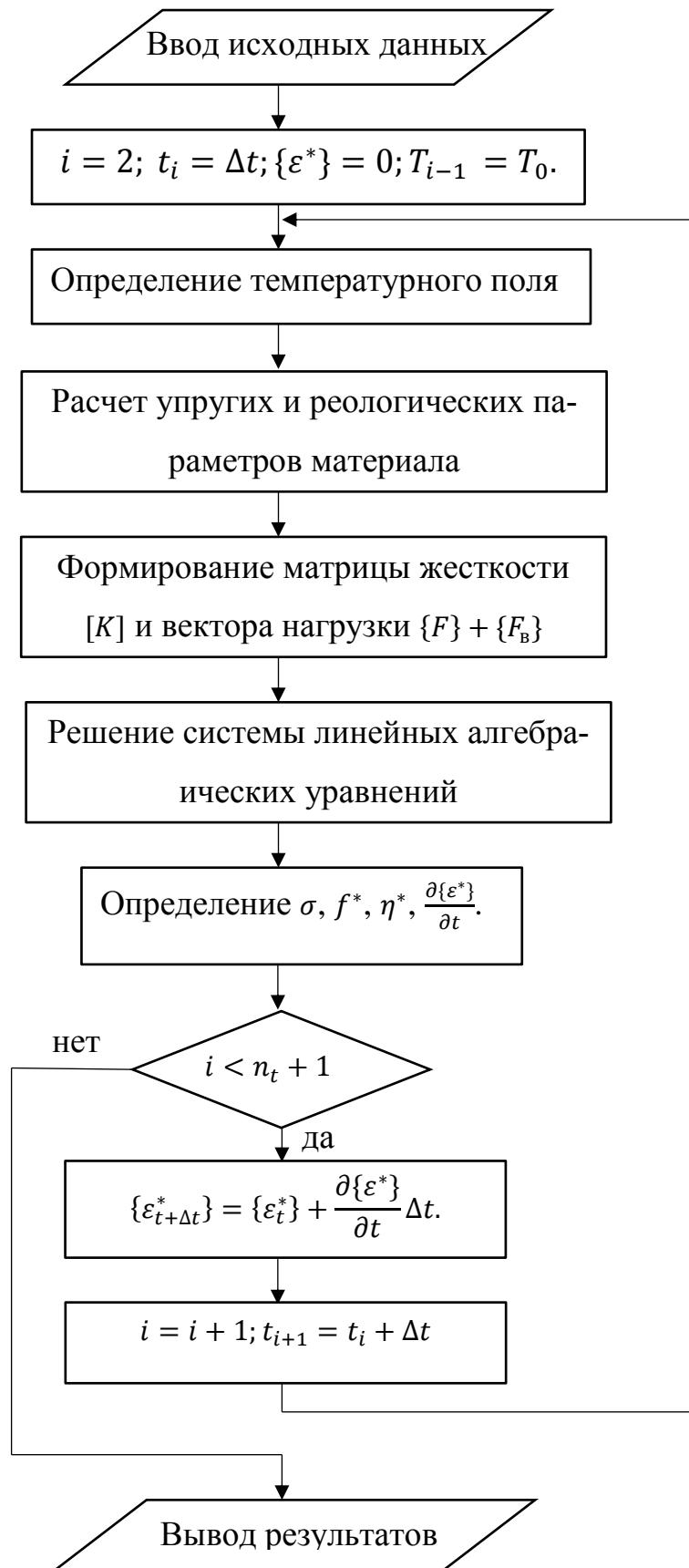


Рис. 2.8 — Расчетная блок-схема

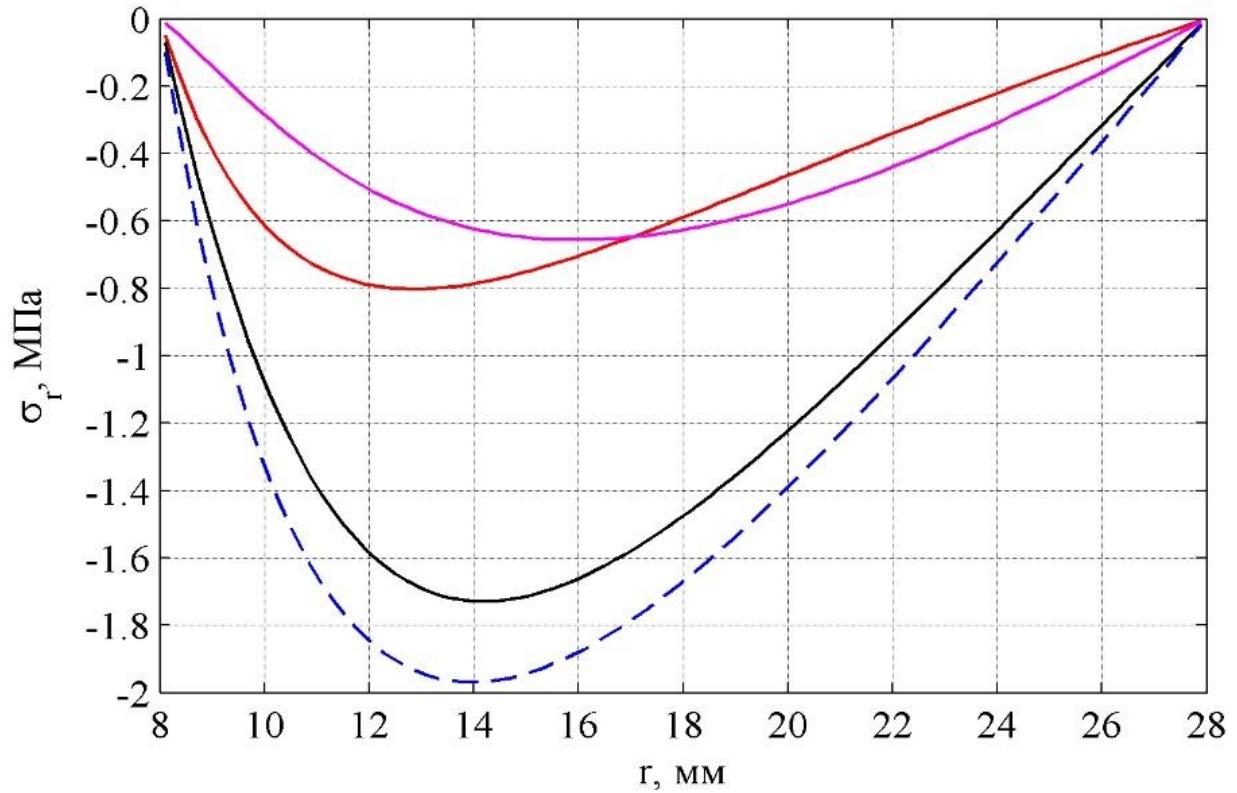


Рис. 2.9 — Распределение напряжений  $\sigma_r$  по толщине цилиндра в различные моменты времени

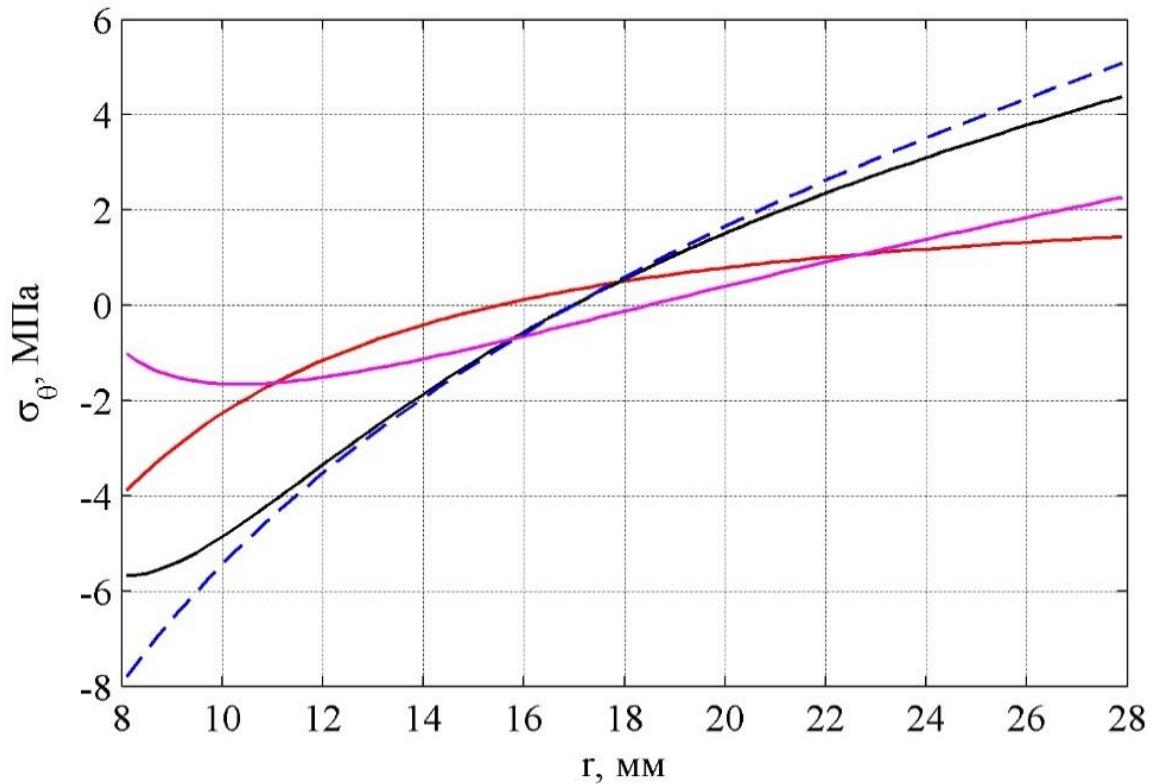


Рис. 2.10 — Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  по толщине цилиндра

Из рис. 2.9 и рис. 2.10 видно, что ползучесть материала оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние цилиндра. Как напряжения  $\sigma_r$ , так и напряжения  $\sigma_\theta$  по абсолютной величине с течением времени снижаются. Кроме того, меняется и характер кривых распределения радиальных и окружных напряжений по толщине цилиндра. На кривые изменения радиальных напряжений точка экстремума сместилась от внутренней поверхности ближе к середине толщи цилиндра.

Трехмерные графики, показывающие изменение в зависимости от  $r$  и  $t$  напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , а также радиальных перемещений  $u$  представлены соответственно на рис. 2.11–рис. 2.13. На графике  $\sigma_r(r, t)$  знаку «+» соответствует сжатие.

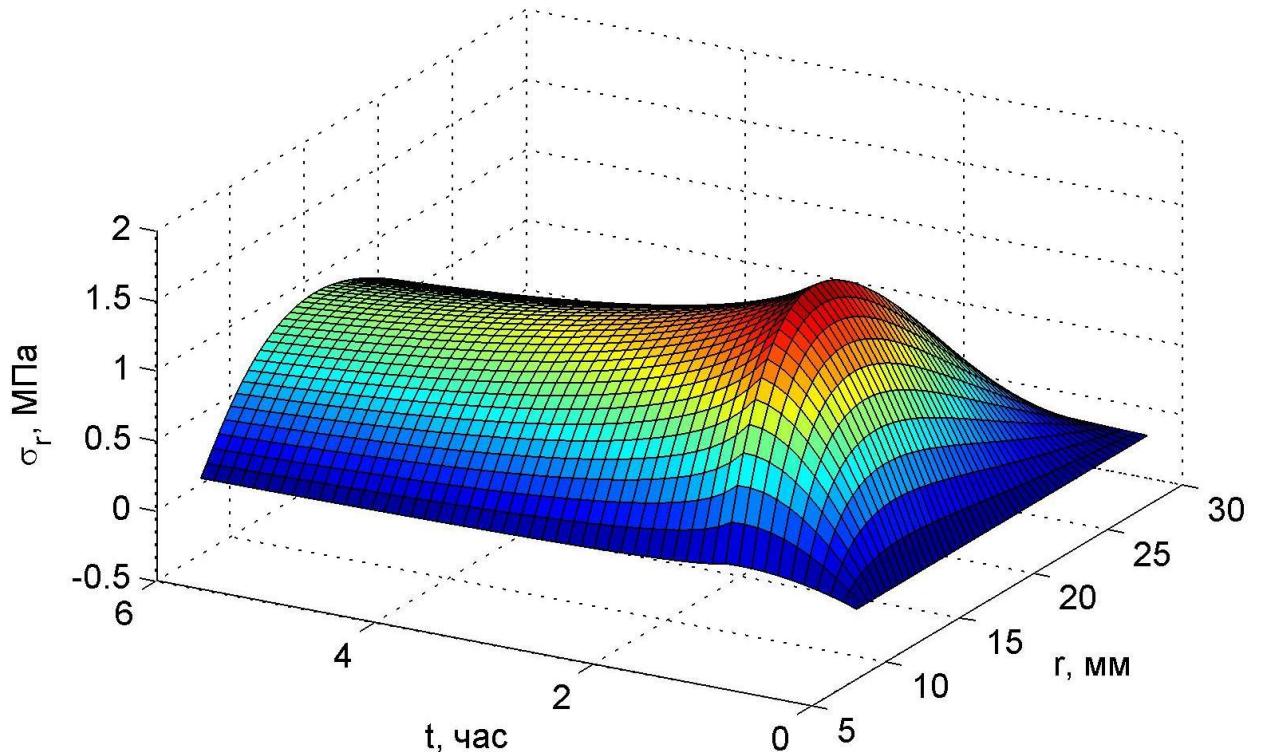


Рис. 2.11 — Изменение напряжений  $\sigma_r$  в зависимости от  $r$  и  $t$  (знаку «+» соответствуют сжимающие напряжения)

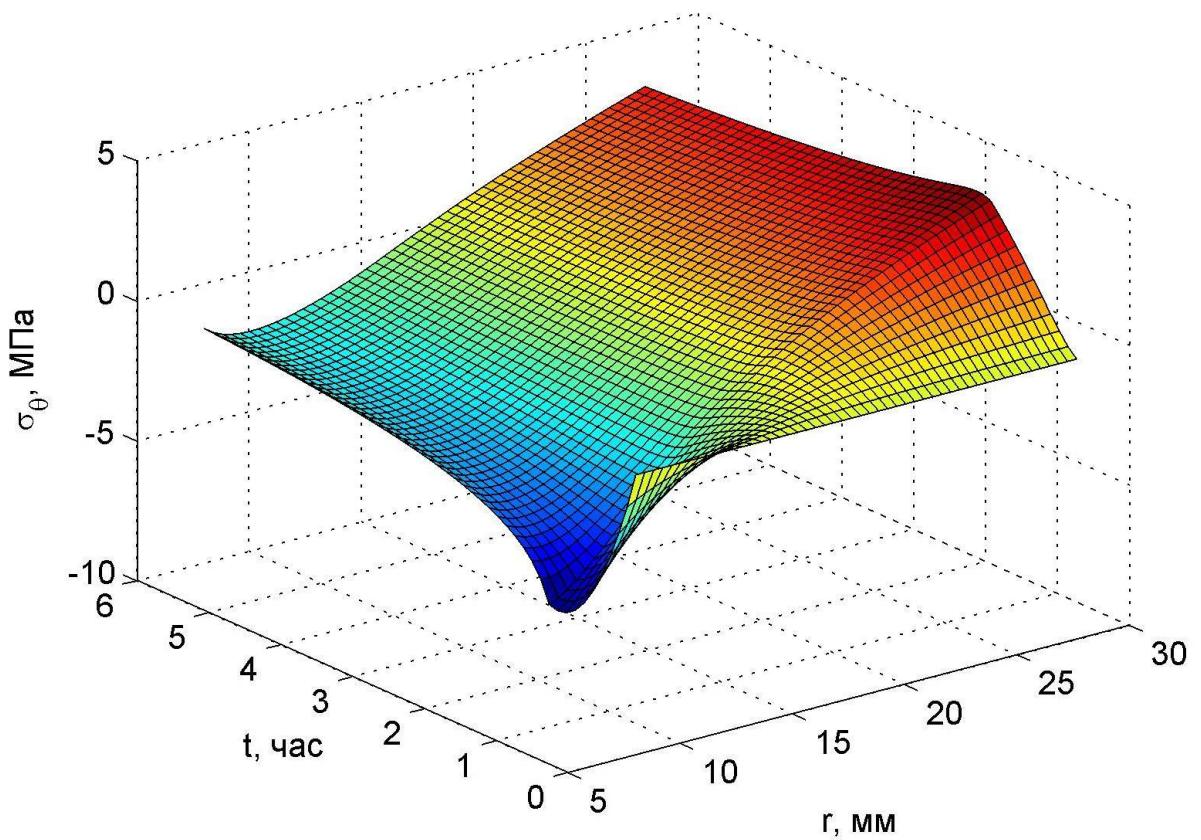


Рис. 2.12 — Изменение напряжений  $\sigma_\theta$  в зависимости от  $r$  и  $t$

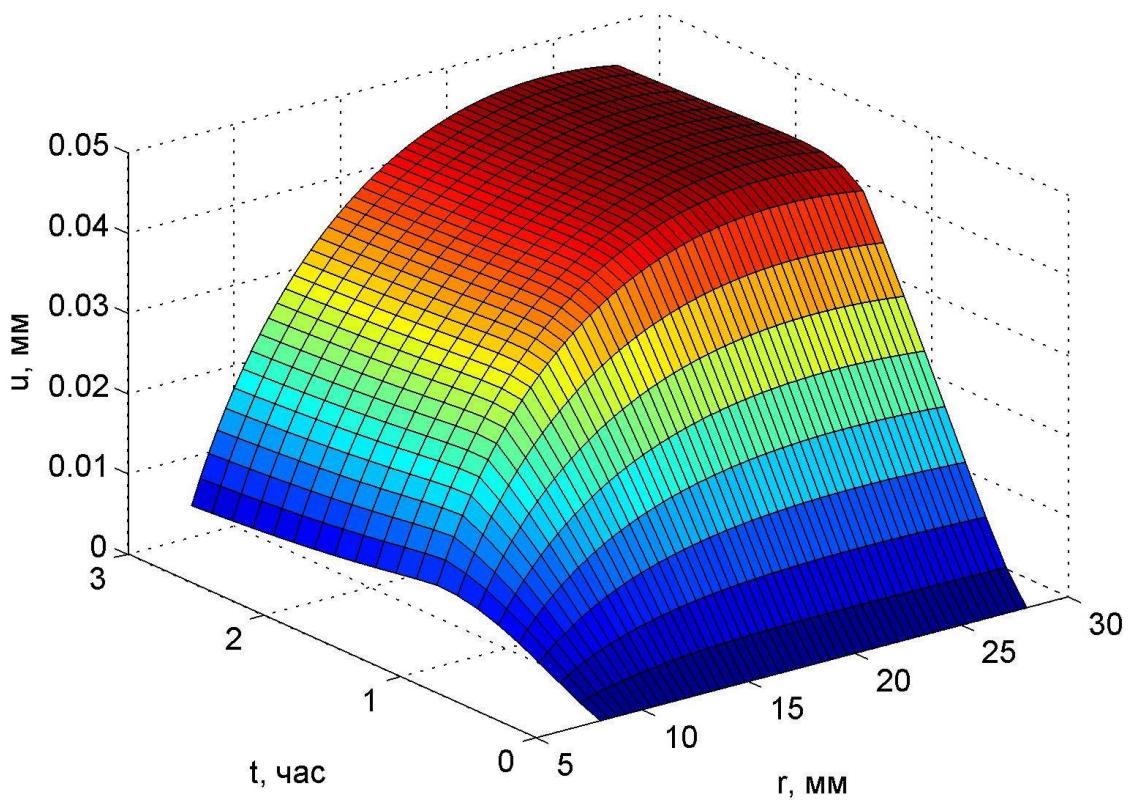


Рис. 2.13 — Изменение перемещений в зависимости от  $r$  и  $t$

Рис. 2.11 и рис. 2.12 показывают, что максимальные значения напряжения принимают в момент времени  $t = 1.2$  ч, когда прекращается нагрев, и далее происходит релаксация. Из рис. 2.13 видно, что рост перемещений происходит только до момента времени  $t = 1.2$  ч, далее перемещения практически не меняются.

В табл. 2.1 представлено сравнение перемещений у внешней поверхности цилиндра в различные моменты времени, полученных при помощи метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов при числе интервалов по радиусу  $n_r = 50$  и числе шагов по времени  $n_t = 20$ .

Табл. 2.1 — Сравнение результатов, полученных при помощи МКР и МКЭ

t, мин		18	36	54	72	90	108	126	144	162
$u \cdot 10^2$ , мм	МКР	0.899	2.040	3.181	4.262	4.519	4.533	4.511	4.487	4.466
	МКЭ	0.902	2.046	3.190	4.273	4.528	4.543	4.521	4.497	4.476

Из табл. 2.1 видно, что результаты, полученные при помощи двух методов, практически совпадают, что свидетельствует о их достоверности.

## 2.2 Плоская деформация однослоиного толстостенного цилиндра

Рассмотрим теперь достаточно протяженный по своей длине вязкоупругий толстостенный цилиндр, подверженный действию внутреннего и внешнего давления.

Данный цилиндр будет находиться в условиях плоского деформированного состояния (ПДС). Как и в предыдущем параграфе, считаем, что температура цилиндра является функцией от радиуса  $r$  и времени  $t$ . Все упругие и релаксационные характеристики сильно зависят от температуры, поэтому они также будут функциями координаты и времени.

В такой постановке данная задача решается методом конечных разностей в работах [46, 47, 48, 49, 50, 33]. В работе [33] приводится решение задачи в напряжениях.

Связь между напряжениями и деформациями для плоского деформированного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \varepsilon_r^* + \alpha\Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) + \varepsilon_\theta^* + \alpha\Delta T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)) + \varepsilon_z^* + \alpha\Delta T = 0.\end{aligned}\tag{2.37}$$

где  $\varepsilon_r^*$ ,  $\varepsilon_\theta^*$ ,  $\varepsilon_z^*$  — деформации ползучести.

Из (2.37) исключается напряжение  $\sigma_z$ :

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \nu(\sigma_\theta + \sigma_r) - E(\varepsilon_z^* + \alpha\Delta T); \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}((1 - \nu^2)\sigma_r - \nu(1 + \nu)\sigma_\theta) + \varepsilon_r^* + \nu\varepsilon_z^* + (1 + \nu)\alpha\Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}((1 - \nu^2)\sigma_\theta - \nu(1 + \nu)\sigma_r) + \varepsilon_\theta^* + \nu\varepsilon_z^* + (1 + \nu)\alpha\Delta T.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Затем выполняется подстановка (2.5) в (2.38) и далее полученные выражения для деформаций  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$  через напряжение  $\sigma_r$  подставляются в уравнение совместности деформаций (2.3). В итоге задача сводится к следующему дифференциальному уравнению относительно радиальных напряжений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r}\right) \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \sigma_r \frac{E(1 - 2\nu)}{r(1 - \nu)} \frac{\partial E}{\partial r} \\ = -\frac{E}{(1 - \nu^2)r} \left[ \frac{\partial \varepsilon_\theta^*}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(\alpha\Delta T)(1 + \nu) + \frac{\varepsilon_\theta^* - \varepsilon_r^*}{r} + \nu \frac{\partial \varepsilon_z^*}{\partial r} \right].\end{aligned}\tag{2.39}$$

Границные условия для уравнения (2.39) имеют вид (2.7).

Решение рассматриваемой задачи в перемещениях было впервые получено Б. М. Языевым в работе [48]. Для этого использовалась обратная форма соотношений (2.37), записанная через параметры Ламе:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(\theta - \theta^*) + 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_r^*) - 3K\varepsilon_T; \\ \sigma_\theta &= \lambda(\theta - \theta^*) + 2\mu(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^*) - 3K\varepsilon_T; \\ \sigma_z &= \lambda(\theta - \theta^*) + 2\mu(\varepsilon_z - \varepsilon_z^*) - 3K\varepsilon_T,\end{aligned}\tag{2.40}$$

где  $\varepsilon_T = \alpha\Delta T$  — температурная деформация;  $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$  — полная объемная деформация;  $\theta^* = \varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* + \varepsilon_z^*$  — объемная деформация ползучести;  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  — параметры Ламе.

С учетом гипотезы о равенстве нулю объемной деформации ползучести ( $\theta^* = 0$ ) задача свелась к следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} u'' + \left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} \right) u' - \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r(\lambda + 2\mu)} \right) u = \\ = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( (3K\alpha\Delta T)' + 2\mu \left( (\varepsilon_r^*)' - \frac{\varepsilon_\theta^* + \varepsilon_r^*}{r} \right) + 2\mu' \varepsilon_r^* \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Штрихом в уравнении (2.41) обозначена производная по радиусу. Решение уравнений (2.39) и (2.41) выполняется авторами при помощи метода конечных разностей.

В настоящей диссертационной работе будут получены разрешающие уравнения метода конечных элементов. С учетом равенства нулю объемной деформации ползучести соотношения (2.38) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 - \nu^2 & -\nu(1 + \nu) \\ -\nu(1 + \nu) & 1 - \nu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} + (1 + \nu)\alpha\Delta T + \\ + \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu \\ -\nu & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Выразим из (2.38) и (2.42) напряжения через деформации:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_B\}), \quad (2.43)$$

где  $[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu \\ \nu & 1 - \nu \end{bmatrix}$  — матрица упругих постоянных;  $\{\varepsilon_B\}$  — вектор вынужденных деформаций. В случае равенства нулю величины  $\theta^*$  вектор  $\{\varepsilon_B\}$  запишется в виде:

$$\{\varepsilon_B\} = (1 + \nu)\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu \\ -\nu & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \end{Bmatrix}.$$

В общем случае вектор  $\{\varepsilon_B\}$  имеет вид:

$$\{\varepsilon_B\} = (1 + \nu)\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 1 & \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \\ \varepsilon_z^* \end{Bmatrix}.$$

Потенциальная энергия деформации, как и в случае ПНС, определяется по формуле (2.17). В итоге задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (2.19). Матрица жесткости и вклад в вектор нагрузки вынужденных деформаций вычисляются по формуле (2.20).

Обобщение нелинейного уравнения Максвелла на случай трехосного напряженного состояния, выполненное Г. И. Гуревичем (формула (1.17)), базируется на допущении о равенстве нулю объемной деформации ползучести. Помимо этого используются следующие упрощения:

1. Коэффициент Пуассона для неупругих деформаций:  $\nu = 0.5$ .
2. Релаксационная вязкость  $\eta^*$  для скоростей роста деформаций  $\varepsilon_r^*$ ,  $\varepsilon_\theta^*$  и  $\varepsilon_z^*$  одинакова и определяется по максимальной функции напряжений  $f_{\max}^*$ .

Полученные уравнения на основе метода конечных элементов позволяют выполнить расчет и без этих упрощений. Базируясь на принципе суперпозиции, представим трехосное напряженное состояние в точке как сумму трех одноосных состояний:

$$1. \sigma_r \neq 0, \sigma_\theta = \sigma_z = 0.$$

При отсутствии температурных деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1r} &= \frac{\sigma_r}{E} + \varepsilon_{1r}^*; \\ \frac{\partial \varepsilon_{1r}^*}{\partial t} &= \frac{\sigma_r - E_\infty \varepsilon_{1r}^*}{\eta_1^*}; \\ \frac{1}{\eta_1^*} &= \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma_r - E_\infty \varepsilon_{1r}^*|}{m^*}\right). \end{aligned}$$

Деформации по направлениям  $\theta$  и  $z$  можно выразить через коэффициент Пуассона:

$$\varepsilon_{1\theta} = \varepsilon_{1z} = -\nu \varepsilon_{1r} = -\nu \left( \frac{\sigma_r}{E} + \varepsilon_{1r}^* \right).$$

$$2. \sigma_\theta \neq 0, \sigma_r = \sigma_z = 0.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2\theta} &= \frac{\sigma_\theta}{E} + \varepsilon_{2\theta}^*; \\ \frac{\partial \varepsilon_{2\theta}^*}{\partial t} &= \frac{\sigma_\theta - E_\infty \varepsilon_{2\theta}^*}{\eta_2^*}; \\ \frac{1}{\eta_2^*} &= \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma_\theta - E_\infty \varepsilon_{2\theta}^*|}{m^*}\right); \\ \varepsilon_{2r} = \varepsilon_{2z} &= -\nu \varepsilon_{2\theta} = -\nu \left( \frac{\sigma_\theta}{E} + \varepsilon_{2\theta}^* \right). \end{aligned}$$

3.  $\sigma_z \neq 0, \sigma_r = \sigma_\theta = 0$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon_{3z} &= \frac{\sigma_z}{E} + \varepsilon_{3z}^*; \\ \frac{\partial \varepsilon_{3z}^*}{\partial t} &= \frac{\sigma_z - E_\infty \varepsilon_{3z}^*}{\eta_3^*}; \\ \frac{1}{\eta_3^*} &= \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma_z - E_\infty \varepsilon_{3z}^*|}{m^*}\right); \\ \varepsilon_{3r} = \varepsilon_{3\theta} &= -\nu \varepsilon_{3z} = -\nu \left(\frac{\sigma_z}{E} + \varepsilon_{3z}^*\right).\end{aligned}$$

Полная деформация в направлении  $r$  запишется в виде:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} + \varepsilon_{3r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \varepsilon_r^*,$$

где  $\varepsilon_r^* = \varepsilon_{1r}^* - \nu(\varepsilon_{2\theta}^* + \varepsilon_{3z}^*)$ .

Выражения для остальных деформаций можно получить при помощи циклической замены индексов. Полные деформации ползучести в направлении  $\theta$  и  $z$  примут вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta^* &= \varepsilon_{2\theta}^* - \nu(\varepsilon_{1r}^* + \varepsilon_{3z}^*); \\ \varepsilon_z^* &= \varepsilon_{3z}^* - \nu(\varepsilon_{1r}^* + \varepsilon_{2\theta}^*).\end{aligned}$$

Был выполнен расчет полимерного цилиндра из ЭДТ-10 при таких же исходных данных, как и в параграфе 2.2. На рис. 2.14 и 2.15 показаны соответственно графики изменения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в толще цилиндра при  $t = 0.4$  ч (черная линия),  $t = 1.2$  ч (красная линия) и  $t = 13.4$  ч (фиолетовая линия). Синей линией показано упругое решение при  $t \geq 1.2$  ч. Штриховыми линиями соответствует уточненное решение без учета равенства нулю объемной деформации ползучести.

Представленные графики показывают, что применение гипотезы о равенстве нулю величины  $\theta^*$  приводит к завышенным значениям напряжений в конце процесса ползучести. При  $t = 13.4$  ч максимальные значения напряжений  $\sigma_r$  отличаются на 35%, а  $\sigma_\theta$  – на 27%.

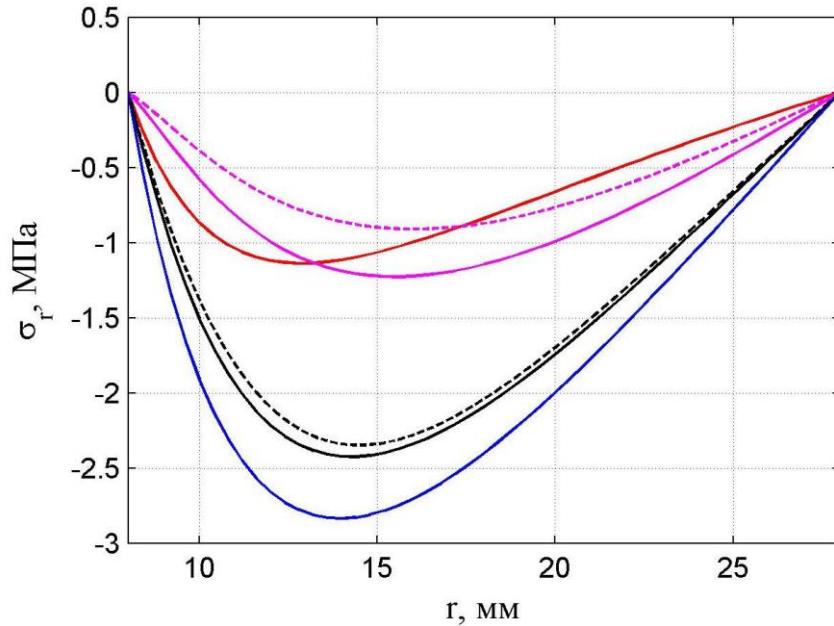


Рис. 2.14 — Распределение напряжений  $\sigma_r$  в толще цилиндра

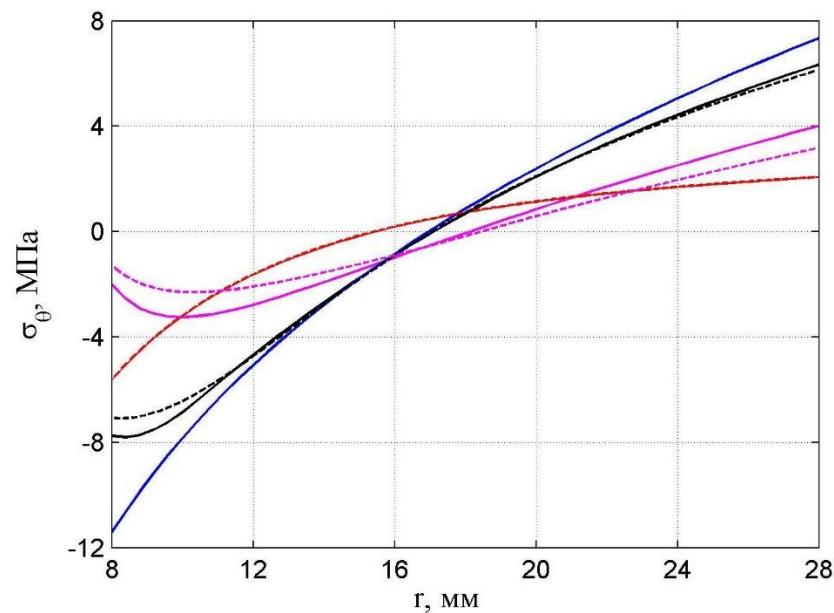


Рис. 2.15 — Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  в толще цилиндра

### 2.3 Разрешающие уравнения для двумерной осесимметричной задачи термовязкоупругости

В настоящем параграфе будут получены разрешающие уравнения для решения задачи методом конечных элементов в двумерной постановке. Используемый конечный элемент показан на рис. 2.16.

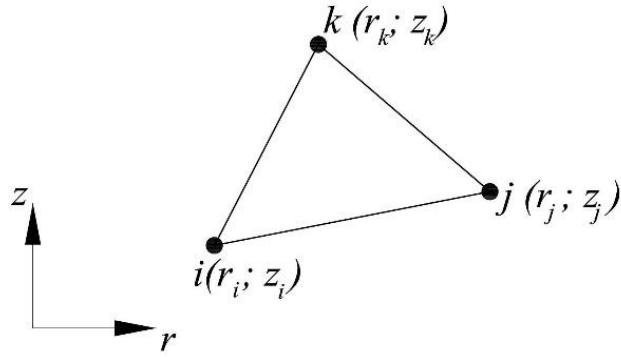


Рис. 2.16 — Треугольный конечный элемент

При выводе разрешающих уравнений будем использовать вариационный принцип Лагранжа. Потенциальная энергия деформации определяется следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV, \quad (2.44)$$

где  $\{\sigma\} = \{\sigma_r \ \ \sigma_\theta \ \ \sigma_z \ \ \tau_{rz}\}^T$  — вектор напряжений;  $\{\varepsilon^{el}\}$  — вектор упругих деформаций, представляющий разность между вектором полных деформаций  $\{\varepsilon\}$  и вектором вынужденных деформаций  $\{\varepsilon^B\}$ :

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^B\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{rz}^* \end{pmatrix} + \alpha \Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (2.45)$$

Связь между напряжениями и деформациями с учетом ползучести и температурных воздействий записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \varepsilon_r^* + \alpha \Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) + \varepsilon_\theta^* + \alpha \Delta T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)) + \varepsilon_z^* + \alpha \Delta T; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G} + \gamma_{rz}^*. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Или в матричном виде:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \{\sigma\} + \{\varepsilon^B\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon^B\}. \quad (2.47)$$

Выразим в (2.47) напряжения через деформации:

$$\{\sigma\} = [C]^{-1}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^B\}) = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^B\}), \quad (2.48)$$

где

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

В пределах элемента перемещения аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \{U\}, \quad (2.49)$$

где  $\{U\} = \{u_i \ w_i \ u_j \ w_j \ u_k \ w_k\}^T$  — вектор узловых перемещений;  $N_i, N_j, N_k$  — функции формы.

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z), \quad (2.50)$$

где  $A$  — площадь элемента.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix}, \quad a_i = r_j z_k - r_k z_j, \quad b_i = z_j - z_k, \quad c_i = r_k - r_j,$$

где  $r_i, r_j, r_k, z_i, z_j, z_k$  — координаты узлов.

С учетом (2.49) вектор деформаций примет вид:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r \ \varepsilon_\theta \ \varepsilon_z \ \gamma_{rz}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \ \frac{u}{r} \ \frac{\partial w}{\partial z} \ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right\}^T = [B]\{U\}, \quad (2.51)$$

где

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{2A \cdot N_i}{r} & 0 & \frac{2A \cdot N_j}{r} & 0 & \frac{2A \cdot N_k}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}.$$

Подставив (2.51) и (2.48) в (2.44), получим:

$$\begin{aligned}\Pi = & \frac{1}{2} \{U\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U\} - \{U\}^T \int_V [B]^T [D]\{\varepsilon^B\} dV \\ & + \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^B\}^T [D]\{\varepsilon^B\} dV.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Работа внутреннего давления  $p$ , которое приходится на ребро  $ij$  элемента, находящееся на внутренней поверхности трубы, может быть найдена следующим образом:

$$A = \{u_i \ u_j\} p L_{ij} \pi a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

где  $L_{ij}$  — длина ребра  $ij$ ;  $a$  — внутренний радиус трубы.

Полная энергия  $\mathcal{E}$  представляет сумму потенциальной энергии деформации и работы внешних сил. Минимизируя функционал полной энергии, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \{U\}} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{U\} - \int_V [B]^T [D]\{\varepsilon^B\} dV - \{F\} = 0; \quad (2.54)$$

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F^*\},$$

где  $[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV$  — матрица жесткости;  $\{F\}$  — вектор внешних узловых нагрузок;  $\{F^B\} = \int_V [B]^T [D]\{\varepsilon^B\} dV$  — дополнительная нагрузка связанная с вынужденными деформациями (ползучестью и температурными воздействиями).

В матрице  $[B]$  некоторые элементы являются функциями от  $r$  и  $z$ . Для упрощения вычисления объемных интегралов заменим эту матрицу матрицей  $[\bar{B}]$ , в которой все элементы вычислены при  $r = \bar{r} = \frac{r_i+r_j+r_k}{3}$ ,  $\bar{z} = \frac{z_i+z_j+z_k}{3}$ . Также будем считать, что в пределах одного элемента деформации ползучести постоянны. Тогда выражения для локальной матрицы жесткости и вклада вынужденных деформаций в вектор нагрузки примут вид:

$$\begin{aligned}[\bar{K}] &= [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] \int_V dV = [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] 2\pi\bar{r}A; \\ \{\bar{F}^B\} &= [\bar{B}]^T [D]\{\varepsilon^B\} \int_V dV = [\bar{B}]^T [D]\{\varepsilon^B\} 2\pi\bar{r}A.\end{aligned}\quad (2.55)$$

## 2.4 Влияние температурного режима на напряженно-деформированное состояние трубы из полиолефинов

Рассматривается полимерная труба внутренним радиусом  $a = 3.8$  мм и толщиной  $\delta = 1.2$  мм. На трубу действует внутреннее давление  $p = 2.5$  МПа. Допустим, что в течение 40 мин происходит аварийное повышение температуры с  $T_0 = 20$  °C до  $T = 60$  °C. Далее температура остается постоянной в течение 80 мин, а затем в течение следующих 40 мин убывает от  $T$  до  $T_0$ . Поскольку толщина трубы относительно небольшая, считаем распределение температуры по ее толщине равномерным. График изменения температуры в зависимости от времени представлен на рис. 2.17.

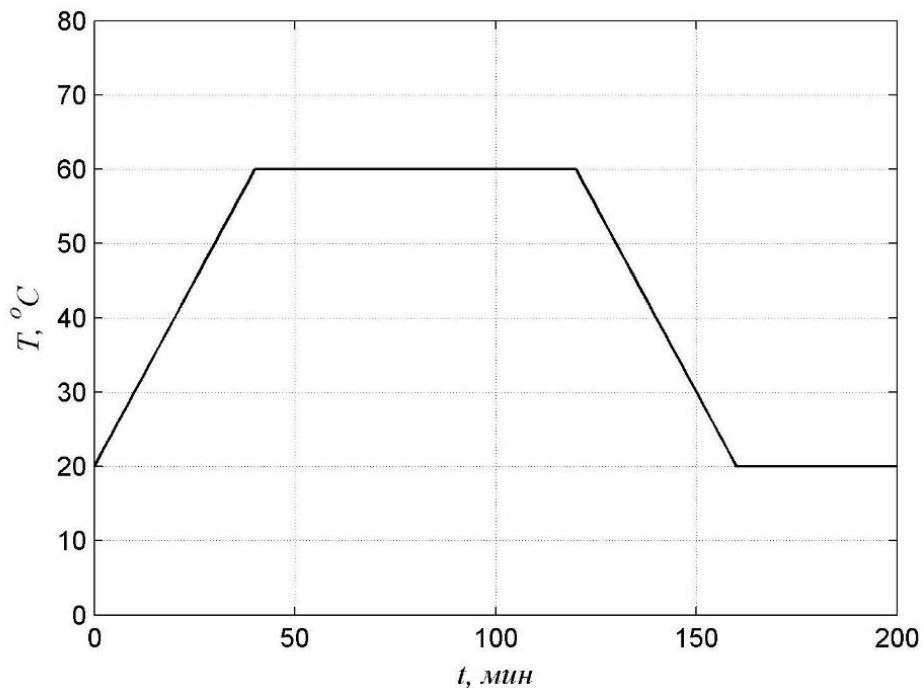


Рис. 2.17 — Изменение температуры в зависимости от времени

При расчете использовались зависимости упругих и реологических параметров полимерных труб от температуры, полученные в параграфе 1.4. Коэффициент линейного температурного расширения принимался равным:  $\alpha = 5.04 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$ , коэффициент Пуассона трубы  $\nu = 0.4$ . Рассматривался случай плоского деформированного состояния.

На рис. 2.18 представлено изменение радиальных напряжений в зависимости от  $r$  и  $t$ . Из данного графика видно, что напряжения  $\sigma_r$  в течение практически всего

процесса остаются постоянными, наблюдается только небольшой всплеск при  $t = 160$  мин в момент прекращения охлаждения.

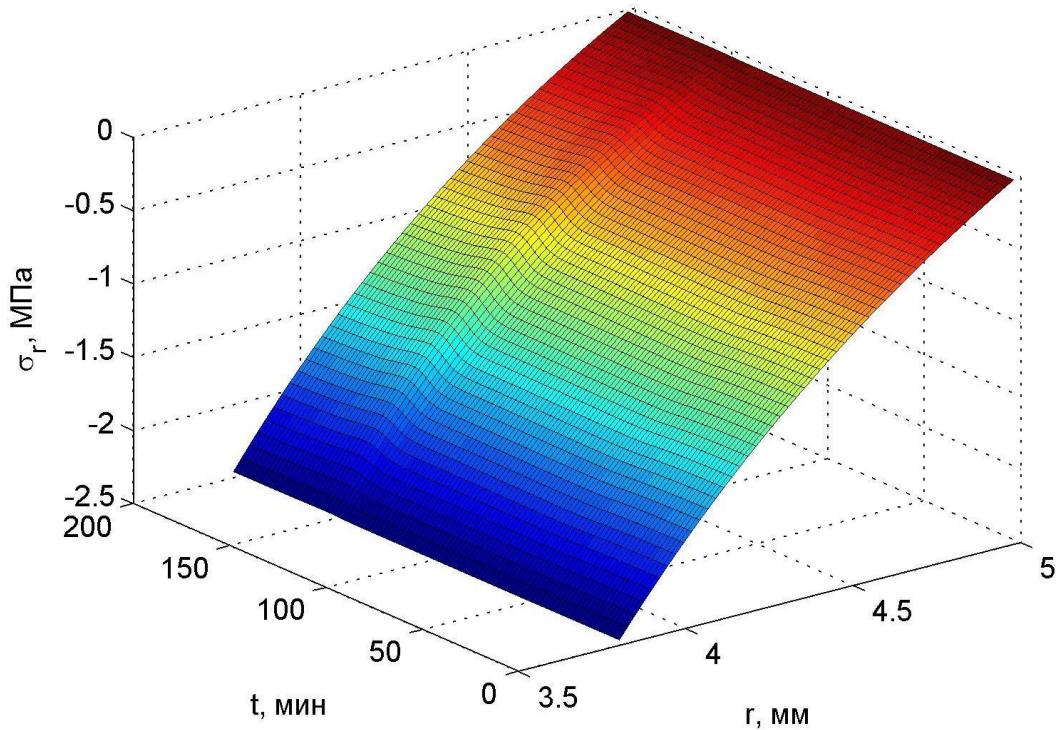


Рис. 2.18 — Изменение напряжений  $\sigma_r$  в зависимости от  $r$  и  $t$

На рис. 2.19 показано изменение окружных напряжений  $\sigma_\theta$  в зависимости от радиуса и времени. В начале процесса максимальное значение напряжений  $\sigma_\theta$  составляет 9.3 МПа. При нагреве в течение первых 40 мин напряжения  $\sigma_\theta$  у внутренней поверхности снижаются, далее при постоянной температуре  $T$  они остаются примерно постоянными, а затем при охлаждении наблюдается их резкий рост у внутренней поверхности. Максимальное значение, равное 11.3 МПа, напряжения  $\sigma_\theta$  принимают при  $t = 160$  мин, т.е. в момент, когда прекращается охлаждение. Это значение на 21.5% выше, чем максимум, полученный при решении упругой задачи. Изменение напряжений  $\sigma_z$  представлено на рис. 2.20. Из данного графика видно, что максимальное значение напряжения  $\sigma_z$  также принимают в момент времени  $t = 160$  мин. Изменение перемещений  $u$  представлено на рис. 2.21.

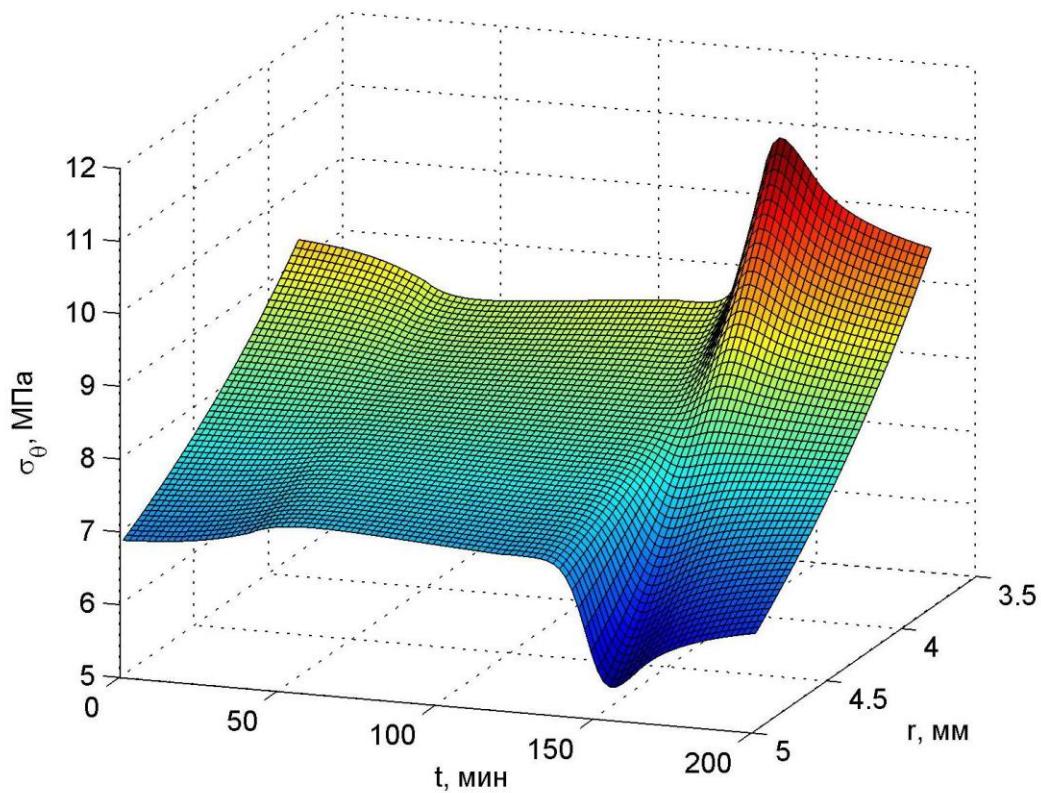


Рис. 2.19 — Изменение напряжений  $\sigma_\theta$  в зависимости от  $r$  и  $t$

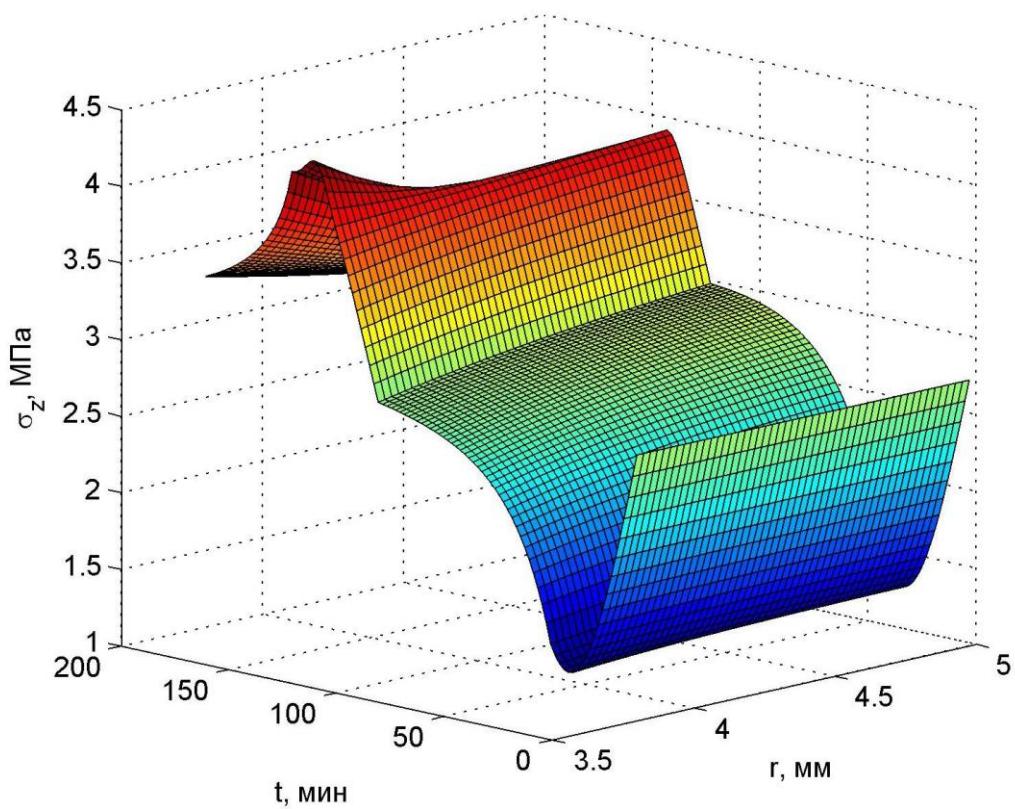


Рис. 2.20 — Изменение напряжений  $\sigma_z$  в зависимости от  $r$  и  $t$

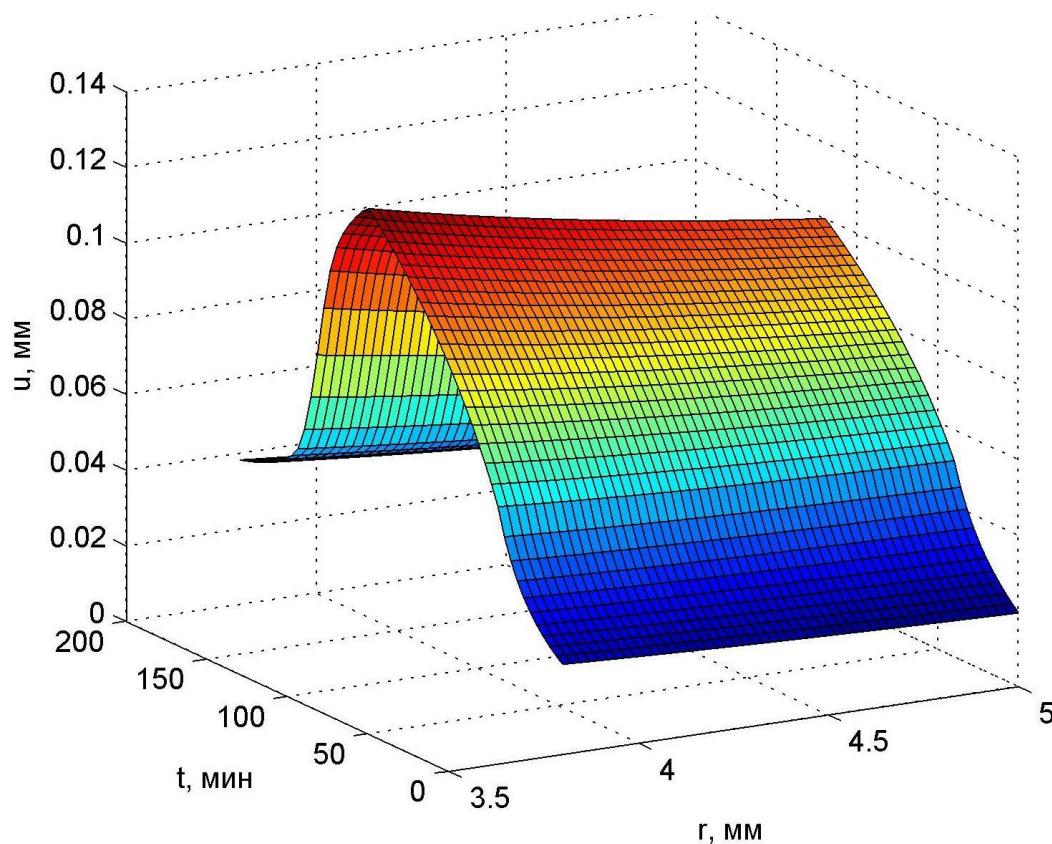


Рис. 2.21 — Изменение перемещений в зависимости от  $r$  и  $t$

## 2.5 Выводы по главе

Получены разрешающие уравнения для решения задач термовязкоупругости полимерных цилиндров методом конечных элементов в одномерной и двумерной постановке. Исследован случай плоского напряженного состояния и плоской деформации толстостенной полимерной трубы.

Проведен анализ применимости гипотезы о равенстве нулю объемной деформации ползучести. При этом использовалось уравнение Максвелла-Гуревича для одноосного напряженного состояния и принцип суперпозиции. Установлено, что применение гипотезы о равенстве нулю величины  $\theta^*$  приводит к завышенным значениям напряжений в конце процесса ползучести. Максимальные значения напряжений  $\sigma_r$  отличаются на 35%, а  $\sigma_\theta$  — на 27%.

Исследовано влияние переменного теплового режима на НДС трубы из поливинилхлорида. Установлено, что при нестационарном тепловом режиме могут возникать напряжения существенно выше, чем при стационарном температурном

поле. Объясняется это тем, что у полимеров имеется составляющая деформации, по фазе отстающая от напряжений (высокоэластическая деформация).

## ГЛАВА 3. ПОЛЗУЧЕСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ТРУБ

Чтобы улучшить прочностные характеристики труб, при их изготовлении используют несколько слоев из различных материалов, которые в совокупности обеспечивают высокую герметичность и прочность. Многослойные трубы состоят из двух или трех слоев. Изготавливаются бипластмассовые (внутренний слой из полиэтилена и наружная стеклопластиковая оболочка) и трехслойные трубы (крайние слои из полиэтилена и средний армирующий слой из синтетической ленты либо металлических нитей) и т. д.

Из последних разработок по многослойным полимерным трубам стоит отметить трубу Soluforce RTP, имеющую три слоя. Внутренний слой выполнен из полиэтилена (ПЭ 100), средний слой – армирующая лента, а в качестве внешнего покрытия выступает белый полиэтилен (ПЭ 100), характеризующийся высокой стойкостью к ультрафиолетовым лучам (рис. 3.1).



Рис. 3.1 — Труба Soluforce RTP

Методика расчета таких труб в упругой постановке рассматривается в работе [51]. Однако расчет в упругой стадии не в полной мере отражает все аспекты напряженно-деформированного состояния полимерных материалов. Для полиэтилена высокой плотности характерна явна выраженная ползучесть, которая проявляется даже при обычных эксплуатационных воздействиях.

Полученные в главе 2 уравнения метода конечных элементов позволяют рассчитывать с учетом ползучести как однослойные, так и многослойные толстостенные трубы.

### 3.1 Решение задачи ползучести трехслойной трубы в одномерной постановке

При расчете будем считать, что слои из полиэтилена работают вязкоупруго, а внутренний армирующий слой — упруго. Для полиэтилена высокой плотности (ПЭВП) справедливо уравнение Максвелла-Гуревича. Упругие и релаксационные параметры ПЭВП для расчета с учетом одного и двух членов спектра, взятые из работы [23], приводятся в табл. 3.1.

Табл. 3.1 — Упругие и реологические характеристики ПЭВП

$E$ , МПа	$\nu$	$m^*$ , МПа	Расчет с одним членом спектра времен релаксации		Расчет с двумя членами спектра времен релаксации			
			$E_\infty$ , МПа	$\eta_0^*$ , МПа·с	$E_{\infty,1}$ , МПа	$E_{\infty,2}$ , МПа	$\eta_{0,1}^*$ , МПа·с	$\eta_{0,2}^*$ , МПа·с
750	0.43	1.89	171.6	$9.7 \cdot 10^7$	900	285	$1.3 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$

Было проведено исследование ползучести трубы при следующих исходных данных: внутренний диаметр  $d_1 = 100$  мм, толщина внутреннего слоя из ПЭВП  $\delta_1 = 7$  мм, толщина среднего слоя из арамидной ленты  $\delta_2 = 3.5$  мм, толщина наружного слоя из ПЭВП  $\delta_3 = 3.5$  мм. Модуль упругости среднего слоя  $E_{\text{ср}} = 10^4$  МПа. Внутреннее давление принималось равным 6.5 МПа. Расчет велся с учетом одного члена спектра времен релаксации полимера.

На рис. 3.2 показан график изменения напряжений  $\sigma_\theta$  во внутреннем слое в зависимости от времени при  $r = 50$  мм. Рис. 3.3 — изменение во времени напряжений  $\sigma_\theta$  в армирующем слое при  $r = 57$  мм. Рис. 3.4 — изменение окружных напряжений в наружном слое при  $r = 60.5$  мм.

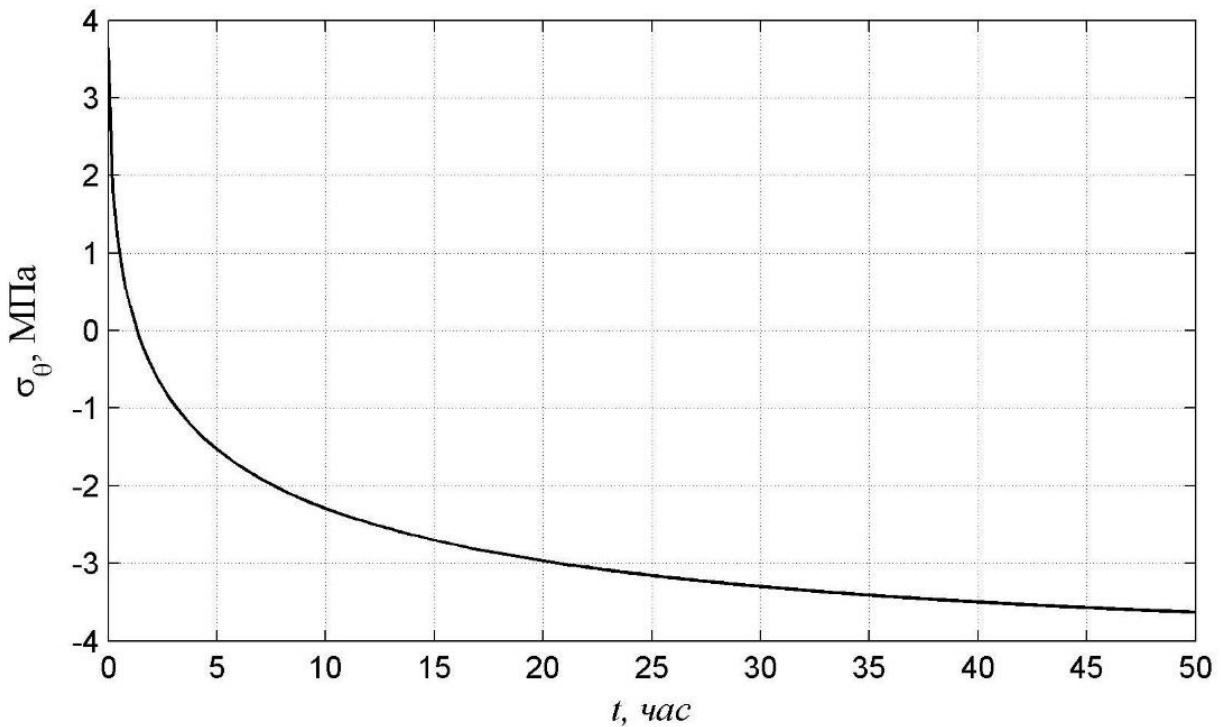


Рис. 3.2 — Изменение напряжений  $\sigma_\theta$  во внутреннем слое при  $r = 50$  мм

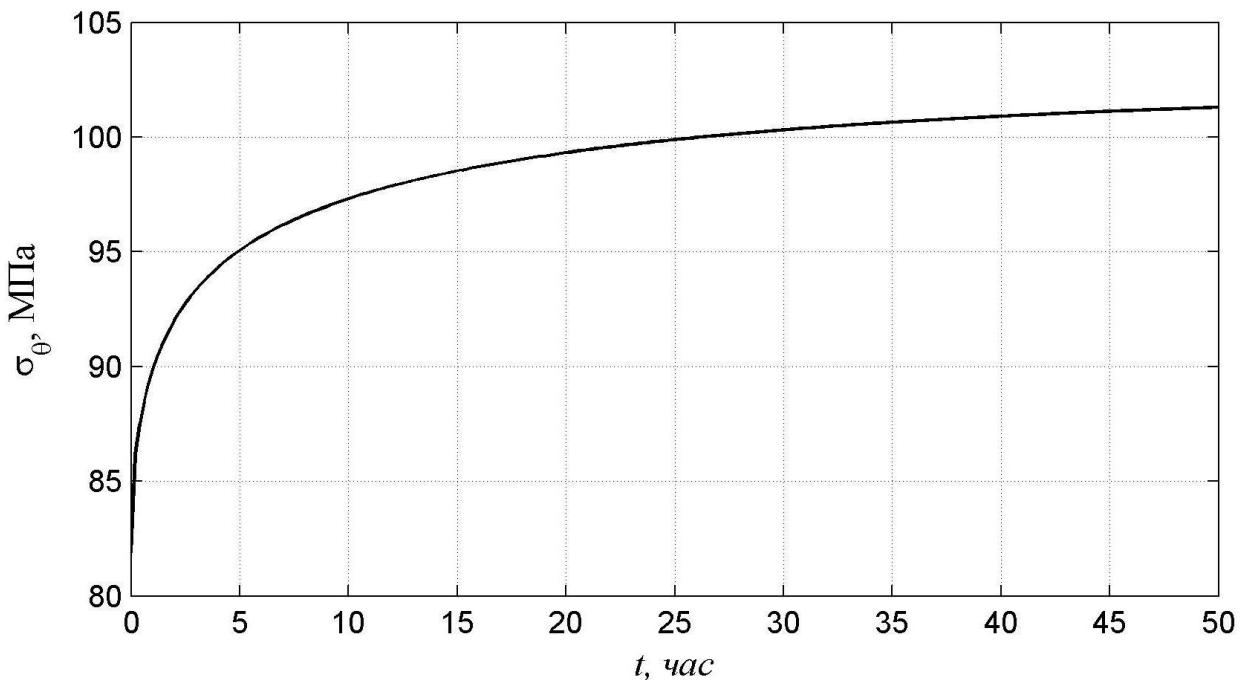


Рис. 3.3 — Изменение напряжений  $\sigma_\theta$  в армирующем слое при  $r = 57$  мм

Из рис. 3.2–рис. 3.4 видно, что в процессе ползучести происходит перераспределение напряжений между полимерными слоями и армирующим слоем: напряжения  $\sigma_\theta$  в полимерных слоях с течением времени убывают, во

внутреннем слое они даже становятся сжимающими, а в армирующем слое окружные напряжения возрастают. Ползучесть носит затухающий характер.

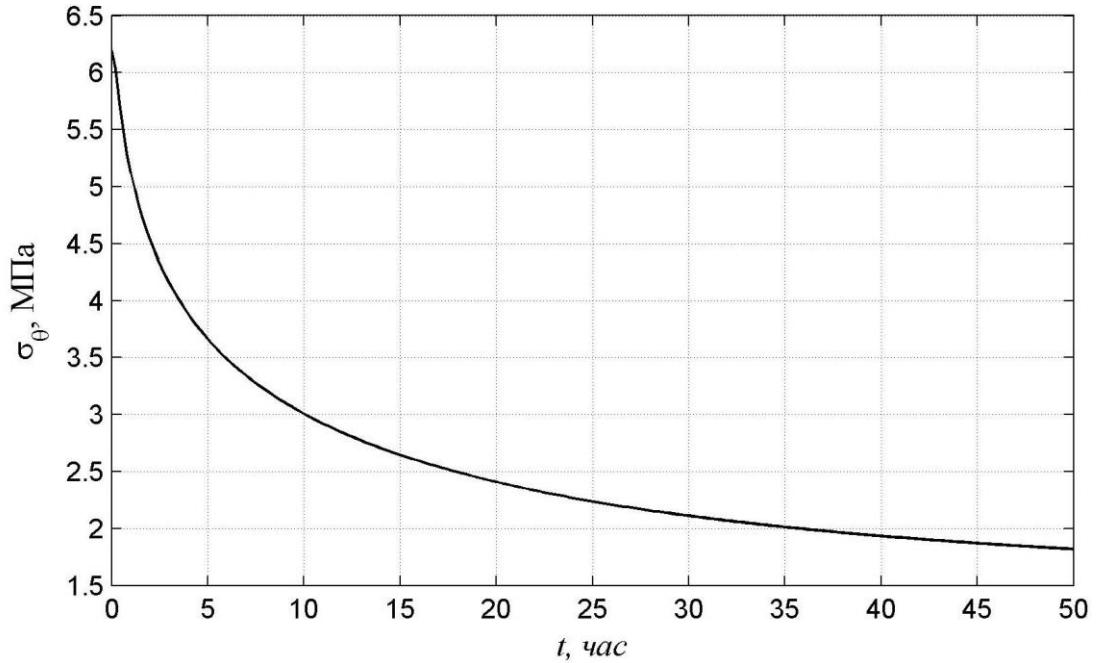


Рис. 3.4 — Изменение напряжений  $\sigma_\theta$  во внешнем слое при  $r = 60.5$  мм

На рис. 3.5–рис. 3.8 показано соответственно распределение по толщине трубы напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  и радиальных перемещений  $u$  при  $t = 0$  (штриховые линии) и при  $t = 200$  ч (сплошные линии).

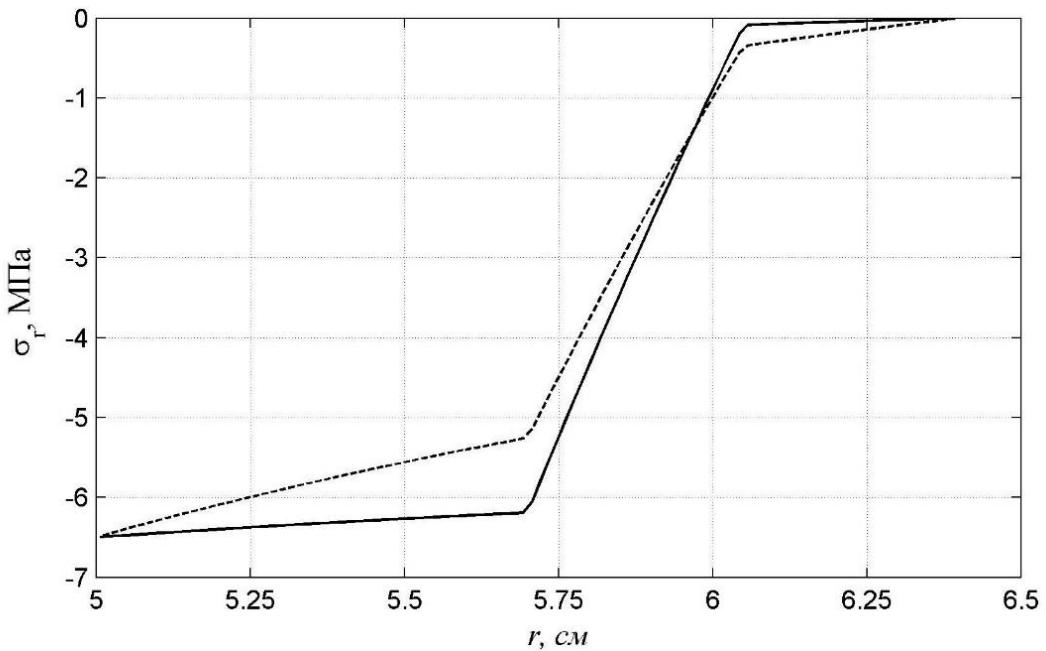


Рис. 3.5 — Распределение напряжений  $\sigma_r$  по толщине трубы при  $t = 0$  (штриховая линия) и при  $t = 200$  ч (сплошная линия)

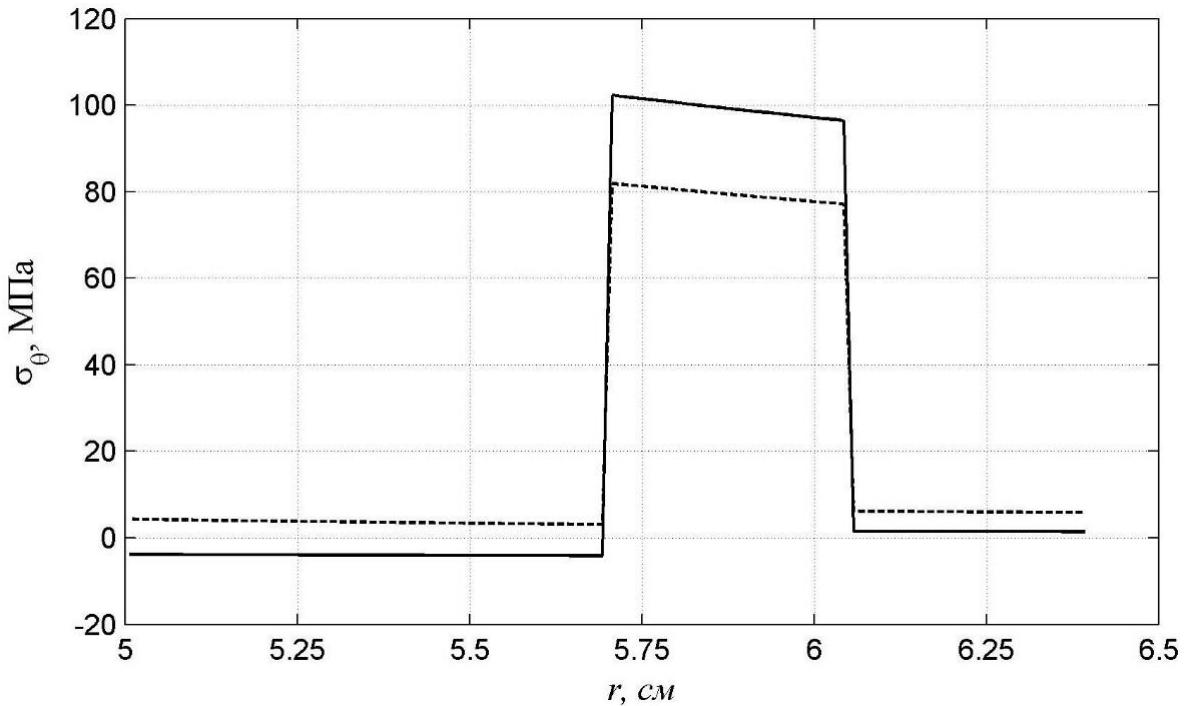


Рис. 3.6 — Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  при  $t = 0$  (штриховая линия) и при  $t = 200$  ч (сплошная линия)

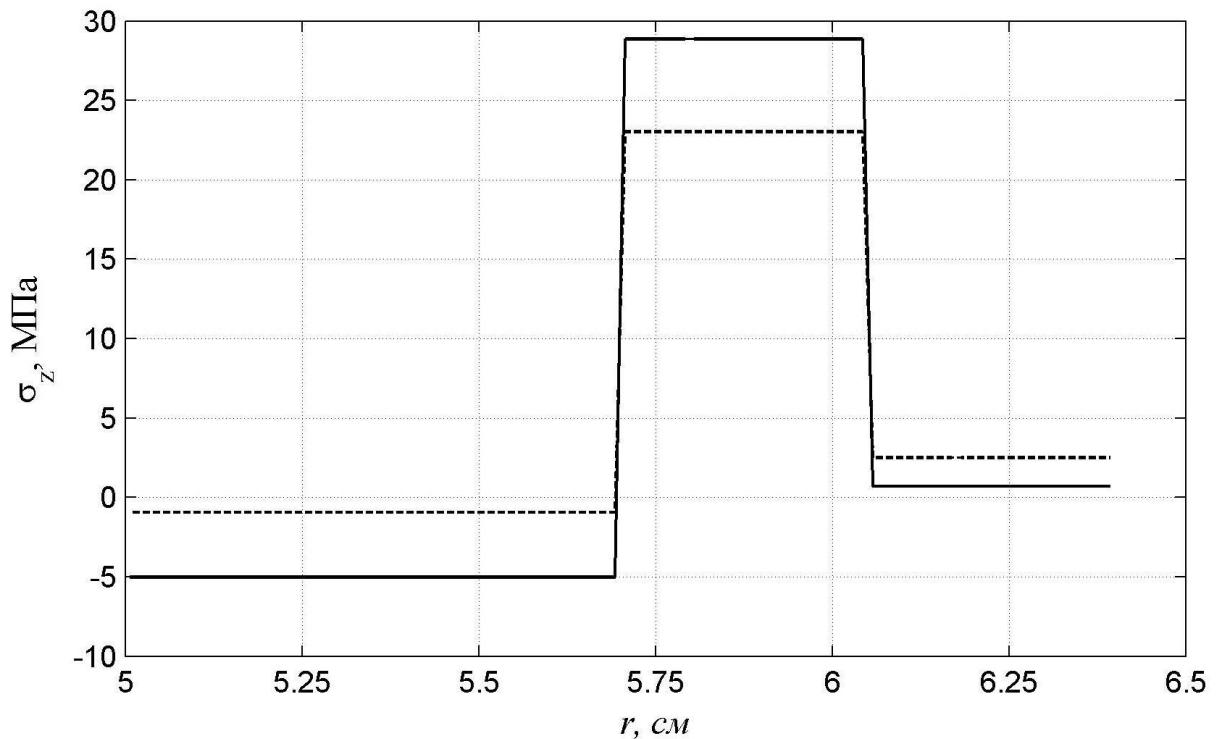


Рис. 3.7 — Распределение напряжений  $\sigma_z$  при  $t = 0$  (штриховая линия) и при  $t = 200$  ч (сплошная линия)

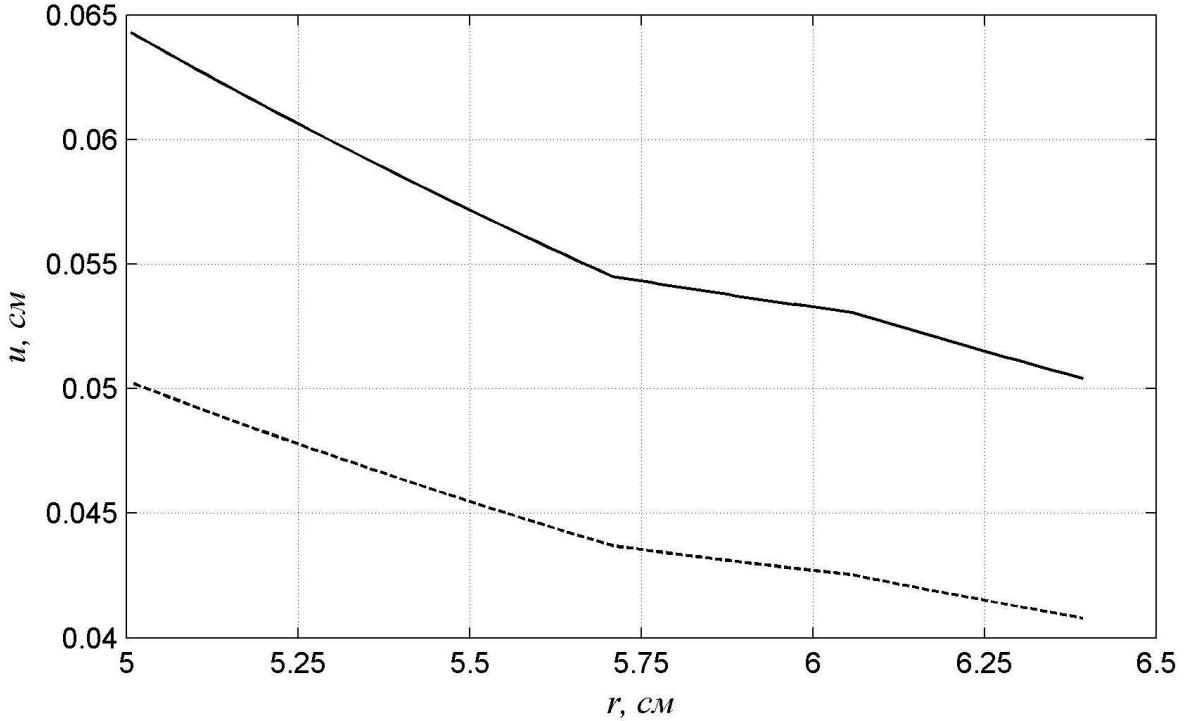


Рис. 3.8 — Распределение перемещений  $u$  при  $t = 0$  (штриховая линия) и при  $t = 200$  ч (сплошная линия)

На внутренней поверхности при  $r = r_1$  напряжения  $\sigma_\theta$  снизились с 4.33 МПа до −3.8 МПа. В среднем слое напряжения  $\sigma_\theta$  при  $r = 57$  мм возросли с 81.9 МПа до 102.3 МПа, т.е. на 25%. В наружном слое максимальные напряжения  $\sigma_\theta$  снизились с 6.2 МПа до 1.53 МПа.

### 3.2 Анализ распределения напряжений в конце процесса ползучести

Проанализируем уравнение Максвелла-Гуревича при  $t \rightarrow \infty$ , считая что ползучесть носит затухающий характер. В конце процесса ползучести должны быть равны нулю скорости роста всех составляющих высокоэластических деформаций  $\varepsilon_r^*$ ,  $\varepsilon_\theta^*$ ,  $\varepsilon_z^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{r,s}^*}{\partial t} &= \frac{f_{r,s}^*}{\eta_s^*} = 0; \\ \frac{\partial \varepsilon_{\theta,s}^*}{\partial t} &= \frac{f_{\theta,s}^*}{\eta_s^*} = 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{z,s}^*}{\partial t} = \frac{f_{z,s}^*}{\eta_s^*} = 0, \quad s = 1 \dots n.$$

Из этого следует, что должны быть равны нулю все функции напряжений:

$$\begin{aligned} f_{r,s}^* &= \frac{3}{2}(\sigma_r - p) - E_{\infty,s} \varepsilon_{r,s}^* = \sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_z}{2} - E_{\infty,s} \varepsilon_{r,s}^* = 0; \\ f_{\theta,s}^* &= \frac{3}{2}(\sigma_\theta - p) - E_{\infty,s} \varepsilon_{\theta,s}^* = \sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{2} - \frac{\sigma_z}{2} - E_{\infty,s} \varepsilon_{\theta,s}^* = 0; \\ f_{z,s}^* &= \frac{3}{2}(\sigma_z - p) - E_{\infty,s} \varepsilon_{z,s}^* = \sigma_z - \frac{\sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r}{2} - E_{\infty,s} \varepsilon_{z,s}^* = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.2) можно найти предельные величины составляющих спектра:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,s}^* &= \frac{1}{E_{\infty,s}} \left( \sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right); \\ \varepsilon_{\theta,s}^* &= \frac{1}{E_{\infty,s}} \left( \sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right); \\ \varepsilon_{z,s}^* &= \frac{1}{E_{\infty,s}} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (2.46), при отсутствии температурных деформаций получим следующую связь между напряжениями и деформациями в конце процесса ползучести:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \alpha^* \sigma_r - \beta^* (\sigma_\theta + \sigma_z); \\ \varepsilon_\theta &= \alpha^* \sigma_\theta - \beta^* (\sigma_r + \sigma_z); \\ \varepsilon_z &= \alpha^* \sigma_z - \beta^* (\sigma_r + \sigma_\theta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{где } \alpha^* = \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty,s}}, \beta^* = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty,s}}.$$

Выражения (3.4) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_r - \tilde{\nu} (\sigma_\theta + \sigma_z)); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_\theta - \tilde{\nu} (\sigma_r + \sigma_z)); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_z - \tilde{\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{где } \tilde{E} = \frac{1}{\alpha^*}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\beta^*}{\alpha^*}.$$

Из решения задачи Ламе для однородного толстостенного упругого цилиндра следует, что распределение напряжений по его толщине зависит только от величины внутреннего и внешнего радиуса цилиндра, а также от значений давлений на внутренней и внешней поверхности. Из выражений (3.5) следует, что в конце процесса ползучести распределение напряжений для однородного цилиндра будет таким же, как и в упругой задаче. Этот факт был впервые установлен Р. А. Турусовым [52].

Величины  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\nu}$  назовем длительным модулем и длительным коэффициентом Пуассона. Значения параметров  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\nu}$  при расчете с учетом одного и двух членов спектра для полиэтилена высокой плотности приведены в табл. 3.2

Табл. 3.2 — Значения параметров  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\nu}$  для ПЭВП

	$\alpha^*$ , МПа $^{-1}$	$\beta^*$ , МПа $^{-1}$	$\tilde{E}$ , МПа	$\tilde{\nu}$
С учетом одного члена спектра	0,00716	0,00349	139,6	0,487
С учетом двух членов спектра	0,00595	0,00288	168	0,484

Длительный коэффициент Пуассона при расчете с учетом одного и двух членов спектра изменяется незначительно — всего на 0,6%, и он близок к коэффициенту Пуассона несжимаемого материала ( $\nu = 0.5$ ). Однако величины длительного модуля  $\tilde{E}$  отличаются на 17%.

На рис. 3.9–рис. 3.10 представлено соответственно распределение по радиусу в конце процесса ползучести перемещений  $u$  и напряжений  $\sigma_\theta$  при расчете с учетом одного члена спектра (черные линии) и с учетом двух членов спектра (синие линии).

Из представленных графиков видно, что учет двух членов спектра существенно не сказывается на результатах, и для практических расчетов достаточно использовать одночлененное уравнение.

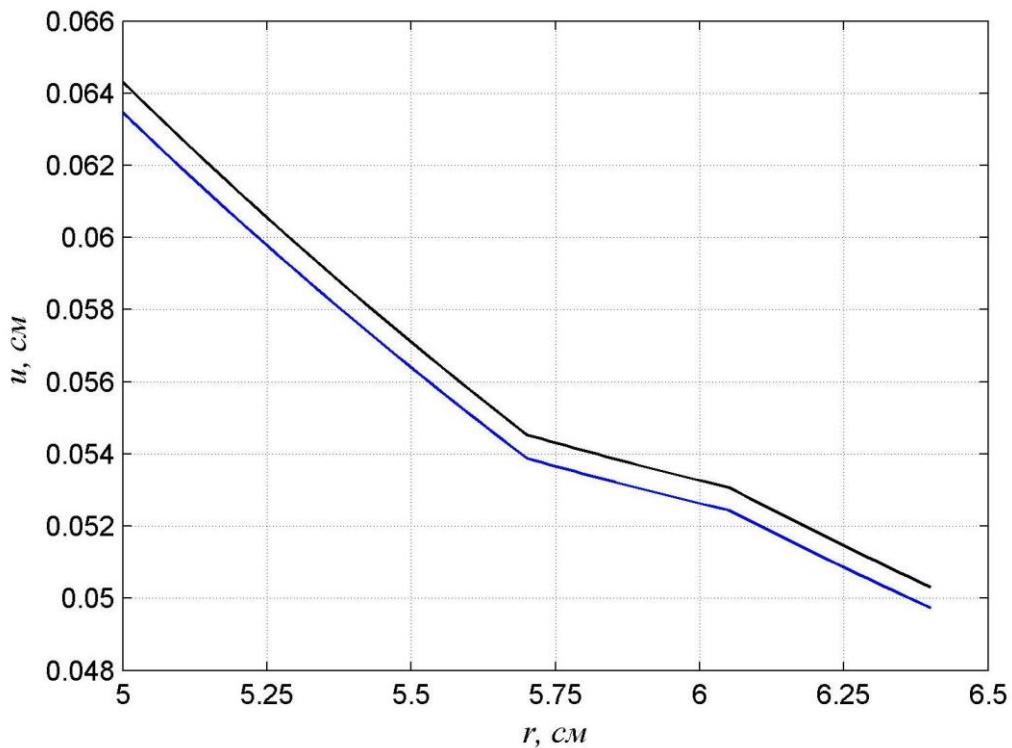


Рис. 3.9 — Распределение по радиусу перемещений при  $t \rightarrow \infty$  с учетом одного члена спектра (черная линия) и двух членов спектра (синяя линия)

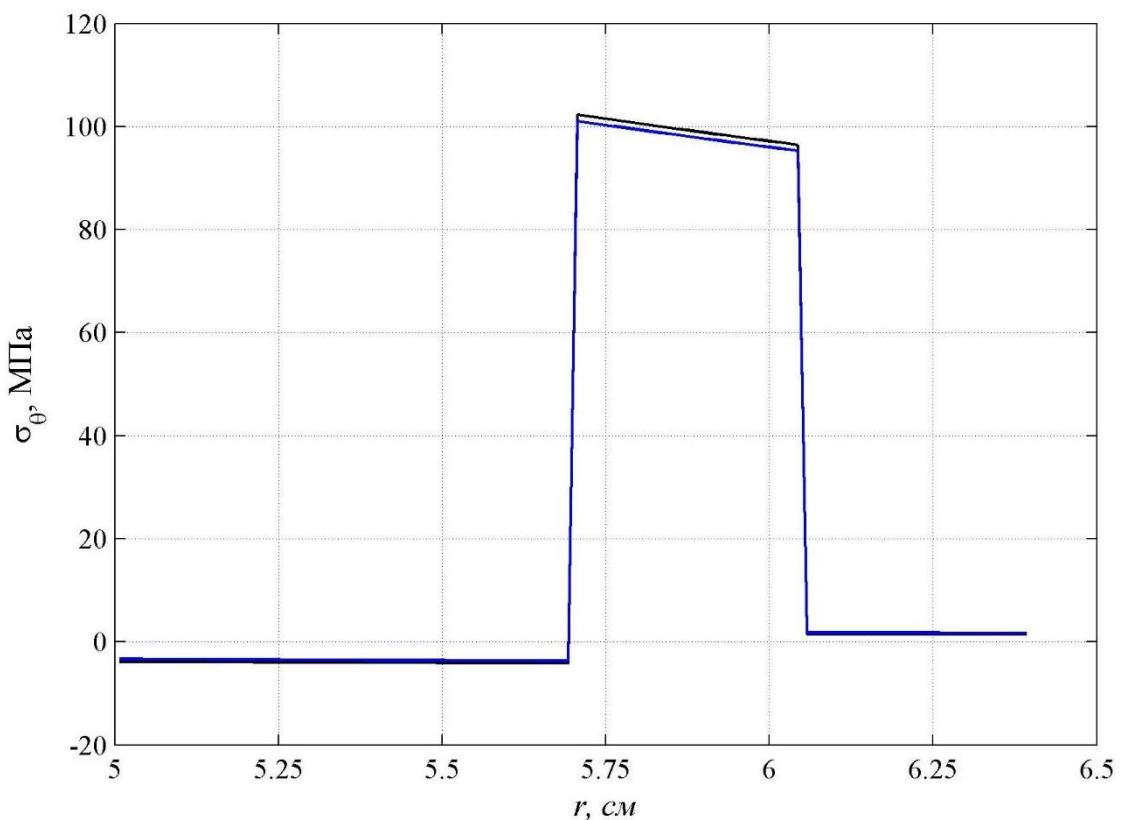


Рис. 3.10 — Распределение по радиусу напряжений  $\sigma_\theta$  при  $t \rightarrow \infty$  с учетом одного члена спектра (черная линия) и двух членов спектра (синяя линия)

### 3.3 Аналитический расчет многослойных труб

Каждый из слоев трубы можно рассматривать как нагруженный внутренним давлением  $p_a$  и внешним давлением  $p_b$  (рис. 3.11). Для внутреннего слоя в качестве  $p_a$  выступает давление  $p$ , а в качестве внешнего давления – контактное давление  $p_{12}$  между слоями 1 и 2. Для среднего слоя:  $p_a = p_{12}$ ,  $p_b = p_{23}$ . Для наружного слоя:  $p_a = p_{23}$ ,  $p_b = 0$ .

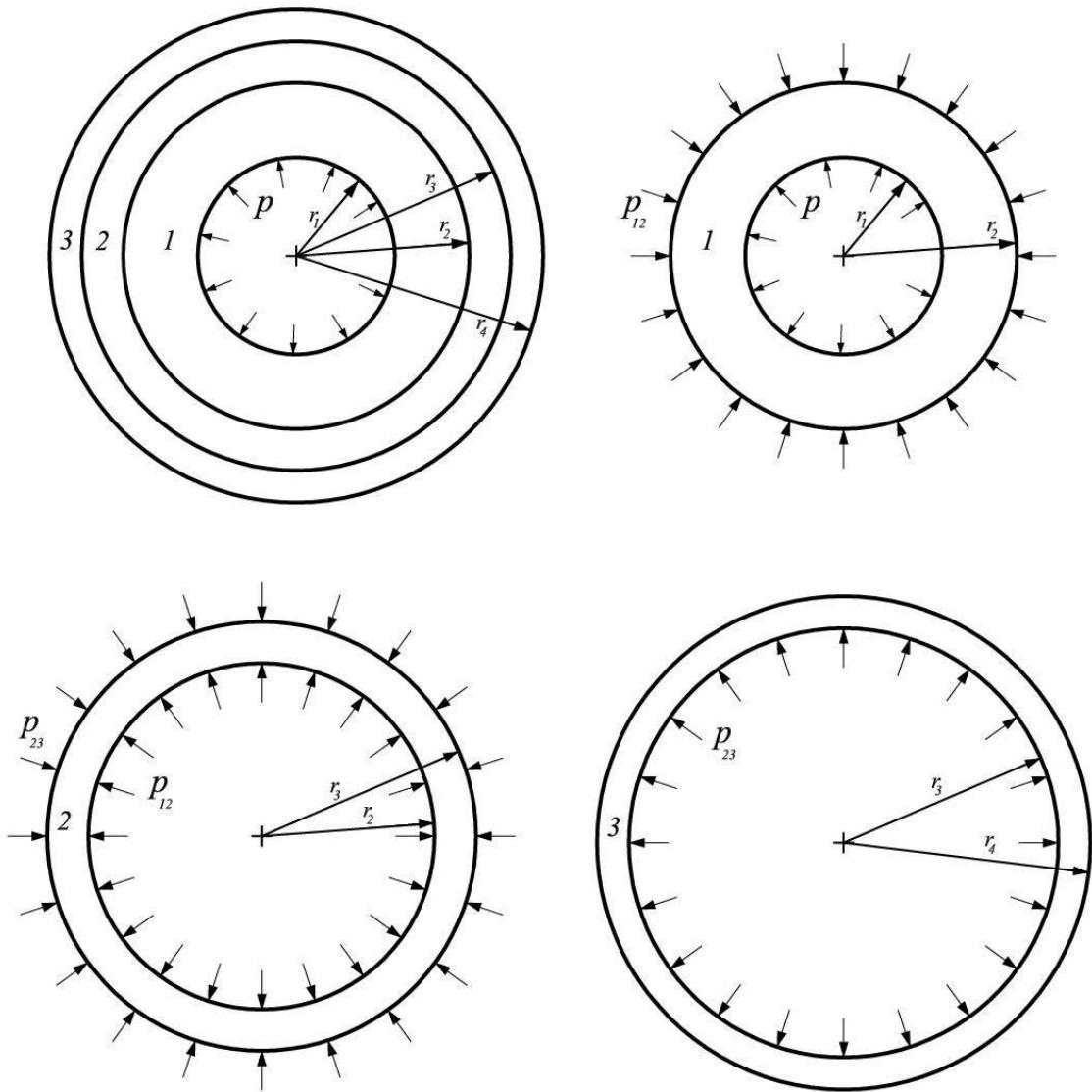


Рис. 3.11 — К аналитическому расчету трехслойной трубы

Закон изменения перемещений по радиусу для цилиндра, находящегося в условиях ПДС имеет вид [53]:

$$u(r) = \frac{(p_a a^2 - p_b b^2)(1 - \bar{\nu})}{(b^2 - a^2)\bar{E}} r - \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2(1 + \bar{\nu})}{(b^2 - a^2)\bar{E}} \frac{1}{r}, \quad (3.6)$$

$$\text{где } \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  вычисляются следующим образом [53]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Для внутреннего слоя выражение (3.6) запишется в виде:

$$u_1(r) = \frac{(pr_1^2 - p_{12}r_2^2)(1 - \bar{\nu}_1)}{(r_2^2 - r_1^2)\bar{E}_1}r - \frac{(p_{12} - p)r_1^2 r_2^2(1 + \bar{\nu}_1)}{(r_2^2 - r_1^2)\bar{E}_1}\frac{1}{r}.\tag{3.8}$$

Перемещения среднего слоя определяются следующим образом:

$$u_2(r) = \frac{(p_{12}r_2^2 - p_{23}r_3^2)(1 - \bar{\nu}_2)}{(r_3^2 - r_2^2)\bar{E}_2}r - \frac{(p_{23} - p_{12})r_2^2 r_3^2(1 + \bar{\nu}_2)}{(r_3^2 - r_2^2)\bar{E}_2}\frac{1}{r}.\tag{3.9}$$

Для наружного слоя выражение (3.6) принимает вид:

$$u_3(r) = \frac{p_{23}r_3^2(1 - \bar{\nu}_3)}{(r_4^2 - r_3^2)\bar{E}_3}r + \frac{p_{23}r_3^2 r_4^2(1 + \bar{\nu}_3)}{(r_4^2 - r_3^2)\bar{E}_3}\frac{1}{r}.\tag{3.10}$$

Из условия совместности работы слоев должно обеспечиваться равенство перемещений на стыке:

$$\begin{aligned}u_1(r_2) &= u_2(r_2); \\ u_2(r_3) &= u_3(r_3).\end{aligned}\tag{3.11}$$

В результате задача сводится к системе из двух уравнений, имеющей вид:

$$\begin{aligned}a_{11}p_{12} + a_{12}p_{23} &= b_1; \\ a_{21}p_{12} - a_{22}p_{23} &= 0, \\ a_{11} &= -\left[\frac{r_2^2(1 - \bar{\nu}_1) + r_1^2(1 + \bar{\nu}_1)}{\bar{E}_1(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_2^2(1 - \bar{\nu}_2) + r_3^2(1 + \bar{\nu}_2)}{\bar{E}_2(r_3^2 - r_2^2)}\right]; \\ a_{12} &= \frac{2r_3^2}{\bar{E}_2(r_3^2 - r_2^2)};\end{aligned}\tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}b_1 &= -\frac{2pr_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)\bar{E}_1}; \\ a_{21} &= \frac{2r_2^2}{(r_3^2 - r_2^2)\bar{E}_2};\end{aligned}$$

$$a_{22} = \frac{r_3^2(1 - \bar{\nu}_2) + r_2^2(1 + \bar{\nu}_2)}{\bar{E}_2(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{r_3^2(1 - \bar{\nu}_3) + r_4^2(1 + \bar{\nu}_3)}{\bar{E}_3(r_4^2 - r_3^2)}.$$

Решая систему (3.12), найдем контактные давления на стыке слоев:

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{b_1 a_{22}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}; \\ p_{23} &= \frac{a_{21}}{a_{22}} p_{12}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  можно найти по формулам (3.7). Напряжения  $\sigma_z$  вычисляются следующим образом:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \quad (3.14)$$

Таким образом, в пределах каждого слоя напряжения  $\sigma_z$  постоянны.

Чтобы получить распределение напряжений и перемещений в конце процесса ползучести, нужно заменить мгновенный модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  на длительные  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\nu}$ .

### 3.4 Исследование ползучести трехслойной трубы в двумерной постановке

Расчетная схема к задаче представлена на рис. 3.12. Задача решалась с учетом одного члена спектра времен релаксации полимера. При решении использовались уравнения, полученные в параграфе 2.3. Вычисления выполнялись в пакете Matlab с использованием библиотеки PDE.

На рис. 3.13 нижней поверхности соответствует распределение перемещений  $u$  при  $t = 0$ , а верхней поверхности – при  $t = 200$  ч. На рис. 3.14 синими поверхностями показано распределение напряжений  $\sigma_\theta$  при  $t = 0$ , а черными поверхностями – при  $t = 200$  ч. Из представленных графиков видно, что перемещения и напряжения являются функциями только от радиуса. Кроме того, рис. 3.13 и рис. 3.14 по своему характеру очень близки к рис. 3.8 и рис. 3.6.

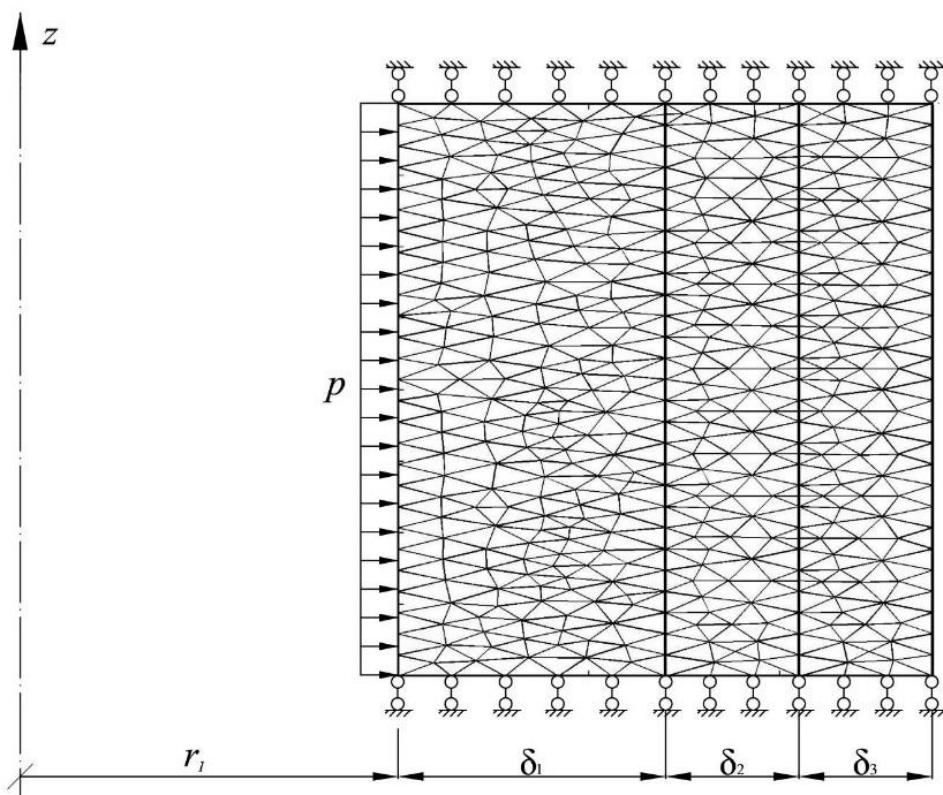


Рис. 3.12 — Расчетная схема

В табл. 3.3 представлено сравнение перемещений в конце процесса ползучести, полученных в результате аналитического расчета и с использованием МКЭ.

Из табл. 3.3 видно, что результаты практически совпадают, что свидетельствует о их достоверности.

Табл. 3.3 — Сравнение перемещений в конце процесса ползучести, полученных аналитически и при помощи МКЭ

$r, \text{ см}$		5	5.175	5.35	5.525	5.7	5.875	6.05	6.225
$u, \text{ мм}$	МКЭ	0.6416	0.6149	0.5900	0.5664	0.5441	0.5365	0.5296	0.5154
	аналит. решение	0.6430	0.6164	0.5913	0.5676	0.5453	0.5377	0.5307	0.5165

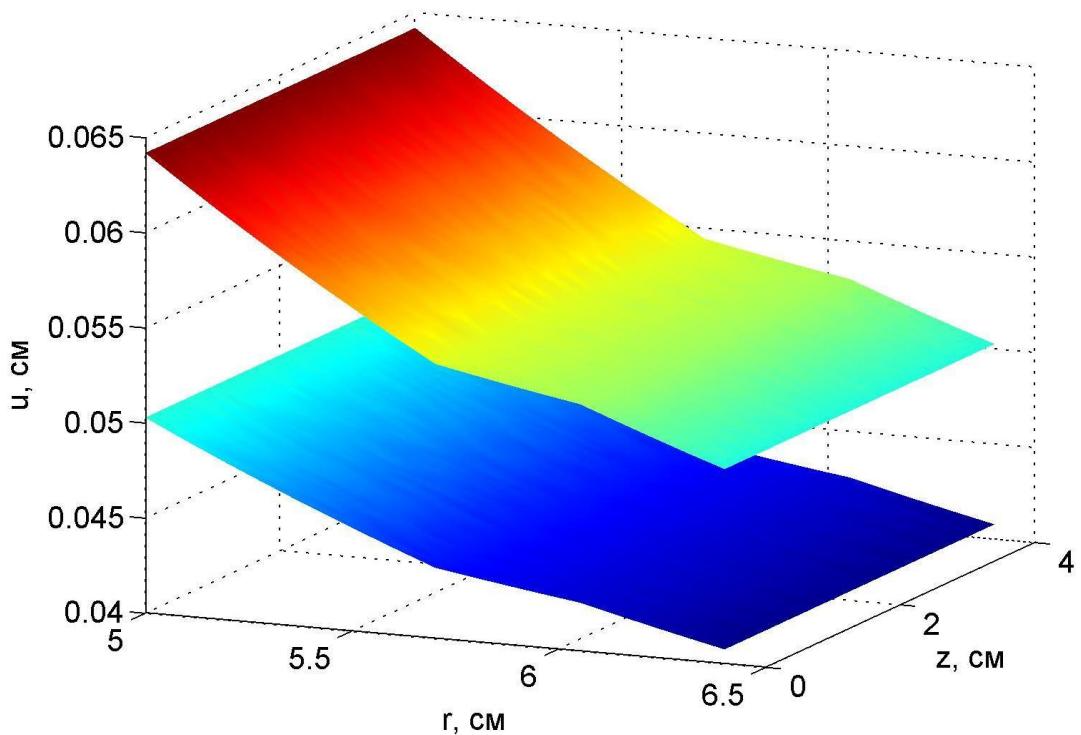


Рис. 3.13 — Распределение перемещений  $u$  при  $t = 0$  и  $t = 200$  ч

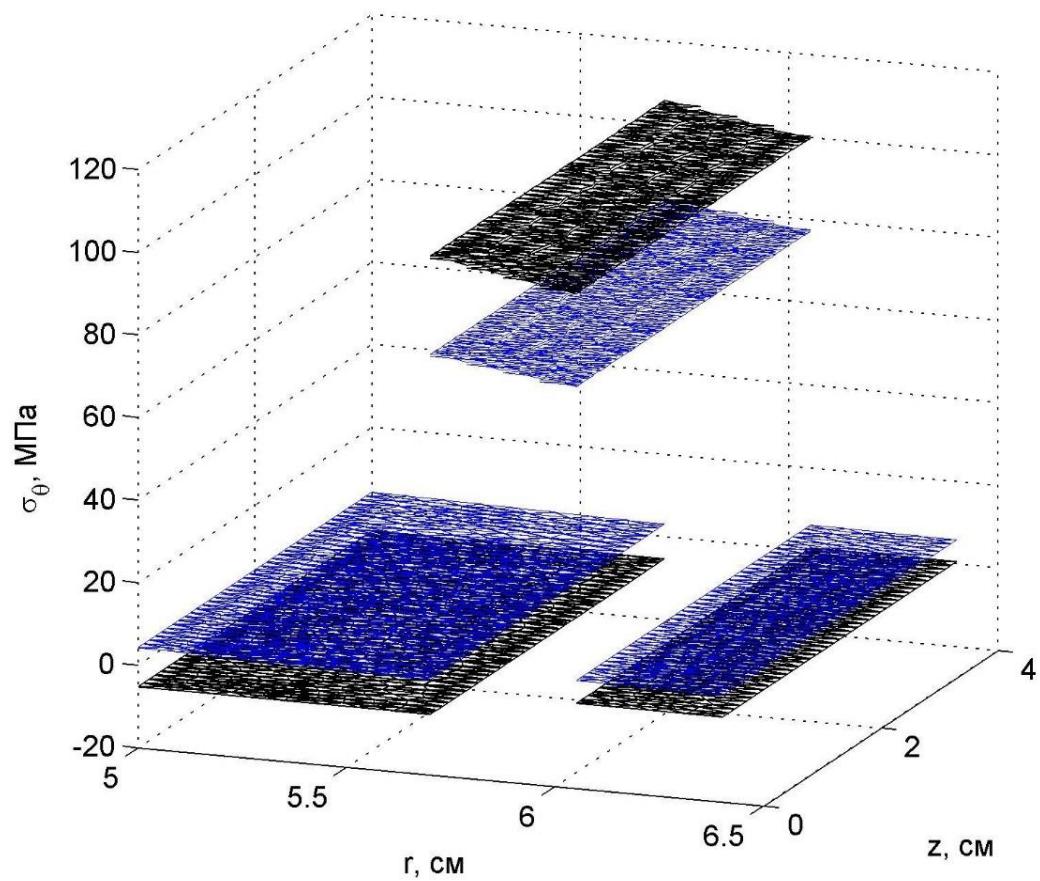


Рис. 3.14 — Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  при  $t = 0$  и  $t = 200$  ч.

### 3.5 Выводы по главе

Исследовано напряженно–деформированное состояние трехслойной полимерной трубы с учетом ползучести. Установлено, что в процессе ползучести происходит перераспределение напряжений между полимерными слоями и внутренним армирующим слоем: напряжения в слоях из полиэтилена высокой плотности с течением времени убывают, а в армирующем слое возрастают на 25%.

Проведен анализ уравнения Максвелла–Гуревича при  $t \rightarrow \infty$ , и в результате получена связь между напряжениями и деформациями в конце процесса ползучести. Введена величина длительного модуля и длительного коэффициента Пуассона.

Разработан аналитический метод расчета многослойных труб, базирующийся на решении задачи Ламе. Выполнено сравнение результатов численного решения в одномерной и двумерной постановке с аналитическим решением.

## ГЛАВА 4. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

Обратный метод является одним из методов оптимизации толстостенных цилиндрических и сферических оболочек. Сущность его заключается в нахождении такого закона изменения по толщине конструкции модуля упругости, при котором напряженно-деформированное состояние оболочки является заданным. Идея обратного метода принадлежит академику РААСН, профессору В. И. Андрееву [46, 54, 55].

Из решения задачи Ламе известно, что при действии на толстостенный цилиндр внутреннего давления наибольшие напряжения возникают у его внутренней поверхности. Снизив в областях с наибольшими напряжениями модуль упругости, а в точках с малыми напряжениями наоборот его повысив, можно добиться, чтобы цилиндр был равнонапряженным по какой-либо теории прочности.

В диссертации Б. М. Языева [48] описана методика создания полимерных цилиндров с переменным модулем упругости за счет варьирования содержания наполнителя по толщине цилиндра. Для этого полимерная масса смешивается с тонкодисперсным минеральным наполнителем, в качестве которого выступает кварцевая или диабазовая мука. Затем полученный состав подается в цилиндрическую форму, врачающуюся в процессе отверждения полимера. При этом под действием сил инерции происходит смещение твердой фазы к внешней поверхности цилиндра. В результате неравномерного распределения наполнителя по радиусу цилиндра возникает неоднородность. Варьируя процентное содержание наполнителя и его тип, а также частоту вращения цилиндрической формы, можно получить требуемую зависимость модуля упругости композиционного материала от радиуса.

В табл. 4.1 показана зависимость модуля упругости получаемого композиционного материала от процентного содержания наполнителей.

Табл. 4.1 — Влияние содержания наполнителей на модуль упругости композиционного материала

Состав	ЭДТ-10			ЭДТ-20		
	$E_D$ , МПа	$E_{\text{эф}}$ , МПа	$\frac{E_{\text{эф}}}{E_D}$	$E_D$ , МПа	$E_{\text{эф}}$ , МПа	$\frac{E_{\text{эф}}}{E_D}$
без наполнителя	3050	1870	0,61	2390	2280	0,95
а) кварцевая мука						
1. $(P_H/P_c) \cdot 100\% = 25\%$	3990	1970	0.49	3250	3000	0.92
2. $(P_H/P_c) \cdot 100\% = 40\%$	4270	-	-	3340	3220	0.93
3. $(P_H/P_c) \cdot 100\% = 60\%$	4320	-	-	3400	3420	0.91
б) диабазовая мука						
1. $(P_H/P_c) \cdot 100\% = 25\%$	3830	2050	0.53	3200	3000	0.93
2. $(P_H/P_c) \cdot 100\% = 40\%$	4200	1730	0.41	3420	2990	0.87
3. $(P_H/P_c) \cdot 100\% = 60\%$	425	189	0.44	402	288	0.71

$E_D$  и  $E_{\text{эф}}$  в табл. 4.1 — соответственно динамический и эффективный модуль упругости.

#### 4.1 Обратная задача для цилиндра, испытывающего действие внутреннего и внешнего давления

Рассматривается упругий толстостенный цилиндр внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ , на который действуют внутреннее давление  $p_a$  и внешнее давление  $p_b$  (рис. 2.1). Данный цилиндр будет находиться в условиях плоской осесимметричной задачи теории упругости.

При отсутствии деформаций ползучести и температурных воздействий основное разрешающее уравнение в напряжениях для радиально неоднородного цилиндра записывается в виде:

$$\sigma_r'' + \left( \frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) \sigma_r' - \frac{m}{r} \frac{E'}{E} \sigma_r = 0, \quad (4.1)$$

где  $m = 1 - \nu$  для плоского напряженного состояния (ПНС) и  $m = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$  для плоского деформированного состояния (ПДС). Штрихом в уравнении (4.1) обозначена производная по радиусу.

Границные условия для уравнения (4.1) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r(a) &= -p_a; \\ \sigma_r(b) &= -p_b.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Будем рассматривать такие нагрузления, при которых окружные напряжения являются растягивающими, т.е.  $\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$ .

Эквивалентное напряжение по первой теории прочности определяется следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 = \sigma_\theta.$$

По второй теории прочности для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_\theta - \nu\sigma_r.\tag{4.3}$$

По той же теории для плоского деформированного состояния:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}}^{III} &= \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)) \\ &= (1 - \nu^2) \left( \sigma_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r \right).\end{aligned}\tag{4.4}$$

По третьей теории прочности (теории наибольших касательных напряжений) для ПДС и ПНС:

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r.\tag{4.5}$$

Эквивалентное напряжение по упрощенной теории прочности Мора [55]:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = \sigma_\theta - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_r,\tag{4.6}$$

где  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  — соответственно допускаемые напряжения материала на растяжение и сжатие.

В общем виде эквивалентное напряжение для первых трех классических теорий прочности, а также для теории прочности Мора можно записать в виде линейной функции от напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ :

$$\sigma_{\text{экв}} = (\sigma_\theta - k_1 \sigma_r) k_2.\tag{4.7}$$

Значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  для каждой из названных выше теорий представлены в табл. 4.2.

Табл. 4.2 — Значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  для различных теорий прочности

Используемая теория	1-я	2-я		3-я	Теория прочности Мора
		ПНС	ПДС		
$k_1$	0	$\nu$	$\frac{\nu}{1-\nu}$	1	$[\sigma_p]/[\sigma_c]$
$k_2$	1	1	$1-\nu^2$	1	1

Цилиндр будет равнонапряженным, если по всей его толщине эквивалентное напряжение будет постоянным:

$$\sigma_{\text{экв}} = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dr} [(\sigma_\theta - k_1 \sigma_r) k_2] = 0. \quad (4.8)$$

Радиальные и окружные напряжения в осесимметричной задаче связаны уравнением равновесия:

$$\sigma_\theta = r \sigma'_r + \sigma_r. \quad (4.9)$$

Подставив (4.9) в (4.8), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r \sigma''_r = (k_1 - 2) \sigma'_r. \quad (4.10)$$

Перепишем уравнение (4.10) в виде:

$$r \frac{d\sigma'_r}{dr} = (k_1 - 2) \sigma'_r. \quad (4.11)$$

Выполним в уравнении (4.11) разделение переменных:

$$\frac{d\sigma'_r}{\sigma'_r} = \frac{k_1 - 2}{r} dr. \quad (4.12)$$

Общее решение уравнения (4.12) запишется в виде:

$$\sigma'_r = C_1 r^{k_1 - 2}. \quad (4.13)$$

Общий интеграл уравнения (4.13) имеет вид:

$$\sigma_r = \begin{cases} \frac{C_1 r^{k_1 - 1}}{k_1 - 1} + C_2, & \text{при } k_1 \neq 1 \\ C_1 \ln r + C_2, & \text{при } k_1 = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  найдем из граничных условий (4.2). При  $k_1 \neq 1$ :

$$\begin{cases} \frac{C_1 a^{k_1-1}}{k_1 - 1} + C_2 = -p_a; \\ \frac{C_1 b^{k_1-1}}{k_1 - 1} + C_2 = -p_b. \end{cases} \quad (4.15)$$

Решая систему (4.15), получим:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(k_1 - 1)(p_a - p_b)}{b^{k_1-1} - a^{k_1-1}}; \\ C_2 &= \frac{p_b a^{k_1-1} - p_a b^{k_1-1}}{b^{k_1-1} - a^{k_1-1}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

При  $k_1 = 1$ :

$$\begin{cases} C_1 \ln a + C_2 = -p_a; \\ C_1 \ln b + C_2 = -p_b, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\text{откуда } C_1 = \frac{p_a - p_b}{\ln b - \ln a}, C_2 = \frac{p_b \ln a - p_a \ln b}{\ln b - \ln a}.$$

Подставив (4.14) в (4.1), при  $k_1 \neq 1$  получим:

$$\frac{E'}{E} = \frac{r^{k_1-2} C_1 (k_1 + 1)}{r^{k_1-1} C_1 \left( \frac{m}{k_1 - 1} + 1 \right) + C_2 m}. \quad (4.18)$$

Введем следующие обозначения:  $A = C_1(k_1 + 1)$ ,  $B = C_1 \left( \frac{m}{k_1 - 1} + 1 \right)$ ,  $C = C_2 m$  и выполним в уравнении (4.18) разделение переменных:

$$\frac{dE}{E} = \frac{Ar^{k_1-2}}{Br^{k_1-1} + C} dr. \quad (4.19)$$

Проинтегрируем (4.19):

$$\begin{aligned} \ln E &= \int \frac{Ar^{k_1-2}}{Br^{k_1-1} + C} dr + \ln C_0 = \left\| \frac{Br^{k_1-1} + C}{B(k_1 - 1)r^{k_1-2}} dr = dt \right\| = \\ &= \frac{A}{B(k_1 - 1)} \int \frac{dt}{t} + \ln C_0 = \frac{A}{B(k_1 - 1)} \ln t + \ln C_0 = \\ &= \ln \left( C_0 [Br^{k_1-1} + C]^{\frac{A}{B(k_1 - 1)}} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Окончательно решение уравнения (4.19) примет вид:

$$E(r) = C_0 (Br^{k_1-1} + C)^{\frac{A}{B(k_1 - 1)}} = \quad (4.21)$$

$$= C_0 \left( \frac{(p_a - p_b)(m + k_1 - 1)r^{k_1-1} + m(p_b a^{k_1-1} - p_a b^{k_1-1})}{b^{k_1-1} - a^{k_1-1}} \right)^{\frac{k_1+1}{k_1-1+m}},$$

где  $C_0$  – произвольная константа интегрирования.

Выражение (4.21) при  $m + k_1 - 1 = 0$  оказывается неопределенным. При таком условии уравнение (4.19) перепишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{E'}{E} &= r^{k_1-2} \frac{C_1(k_1+1)}{C_2 m} = r^{k_1-2} \frac{(p_a - p_b)(k_1-1)(k_1+1)}{(p_b a^{k_1-1} - p_a b^{k_1-1})m} = \\ &= r^{-1-m} \frac{(p_a - p_b)(-m)(2-m)}{(p_b a^{-m} - p_a b^{-m})m}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Общий интеграл уравнения (4.22) имеет вид:

$$E(r) = C_0 \exp \left( r^{-m} \frac{(p_a - p_b)(2-m)}{(p_b a^{-m} - p_a b^{-m})m} \right). \quad (4.23)$$

Отметим, что условие  $m + k_1 - 1 = 0$  соответствует второй теории прочности, т.к. для плоского напряженного состояния:

$$m + k_1 - 1 = 1 - \nu + \nu - 1 = 0,$$

а для плоской деформации:

$$m + k_1 - 1 = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} + \frac{\nu}{1 - \nu} - 1 = \frac{1 - 2\nu + \nu - (1 - \nu)}{1 - \nu} = 0.$$

Таким образом, формула (4.23) представляет собой решение обратной задачи на основе второй теории прочности. Данное выражение можно также получить, если перейти в (4.21) к пределу при  $m + k_1 - 1 \rightarrow 0$ .

Подставим (4.14) в (4.1) при  $k_1 = 1$ :

$$\frac{E'}{E} ([C_1 \ln r + C_2]m + C_1) = \frac{2C_1}{r}. \quad (4.24)$$

Разделим переменные в (4.24) и затем проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{E} &= \frac{2C_1}{r[(C_1 \ln r + C_2)m + C_1]} dr; \\ \ln E &= 2 \int \frac{C_1}{r[(C_1 \ln r + C_2)m + C_1]} dr + \ln C_0 = \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$= \left\| \begin{array}{l} (C_1 \ln r + C_2)m + C_1 = t \\ C_1 m \frac{dr}{r} = dt \end{array} \right\| = \frac{2}{m} \int \frac{dt}{t} + \ln C_0 = \frac{2}{m} \ln t + \ln C_0.$$

Окончательно выражение для закона изменения модуля упругости примет вид:

$$E(r) = C_0 \left[ \frac{(p_a - p_b)(1 + m \ln r) + m(p_b \ln a - p_a \ln b)}{\ln b - \ln a} \right]^{\frac{2}{m}}. \quad (4.26)$$

Формула (4.26) – решение обратной задачи на основе 3-й теории прочности.

Введем следующее обозначение:  $E_0 = E(a)$ .

$$E_0 = E(a) = C_0 \left[ \frac{(p_a - p_b)(1 + m \ln a) + m(p_b \ln a - p_a \ln b)}{\ln b - \ln a} \right]^{\frac{2}{m}}. \quad (4.27)$$

Выразим из (4.27)  $C_0$  и подставим в (4.26):

$$E(r) = E_0 \left[ \frac{(p_a - p_b)(1 + m \ln r) + m(p_b \ln a - p_a \ln b)}{(p_a - p_b)(1 + m \ln a) + m(p_b \ln a - p_a \ln b)} \right]^{\frac{2}{m}}. \quad (4.28)$$

Данная формула была получена Б. М. Языевым [48]. Отметим, что формулу (4.26) также можно получить из (4.21), перейдя в ней к пределу при  $k_1 \rightarrow 1$ . Пусть  $x = k_1 - 1$ , тогда:

$$\begin{aligned} \lim_{k_1 \rightarrow 1} E &= C_0 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(p_a - p_b)(m + x)r^x + m(p_b a^x - p_a b^x)}{b^x - a^x} \right)^{\frac{x+2}{x+m}} = \\ &= C_0 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(p_a - p_b)(m + x)r^x + m(p_b a^x - p_a b^x)}{b^x - a^x} \right) \right)^{\frac{2}{m}} = C_0 \left[ \frac{0}{0} \right]^{\frac{2}{m}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Раскроем неопределенность в (4.29) по правилу Лопитала:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(p_a - p_b)(m + x)r^x + m(p_b a^x - p_a b^x)}{b^x - a^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(p_a - p_b)(r^x + (m + x)r^x \ln r) + m(p_b a^x \ln a - p_a b^x \ln b)}{b^x \ln b - a^x \ln a} \right) \\ &= \frac{(p_a - p_b)(1 + m \ln r) + m(p_b \ln a - p_a \ln b)}{\ln b - \ln a}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Подставив (4.30) в (4.29), придем к формуле (4.26).

Таким образом, при  $k_1 \neq 1$  и  $k_1 \neq (1 - m)$  решением обратной задачи при эквивалентном напряжении, определяемом по формуле (4.7), выступает выражение (4.21). При  $k = (1 - m)$  и  $k = 1$  — соответственно формулы (4.23) и (4.26).

На рис. 4.1 представлен график изменения модуля упругости  $E$  как функции от  $r$  и  $k_1$ . График построен для случая ПНС при  $b/a = 1.5$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0$ ,  $\nu = 0.3$ . Коэффициент  $k_1$  может принимать значения в интервале от 0 до 1. Из рис. 4.1 видно, что наименьший перепад между модулем упругости на внутренней и внешней поверхности для равнонапряженного цилиндра наблюдается при  $k_1 = 0$ , т.е. по первой теории прочности. С ростом коэффициента  $k_1$  величина  $E(b)/E(a)$  возрастает и достигает своего максимального значения при  $k_1 = 1$ , т.е. по третьей теории прочности. При  $k_1 = 0$ :  $E(b)/E(a) = 1.59$ , а при  $k_1 = 1$ :  $E(b)/E(a) = 2.6$ .

Создание равнонапряженности может приводить к существенному экономическому эффекту. На рис. 4.2 показаны графики распределения эквивалентных напряжений по третьей теории прочности для однородного (штриховая линия) и равнонапряженного (сплошная линия) цилиндра, находящихся в условиях ПНС, при следующих исходных данных:  $a = 15$  см,  $b = 28$  см,  $\nu = 0.3$ ,  $p_a = 10$  МПа,  $p_b = 0$ .

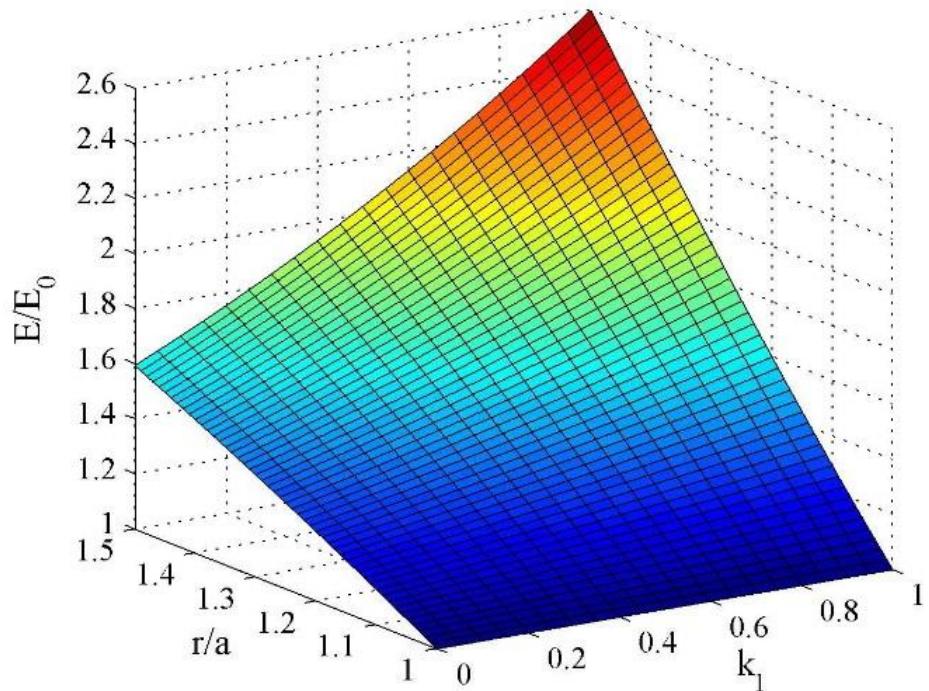


Рис. 4.1 — Зависимость модуля упругости от радиуса и коэффициента  $k_1$

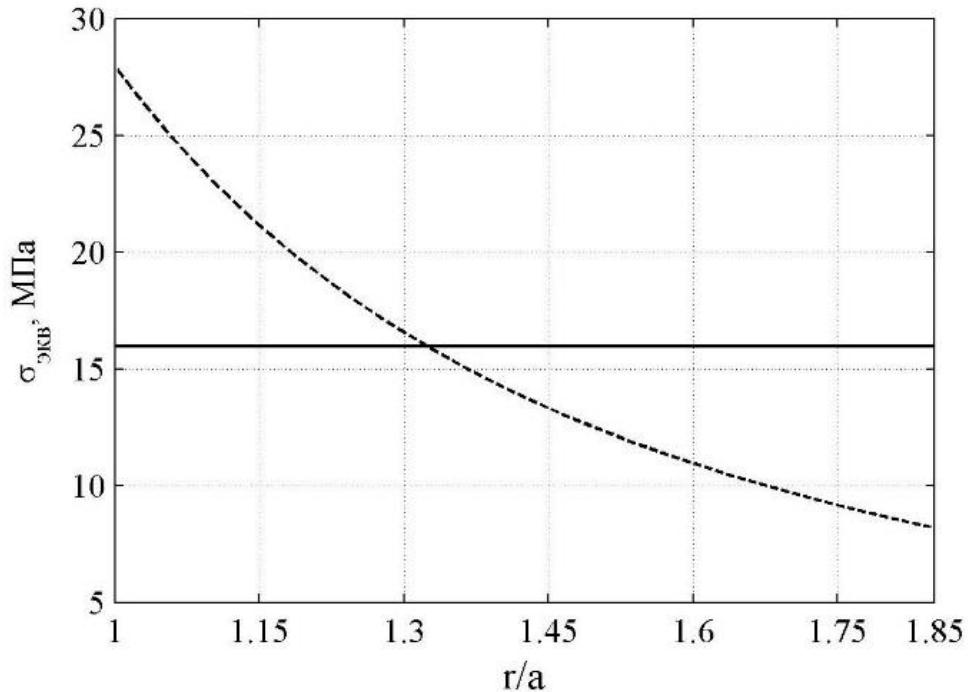


Рис. 4.2 — Изменение эквивалентных напряжений для однородного и равнонапряженного цилиндра

Максимальные эквивалентные напряжения за счет неоднородности снизились с 27.9 МПа до 16 МПа, т. е. в 1.7 раз.

## 4.2 Оптимизация цилиндра при силовых и температурных воздействиях

Допустим, что происходит нагрев внутренней поверхности цилиндра от 0 °C до  $T_a$ . На внешней поверхности при этом пусть температура остается постоянной и равной 0 °C.

Закон изменения температуры при этом будет иметь вид:

$$T(r) = T_0 \frac{\ln\left(\frac{b}{r}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Известно, что для однородного цилиндра напряжения при этом будут распределяться неравномерно. Исчерпание несущей способности произойдет в какой-то малой области, т. е. ресурс материала оказывается использованным не в полной мере. Найдем такой закон изменения модуля упругости, при котором цилиндр будет равнонапряженным.

Основное разрешающее уравнение относительно радиальных напряжений при силовых и температурных воздействиях в случае плоской осесимметричной задачи имеет вид [46]:

$$\sigma''_r + \left( \frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) \sigma'_r - \frac{m}{r} \frac{E'}{E} \sigma_r = -k \frac{E\alpha T'}{r}, \quad (4.31)$$

где  $m = 1 - \nu$ ,  $k = 1$  для ПНС;  $m = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$ ,  $k = \frac{1}{1-\nu}$  для ПДС.

При равнонапряженном состоянии напряжение  $\sigma_r$  должно удовлетворять уравнению (4.10). Подставляя решение уравнения (4.10) в (4.31) получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно модуля упругости:

$$E'(Br^{k_1-1} + C) = kE^2\alpha T' + EA r^{k_1-2}, \quad (4.32)$$

где  $A = C_1(k_1 + 1)$ ,  $B = C_1 \left( 1 + \frac{m}{k_1-1} \right)$ ,  $C = C_2 m$ .

Данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение Бернулли. Аналитическое решение его можно получить лишь при определенных значениях  $k_1$ . Так в работах [46, 48, 54] приводится решение обратной задачи на основе третьей теории прочности, которая соответствует случаю  $k_1 = 1$ . Уравнение (4.32) легко представляется в виде  $E' = f(r, E)$ , что позволяет решить его численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

При этом возникает вопрос о граничных условиях. Модуль упругости на внутренней поверхности  $E_0 = E(a)$  может быть произвольным, для удобства можно принять  $E_0 = 1$ .

Была решена модельная задача для толстостенного цилиндра, находящегося в условиях ПНС, при следующих исходных данных: внутренний радиус  $a = 15$  см, внешний радиус  $b = 25$  см, коэффициент температурного расширения  $\alpha = 10^{-5}$  1/град,  $\nu = 0.3$ , внутреннее давление  $p_a = 10$  МПа, внешнее давление  $p_b = 0$ ,  $T_a = 100$  °C,  $k_1 = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} = 0.5$ . График изменения температуры по толщине цилиндра представлен на рис. 4.3.

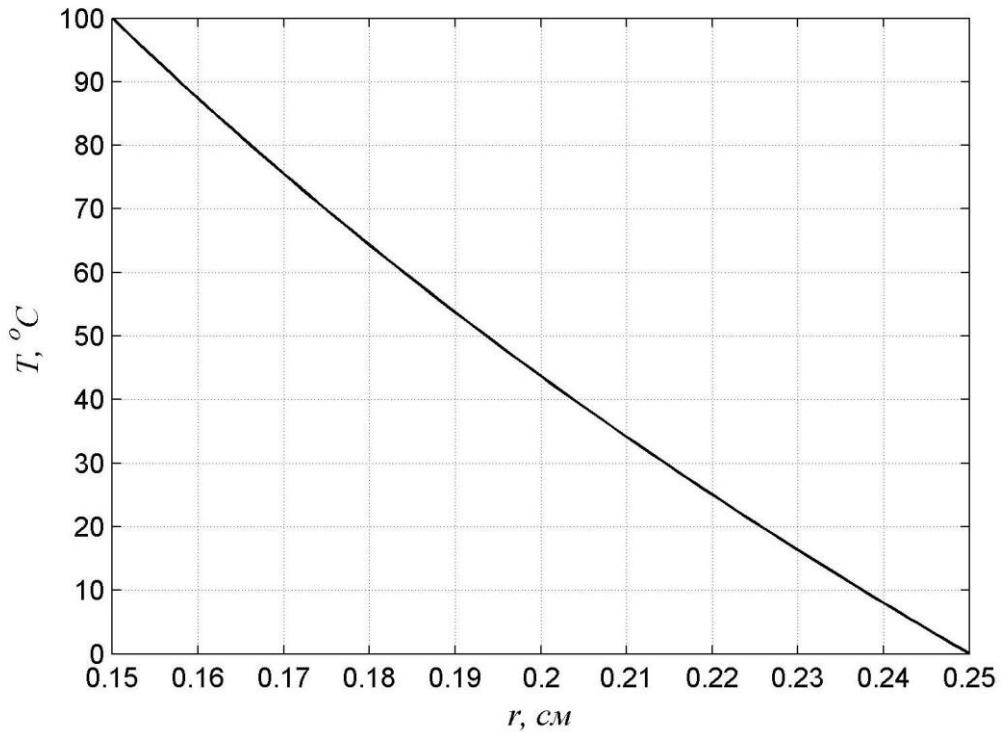


Рис. 4.3 — Изменение температуры по толщине цилиндра

На рис. 4.4 представлен график изменения модуля упругости  $E(r)/E_0$  для равнонапряженного цилиндра.

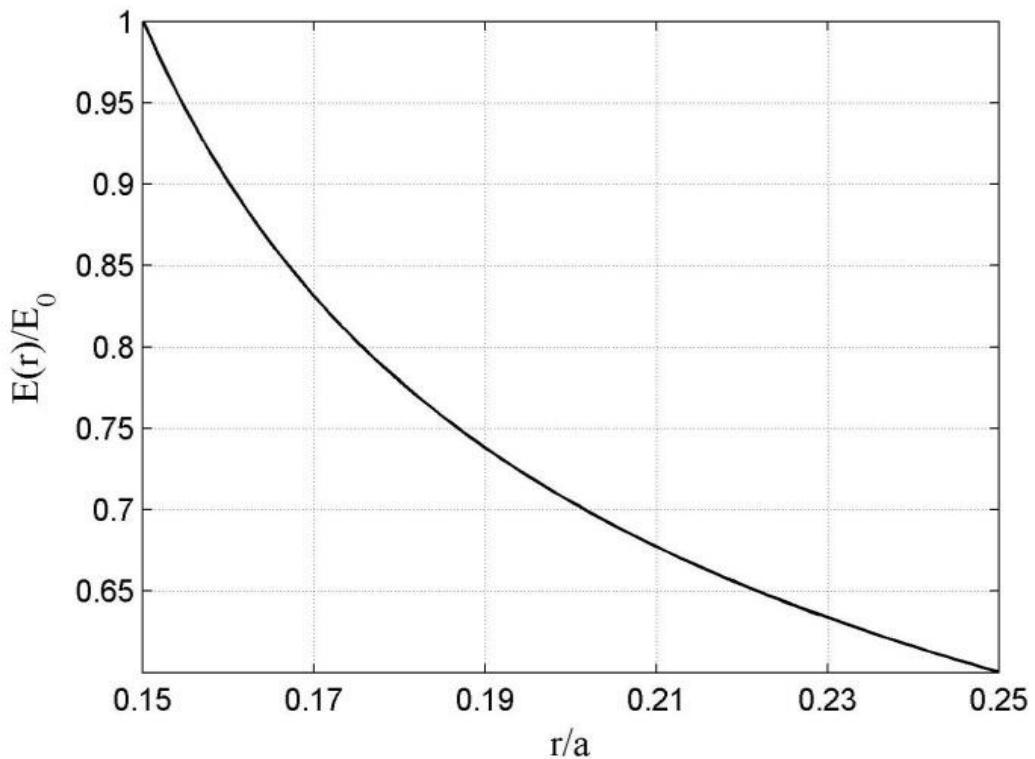


Рис. 4.4 — Изменение модуля упругости для равнонапряженного цилиндра

Рис. 4.5 — изменение эквивалентных напряжений для однородного цилиндра (штриховая линия) и равнонапряженного цилиндра (сплошная линия). Из представленного графика видно, что максимальные эквивалентные напряжения снизились с 24.2 МПа до 17.2 МПа. Таким образом, несущая способность цилиндра при той же толщине увеличилась в 1.4 раза.

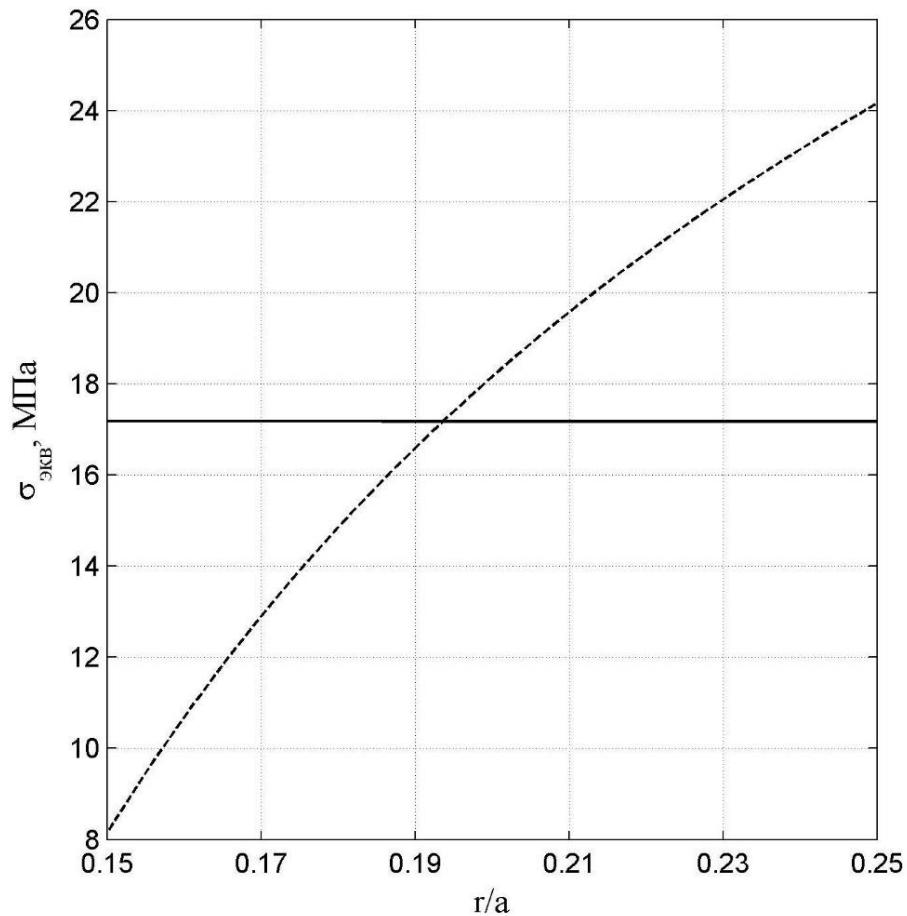


Рис. 4.5 — Распределение эквивалентных напряжений по теории прочности Мора для однородного (штриховая линия) и неоднородного (сплошная линия) цилиндра

Отметим, что при определенном соотношении между внутренним давлением и разницей температур на внутренней и внешней поверхности однородный цилиндр может быть равнонапряженным по третьей теории прочности. Уравнение (4.31) для однородного цилиндра перепишется в виде:

$$\sigma''_r + \frac{3}{r} \sigma'_r = -\frac{kE\alpha T'}{r} = \frac{kE\alpha T_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot r^2}. \quad (4.33)$$

Условие постоянства эквивалентных напряжений по третьей теории прочности запишется в виде:

$$\frac{d\sigma_{\text{экв}}}{dr} = \frac{d}{dr}(\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{d}{dr}(r\sigma'_r + \sigma_r - \sigma_r) = r\sigma''_r + \sigma'_r = 0. \quad (4.34)$$

Общее решение уравнения (4.34) имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= C_1 \ln r + C_2; \\ C_1 &= \frac{p_b - p_a}{\ln a - \ln b}; \\ C_2 &= \frac{p_a \ln b - p_b \ln a}{\ln a - \ln b}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Подставив (4.35) в (4.33), можно найти температуру  $T_0$ , при которой однородный цилиндр будет равнопроченным:

$$T_0 = \frac{2C_1 \ln(b/a)}{k\alpha E} = \frac{2(p_a - p_b)}{k\alpha E}. \quad (4.36)$$

Таким образом, неравномерный нагрев цилиндра может выступать в качестве еще одного способа создания равнопроченного состояния.

### 4.3 Выводы по главе

Решены задачи оптимизации толстостенных цилиндрических оболочек, испытывающих действие силовых и температурных нагрузок. Эквивалентное напряжение представлено в виде линейной комбинации напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ . Такой подход является обобщением первой, второй и третьей теории прочности, а также упрощенной теории прочности Мора.

На основе обобщенной теории прочности аналитически получен закон изменения модуля упругости по толщине толстостенной трубы, при котором она будет равнопроченной по обобщенной теории прочности при действии внутреннего и внешнего давления.

Также численно, с использованием метода Рунге-Кутта четвертого порядка, получено решение задачи оптимизации при совместном действии температурных и силовых воздействий. Установлено что при определенном соотношении между внутренним давлением и разницей температур на внутренней и внешней

поверхности однородный цилиндр может быть равнонапряженным по третьей теории прочности. Таким образом, неравномерный нагрев цилиндра может выступать в качестве еще одного способа создания равнонапряженного состояния.

Создание искусственной неоднородности в рассмотренной модельной задаче привело к увеличению несущей способности цилиндра при той же толщине в 1.4 раза.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методика определения релаксационных констант, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, с учетом изменения температуры по кривым релаксации напряжений. Получены зависимости от температуры модуля упругости, модуля высокоэластичности, модуля скорости, а также начальной релаксационной вязкости для вторичного поливинилхлорида. Для первичного и вторичного полипропилена путем обработки кривых релаксации напряжений получены значения релаксационных констант при комнатной температуре. Установлено, что линейное уравнение Максвелла-Томпсона неудовлетворительно описывает процесс релаксации поливинилхлорида и полипропилена.

2. Получены разрешающие уравнения для решения задач термовязкоупругости однослойных и многослойных полимерных цилиндров методом конечных элементов в одномерной и двумерной постановке.

3. Исследован случай плоского напряженного состояния и плоской деформации толстостенного цилиндра из ЭДТ-10 с учетом изменения температуры и ползучести. Проведен анализ применимости гипотезы о равенстве нулю объемной деформации ползучести. Установлено, что применение данной гипотезы приводит к завышенным (до 35%) значениям напряжений в конце процесса ползучести.

4. Исследовано влияние переменного теплового режима на НДС трубы из поливинилхлорида. Установлено, что при нестационарном тепловом режиме могут возникать напряжения существенно выше, чем при стационарном температурном поле. Объясняется это тем, что у полимеров имеется составляющая деформации, по фазе отстающая от напряжений (высокоэластическая деформация).

5. Исследовано напряженно-деформированное состояние трехслойной полимерной трубы с учетом вязкоупругости. Установлено, что в процессе ползучести происходит перераспределение напряжений между полимерными слоями и внутренним армирующим слоем: напряжения в слоях из полиэтилена

высокой плотности с течением времени убывают, а в армирующем слое возрастают на 25%.

6. Проведен анализ уравнения Максвелла-Гуревича при  $t \rightarrow \infty$ , и в результате получена связь между напряжениями и деформациями в конце процесса ползучести. Введена величина длительного модуля и длительного коэффициента Пуассона.

7. Разработан аналитический метод расчета многослойных труб, базирующийся на решении задачи Ламе. Выполнено сравнение результатов численного решения в одномерной и двумерной постановке с аналитическим решением.

8. Решены задачи оптимизации толстостенных цилиндрических оболочек, испытывающих действие силовых и температурных нагрузок на основе обобщенной теории прочности, включающей в себя как частные случаи первую, вторую и третью теорию прочности, а также упрощенную теорию прочности Мора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиллоуби, Д. А. Полимерные трубы и трубопроводы / Д. А. Уиллоуби, Д. Вудсон, Р. Суверлэнд; пер. с англ. — СПб.: Профессия, 2010. — 486 с.
2. Москвитин, Б. А. Оборудование водопроводных и канализационных сооружений: учебник для вузов / Б. А. Москвитин. — М.: Стройиздат, 1984. — 352 с.
3. Аскельрад, Э. Л. Расчет трубопроводов / Э. Л. Аскельрад, В. П. Ильин. — Л.: Машиностроение, 1972. — 240 с.
4. Бухтин, В. Е. О расчете на прочность трубопроводов из термопластов / В. Е. Бухтин // Трубопроводы и экология. — 2000. — № 4. — С. 28–29.
5. Гусева, Р. И. Основы проектирования элементов конструкций из полимерных материалов / Р. И. Гусева, А. А. Вялов. — Комсомольск-на-Амуре: КМ, 1995. — 95 с.
6. Магалиф, В. Я. Расчеты трубопроводов на вычислительных машинах / В. Я. Магалиф, Л. С. Якобсон. — М.: Энергия, 1969. — 295 с.
7. Феодосьев, В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. — М.: Наука, 1969. — 110 с.
8. Хасилев, В. Я. Вопросы методики расчета надежности и резервирования трубопроводных систем / В. Я. Хасилев, А. П. Мережков. — М.: Машиностроение, 1973. — 132 с.
9. Якобсен, А. Л. Полимерные и неорганические материалы в трубопроводном строительстве / А. Л. Якобсен. — М.: Дара, 1990. — 186 с.
10. Ромейко, В. С. Пластмассовые трубопроводы / В. С. Ромейко, А. Н. Шестопал, А. А. Персион. — М.: Высшая школа, 1984. — 200 с.
11. Шапиро, Г. И. Пластмассовые трубопроводы / Г. И. Шапиро. — М.: Москва, 1986. — 305 с.
12. Hessel, J. Plastics in pipelining / J. Hessel // KunststofFe, 1989. — Т. 28. — № 1. — С. 17–20.

13. Калиничев, Э. Л. Выбор пластмасс для изготовления и эксплуатации изделий: справочное издание / Э. Л. Калиничев, М. Б. Саковцева. — Л.: Химия, 1987. — 416 с.
14. Новиков, В. У. Полимерные материалы для строительства / В. У. Новиков. — М.: Высшая школа, 1995. — 448 с.
15. Каменев, Е. И. Применение пластических масс: справочное пособие / Е. И. Каменев, Г. Д. Мясников, М. П. Платонов. — Л.: Химия, 1984. — 448 с.
16. Hill, J. M. Finite elastic non-symmetrical inflation cylindrical rubber tubes J. M. Hill, A. M. Milan // Proc. Roy. Soc. London, 1999. — Т. 455. — С. 1067–1082.
17. Ramos, R. A comparative analysis between analytical and F-E based models for flexible pipes subjected to ax symmetrical loads / R. Ramos, C. P. Pesce, C. A. Martins // Proc. Int. Offshore and Polar Eng. Conf. — Seattle, 2000. — Т. 2. — С. 80–88.
18. Фролов, К. В. Научные и прикладные проблемы долговременной прочности энергетического оборудования / К. В. Фролов, В. К. Рыжков, Н. А. Махутов, А. А. Чижик. — Л.: НПО ЦКТИ, 1988. — 421 с.
19. Бартенев, Г. М. Прочность и механизм разрушения полимеров / Г. М. Бартенев. — М.: Химия, 1984. — 345 с.
20. Коган, Д. Ф. Трубопроводы из термопластов / Д. Ф. Коган. — М.: Наук, 1968. — 150 с.
21. Elleul, M. D. Novel low temperature resistant thermoplastic elastomers for specialty application / M. D. Elleul // Plast, Rubber, and Compos. Process and Appl, 1997. — Т. 26. — № 3. — С. 137–142.
22. Bronnikov, S. V. Time and temperature dependent Young's modulus for isotropic and highly oriented polymers / S. V. Bronnikov // Rev. Fr. Iad, 1999. — Т. 28. — С. 69–74.
23. Гольдман, А. Я. Прочность конструкционных пластмасс / А. Я. Гольдман. — Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1979. — 320 с.
24. Бокшицкий, М. Н. Длительная прочность полимеров / М. Н. Бокшицкий. — М.: Химия, 1973. — 309 с.

25. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
26. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
27. Ржаницын, А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени / А. Р. Ржаницын. — М.: ГИТЛ, 1949. — 248 с.
28. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. — М.: Стройиздат, 1968. — 419 с.
29. Сидоренко, А. С. Напряженно-деформированное состояние трубопровода при виброударном нагружении / А. С. Сидоренко // Науч. вести МГТУ ГА. — 2000. — № 29. — С. 37–44.
30. Chudnovsky, A. Methodology for durability analysis of HDPE pipe / A. Chudnovsky, V. Sehanovich, S. Wu // Trans. ASME J. Pressure Vessel Technol. — 2000. — Т. 122. — № 2. — С. 152–155.
31. Арутюнян, Н. Х. Теория ползучести неоднородных тел / Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
32. Gross, B. Mathematical structure of the theories of viscoelasticity / B. Gross. — Paris: Hermann, 1953. — 75 с.
33. Литвинов, С. В. Нелинейная ползучесть неоднородных многослойных цилиндров и сфер: дис... канд. техн. наук. 01.00.04 / Литвинов Степан Викторович. — М., 2010. — 200 с.
34. Конференция по механике: сборник статей. — Варна, 1970.
35. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров / А. Л. Рабинович. — М.: Наука, 1970. — 283 с.
36. Рабинович, А. Л. Некоторые основные вопросы механики армированных пластиков: дис. д-ра техн. наук. / Рабинович Андрей Львович. — М., 1966. — 368 с.
37. Гуревич, Г. И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай 3 измерений с учётом малых деформаций упругого поледствия / Г. И. Гуревич // Труды ИФЗ АН СССР. — 1959. — №2. — С. 169.

38. Бабич, В. Ф. Влияние температуры на механические характеристики некоторых эпоксидных связующих / В. Ф. Бабич, А. Л. Рабинович // Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. — 1967. — С. 150–153.
39. Попов, А. И. Исследование начальных напряжений в стеклопластике поляризационно-оптическим методом / А. И. Попов, М. А. Паша, А. А. Наумов // Труды МИСИ им. В. В. Куйбышева. — 1970. — № 84–86. — С. 319–327.
40. Тростянская, Е. Б. Изменение структуры и свойств отверженных смол под влиянием наполнителя / Е. Б. Тростянская // Механика полимеров. — 1972. — № 1. — С. 26–30.
41. Уилки, Ч. Поливинилхлорид / Ч. Уилки, Дж. Саммерс, Ч. Даниэлс; пер. с англ. / под ред. Г. Е. Заикова. — СПб.: Профессия, 2007. — 728 с.
42. Соловьева, Е. В. Исследование релаксационных свойств первичного и вторичного поливинилхлорида / Е. В. Соловьева, А. А. Аскадский, М. Н. Попова // Пластические массы. — 2013. — № 2. — С. 54–62.
43. Соловьева, Е. В. Экспериментальные исследования релаксации напряжения поливинилхлорида / Е. В. Соловьева // Наука, техника и образование. — 2015. — № 8. — С. 26–28.
44. Бабич, В. Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики полимеров: дис. ... канд. техн. наук. / Бабич Владимир Филипович. — М., 1966. — 152 с.
45. Аскадский, А. А. Расчет параметров релаксации напряжения первичных и вторичных полимеров в линейной и нелинейной областях механического поведения / А. А. Аскадский // Новые технологии. — 2009. — № 3. — С. 76–83.
46. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография / В. И. Андреев. — М.: Издательство АСВ, 2002. — 288 с.
47. Языев, Б. М. Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, М. Ю. Козельская // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 3. — С. 759–763.

48. Языев, Б. М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров: дисс. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / Языев Батыр Меретович. — М., 1990. — 171 с.
49. Литвинов, С. В. Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Ю. Ф. Козельский, Б. М. Языев // Инженер. вестник Дона. — 2012. — № 3. — Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954>.
50. Языев, Б. М. Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей / Б. М. Языев, С. В. Литвинов, Ю. Ф. Козельский // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 2. — Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/I>.
51. Бочкарёва, С. А. Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных полимерных труб методом конечных элементов / С. А. Бочкарёва, Ю. А. Реутов // Известия Томского политехнического университета. — 2013. — № 2. — С. 81–84.
52. Турусов, Р. А. Температурные напряжения и релаксационные явления в осесимметричных задачах механики жестких полимеров: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.19 / Турусов Роберт Алексеевич. — М., 1970. — 104 с.
53. Варданян, Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. — М.: Издательство АСВ, 1995. — 568 с.
54. Андреев, В. И. О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел / В. И. Андреев, И. А. Потехин // Вестник Отделения строит. наук Российской академ. архитект. и строит. наук. — 2007. — № 11. — С. 48–52.
55. Andreev, V. I. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion / V. I. Andreev, A. S. Chepurnenko, B. M. Jazyjev // Advanced Materials Research Trans Tech Publications. — Switzerland, 2014. — Vols 887–888. — C. 869–872.

56. Шестериков, С. А. Релаксация и длительная прочность трубок при сложном напряжённом состоянии / С. А. Шестериков // Научн. пр. ин-т мех. Моск. ун-та. — 1973. — № 23. — С. 25–29.
57. Тетерс, Г. А. Длительная устойчивость цилиндрических оболочек из полиэтилена / Г. А. Тетерс // Механика полимеров. — 1966. — № 4. — С. 58–62.
58. Ржаницын, А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов / А. Р. Ржаницын. — М.: Стройиздат, 1954. — 288 с.
59. Муханов, В. В. Оптимизация строительных конструкций на основе численного и аналитического решения задач механики неоднородных тел: монография / В. В. Муханов [и др.]. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. — 83 с.
60. Куршин, Л. М. К постановке задачи о выпучивании оболочки при ползучести / Л. М. Куршин // ДАН СССР. — 1965. — № 1. — С. 161–163.
61. Качанов, Л. М. Теория ползучести / Л. М. Качанов. — М.: Физматлит, 1960. — 455 с.
62. Гуревич, Г. И. О зависимости между напряжениями и перемещениями при больших деформациях в случае одномерной задачи / Г. И. Гуревич // Тр. ИФЗ АН СССР. — 1975. — № 2.
63. Гуревич, Г. И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн / Г. И. Гуревич. — М.: Наука, 1974. — 482 с.
64. Бернадский, А. Д. К методике стандартных испытаний на растяжение образцов полимерных материалов малых размеров / А. Д. Бернадский // ВМСЮ. — 1965. — № 6. — С. 15–25.
65. Андреев, В. И. Оссесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести / В. И. Андреев, Б. М. Языев, А. С. Чепурненко // Вестник МГСУ. — 2014. — № 5. — С. 16–24.
66. Samuelson, A. An experimental investigation of Creep Buckling of circular cylindrical shells subject to axial compression / A. Samuelson // Medd. Tlygtechn. — Forsoksanst, 1964. — № 98. — С. 45–49.

67. Hoff, N. I. Creep buckling of plates and shells / N. I. Hoff // Theor. and Appl. Mech. — Berlin, 1973. — C. 124–140.
68. Freudenthal, A. M. The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures / A. M. Freudenthal. — New York, 1950. — 232 c.
69. Akelah, A. Clay Minerals / A. Akelah, P. Kelly, S. Qutubuddin, A. Meet. — 1994, 169 c.
70. Butler, K. M. Heat Transfer in an Intumescent Material Using a Three-Dimensional Lagrangian Model. National Institute of Standards and Technology (NIST) and Society of Fire Protection Engineers (SFPE) / K. M. Butler, G. W. Mulholland // International Conference on Fire Research and Engineering (ICFRE): Proceedings Lund D. P., Angell E. A. Editor(s). — September 10-15. — Orlando, 1995. — C. 261–266.
71. Futterer, Th. New Developments in Intumescent Fire-Protection Combinations for Thermoplastic / Th. Futterer // Proceeding II European Conference «Fire Retardant Coating II». — Berlin, 2007. — C. 69–101.
72. Gilman, J. W. Lich-tenhan / J. W. Gilman, T. Kashiwagi, E. P. Giannelis, J. D. Lich-tenhan. — 1997. — 81 c.
73. Lee, J. Porous and Cellular Materials for Structural Applications / J. Lee, T. Takekoshi, E. P. Giannelis // Mater. Res. Soc. Symp. — 1997. — T. 457. — 513 c.
74. Camino, G. Thermal degradation of deoxybenzoin polymers studied by pyrolysis-gas chromatography/mass spectrometry / G. Camino, N. Grassie, I. C. McNeill // Polymer Sci., Polymer Chem. Ed. — 1978. — T. 16. — 95 c.
75. Drevelle, C. Thermal and Fire Behaviour of Ammonium Polyphosphate/acrylic Coated Cotton / C. Drevelle [и др.] // Polymer Degradation and Stability. — 2005. — T. 88. — C. 130–137.
76. Chang, J. H. / J. H. Chang [и др.] // Polymer. — 2003. — T. 44(19). — C. 655.
77. Balabanovich, A.I. Fire retardance in poly(butylene terephthalate). The effects of red phosphorus and radiation-induced cross-links / A. I. Balabanovich, T. A. Zevaco, W. Schnabel // Macromolecular Materials and Engineering (submitted). — 2008. — T. 293. — № 3. — C. 206–217.

78. Fletcher, R. A. Clays and Clay Minerals / R. A. Fletcher, D. M. Bibby. — 1987. — 318 c.
79. Messersmith, P.B. Synthesis and barrier properties of poly( $\epsilon$ -caprolactone)-layered silicate nanocomposites / P. B. Messersmith, E. P. Giannelis // J. Polym. Sci. Part A: Polym. Chem. — 1995. — № 33, — C. 1047–1057.
80. Witsiepe, W.K. Inb Polymerization and new polymers / W. K. Witsiepe. // Amer. Chem. Soc. — Washington, 1973. — C. 39–60.
81. Giannelis, E. P. Materials and Design / E. P. Giannelis. — 1992. — 100 c.
82. Kornmann, X. / X. Kornmann, H. Lindberg, L. A. Berglund // Polymer. — 2001, — C. 1303.
83. Gu, B. / B. Gu [и др.] // Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics. — 2003, — C. 1192.
84. Labuschagne, Fr. Metal catalysed intumescence of polyhydroxyl compounds / Fr. Labuschagne // Doctoral Thesis. — University of Pretoria, 2004.
85. Nascimento, R. S. Intumescent flame retardant polymeric materials / R. S. Nascimento, S. P. Ribeiro, C. S. Marcondes // Proceedings of Conference «Fire Retardant Coatings III». — Berlin: Vincentz. — C. 87–97.
86. Lomakin, S. M. Ecological Aspects of Flame Retardancy / S. M. Lomakin, G. E. Zaikov // Utrecht, The Netherlands: VSP International Science Publishers. — 1999. — C. 170.
87. Lan, T. / T. Lan, P. D. Kaviratna, T. J. Pinnavaia // Chem. Mater. — 1995. — C. 2144.
88. Park, J. H. / J. H. Park, S. C. Jana // Macromolecules. — 2003. — C. 2758.
89. Levchik, G. F. Thermal behaviour of ammonium polyphosphate — inorganic compound mixtures. Part I: Talc / G. F. Levchik, A. F. Selevitch, S. V. Levchik, A. I. Lesniskovich // Thermochimica Acta. — 1994. — T. 239. — C. 41–49
90. Oilman, J. W. Polymer-Layered Silicate Nanocomposites with Conventional Flame retardants / J. W. Oilman, T. Kashiwagi // Polymer-Clay Nanocomposites, Pinnavaia, J.T. Beal. — 2000. — C. 193.

91. Pignon, F. / F. Pignon, A. Magnin, J.-M. Piau // Journal. Rheol. — 1998. — C. 1349.
92. Vandersall, H. L. Intumescence Coating Systems. Their Development and Chemistry / H. L. Vandersall // J. Fire and Flamm. — 1971. — № 2. — C. 97–140.
93. Wang, Z. Influence of nano-LDHs on char formation and fire-resistant properties of flame-retardant coating / Z. Wang, E. Han, W. Ke // Progress in Organic Coatings. — 2005. — T. 53. — C. 29–37.
94. Theng, B. K. G. The Chemistry of Clay-Organic reactions / B. K. G. Theng. — London: A Hilger, 1974.
95. Park, J. H. / J. H. Park, S. C. Jana // Macromolecules. — 2003. — C. 758.
96. Salahuddin, N. / N. Salahuddin [и др.] // Ear. Polym. Journal. — 2002. — C. 1477.
97. Troitzsch, J. H. Methods for the fire protection of plastics and coatings by flame retardants and intumescent systems / J. H. Troitzsch // Progress in Organic Coatings. — 1983. — T. 11. — C. 41–69.
98. Yokouchi, M. Structures of two crystalline forms of poly- (butylene terephthalate) and reversible transition between them by mechanical deformation / M. Yokouchi [и др.] // Macromolecules. — 1976. — C. 273.
99. Zlu, L. / L. Zlu // Makromol. Chem. — 1983. — T. 182. — № 12. — C. 3639–3651.
100. Weil, E. D. Phosphorous flame retardant. Encyclopedia of Chemical Technology by Othmer K. 4th Ed. / E. D. Weil // J. Wileyand Sons. — NewYork. — 1993. — T. 10. — C. 976–998.
101. Camino, G. Study of Mechanism of Intumescence in Fire Retardant Polymers. Part I: Thermal Degradation of Ammonium PolyphosphatePentaerythritol Mixtures / G. Camino, L. Costa, L. Trossarelli // Polym. Degrad. and Stab. — 1984. — T. 6. — C. 243–252.
102. Wilkie, C. A. Proceedings of the BCC conference «Recent Advances in Flame Retardancy of Polymeric Materials» / C. A. Wilkie. — Stamford, CT, USA. — 2010.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА НА ЭВМ

### **A.1 Расчет трехслойной трубы с учетом ползучести в одномерной постановке**

```

clc;%очистка командной строки
clear all; %Очистка памяти
t1=0;%Начальный момент времени
t2=200*3600;%конечный момент времени
nt=1000;%число шагов по времени
dt=(t2-t1)/nt;%шаг по времени
p=6.5;%Внутреннее давление, МПа
Eb=172;%модуль высокоэластичности
mz=1.89;%модуль скорости
n0=9.7*10^7;%начальная релаксационная вязкость
r1=5;%внутренний радиус первого слоя
nu1=0.43;%коэффициент Пуассона первого слоя
E1=750;%модуль упругости первого слоя
r2=5.7;%внутренний радиус второго слоя
nu2=0.3;%коэффициент Пуассона второго слоя
E2=10^4;%модуль упругости второго слоя
r3=6.05;%внутренний радиус третьего слоя
nu3=0.43;%коэффициент Пуассона третьего слоя
E3=750;%модуль упругости третьего слоя
r4=6.4;%внешний радиус третьего слоя
nr1=50;%количество КЭ в первом слое
dr1=(r2-r1)/nr1;%размер КЭ для первого слоя
nr2=25;%количество КЭ во втором слое
dr2=(r3-r2)/nr2;%размер КЭ второго слоя
nr3=25;%количество КЭ в третьем слое
dr3=(r4-r3)/nr3;%Размер КЭ третьего слоя
%Информация об узлах;

```

```

R=zeros(1,nr1+nr2+nr3+1);
for i=1:nr1
    R(i)=r1+(i-1)*dr1;
end
for i=1:nr2
    R(i+nr1)=r2+(i-1)*dr2;
end
for i=1:nr3+1
    R(i+nr1+nr2)=r3+(i-1)*dr3;
end
ne=nr1+nr2+nr3; %Общее количество элементов
np=ne+1; %Общее количество узлов
E=zeros(1,ne);
nu=zeros(1,ne);
for i=1:ne
    if R(i)<=r2-dr1
        E(i)=E1;
        nu(i)=nul;
    elseif R(i)<=r3-dr2&&R(i)>=r2
        E(i)=E2;
        nu(i)=nu2;
    else
        E(i)=E3;
        nu(i)=nu3;
    end
end
%Формирование матрицы жесткости
K=zeros(np,np);
Rm=zeros(1,ne);
for j=1:ne

```

```

ri=R(j);
rj=R(j+1);
rm=(ri+rj)/2;
N1=1-(rm-ri)/(rj-ri);
N2=(rm-ri)/(rj-ri);
B=[-1/(rj-ri) 1/(rj-ri)
   N1/rm N2/rm];
D=E(j)/(1+nu(j))/(1-2*nu(j))*[1-nu(j) nu(j)
                                   nu(j) 1-nu(j)];
Ke=B'*D*B*2*pi*rm*(rj-ri);
K(j,j)=K(j,j)+Ke(1,1);
K(j,j+1)=K(j,j+1)+Ke(1,2);
K(j+1,j)=K(j+1,j)+Ke(2,1);
K(j+1,j+1)=K(j+1,j+1)+Ke(2,2);
Rm(j)=(R(j)+R(j+1))/2;
end
ez_r=zeros(nt+1,ne);
ez_t=zeros(nt+1,ne);
sigma_r=zeros(nt+1,ne);
sigma_t=zeros(nt+1,ne);
sigma_z=zeros(nt+1,ne);
u=zeros(nt+1,ne);
for i=1:nt+1
P=zeros(1,np);
P(1)=p*2*pi*r1;
for j=1:ne
ri=R(j);
rj=R(j+1);
rm=(ri+rj)/2;
N1=1-(rm-ri)/(rj-ri);

```

```

N2=(rm-ri) / (rj-ri) ;
B=[-1 / (rj-ri) 1 / (rj-ri)
   N1/rm N2/rm] ;
D=E(j) / (1+nu(j)) / (1-2*nu(j))*[1-nu(j) nu(j)
                                         nu(j) 1-nu(j)] ;
Pe=B'*D*2*pi*rm*(rj-ri)*([1-nu(j), -nu(j);-nu(j),1-
nu(j)]*[ez_r(i,j);ez_t(i,j)]) ;
P(j)=P(j)+Pe(1) ;
P(j+1)=P(j+1)+Pe(2) ;
end
U=K\P' ;
%Вычисление напряжений
for j=1:ne
    u(i,j)=U(j) ;
    Ue=[U(j);U(j+1)] ;
    ri=R(j) ;
    rj=R(j+1) ;
    rm=(ri+rj)/2 ;
    N1=1-(rm-ri)/(rj-ri) ;
    N2=(rm-ri)/(rj-ri) ;
    B=[-1 / (rj-ri) 1 / (rj-ri)
       N1/rm N2/rm] ;
    D=E(j) / (1+nu(j)) / (1-2*nu(j))*[1-nu(j) nu(j)
                                              nu(j) 1-nu(j)] ;
    s=D*(B*Ue-[1-nu(j), -nu(j);-nu(j),1-
nu(j)]*[ez_r(i,j);ez_t(i,j)]) ;
    sigma_r(i,j)=s(1) ;
    sigma_t(i,j)=s(2) ;
    sigma_z(i,j)=nu(j)*(s(1)+s(2))-E(j)*(-ez_r(i,j)-
ez_t(i,j)) ;

```

```

if or(rm<r2, rm>r3)
    p0=(sigma_r(i,j)+sigma_t(i,j)+sigma_z(i,j))/3;
    f_t=3/2*(sigma_t(i,j)-p0)-Eb*ez_t(i,j);
    f_r=3/2*(sigma_r(i,j)-p0)-Eb*ez_r(i,j);
    f_z=3/2*(sigma_z(i,j)-p0)-Eb*(-ez_r(i,j)-
ez_t(i,j));
    if abs(f_t)>abs(f_r) && abs(f_t)>abs(f_z)
        f_max=abs(f_t);
    elseif abs(f_r)>abs(f_t) && abs(f_r)>abs(f_z)
        f_max=abs(f_r);
    else
        f_max=abs(f_z);
    end
    nz=n0*exp(-f_max/mz);
    e_t_=f_t/nz;
    e_r_=f_r/nz;
    if i~=nt+1
        ez_r(i+1,j)=ez_r(i,j)+e_r_*dt;
        ez_t(i+1,j)=ez_t(i,j)+e_t_*dt;
    end
end
end
RR=zeros(nt+1,ne);
time=zeros(nt+1,ne);
Time=zeros(1,nt+1);
for i=1:nt+1
    for j=1:ne
        RR(i,j)=Rm(j);
        time(i,j)=(i-1)*dt/3600;
    end
end

```

```
end
Time(i)=time(i,j);
end
%figure;
%surf(RR, time,sigma_z);
figure;
plot(Rm, sigma_r(1,1:ne), '--');
hold on
plot(Rm, sigma_r(nt+1,1:ne));
figure;
plot(Rm, sigma_t(1,1:ne), '--');
hold on
plot(Rm, sigma_t(nt+1,1:ne));
figure;
plot(Rm, sigma_z(1,1:ne), '--');
hold on
plot(Rm, sigma_z(nt+1,1:ne));
figure;
plot(Rm, u(1, 1:ne), '--');
hold on
plot(Rm, u(nt+1, 1:ne));
%figure;
%plot(Rm, ez_t(nt+1, 1:ne));
figure;
plot(Time, sigma_t(1:nt+1,nr1+1));
figure;
plot(Time, sigma_t(1:nt+1,1));
figure;
plot(Time, sigma_t(1:nt+1,nr1+nr2+1));
```

## A.2 Расчет трехслойной трубы в двумерной постановке с использованием библиотеки PDE

```

clc;

clear all;%Очистка памяти

%Исходные данные

h=4;%длина рассматриваемого фрагмента трубы, мм
r1=5;%внутренний радиус первого слоя, мм
nu1=0.43;%коэффициент Пуассона первого слоя
pa=6.5;%внутреннее давление, МПа
Eb=172;%модуль высокоэластичности, МПа
mz=1.89;%модуль скорости, МПа
n0=9.7*10^7;%начальная релаксационная вязкость, МПа2*с
E1=750;%модуль упругости первого слоя, МПа
r2=5.7;%внутренний радиус второго слоя, мм
nu2=0.3;%коэффициент Пуассона второго слоя
E2=10^4;%модуль упругости второго слоя, МПа
r3=6.05;%внутренний радиус третьего слоя, мм
nu3=0.43;%коэффициент Пуассона третьего слоя
E3=750;%Модуль упругости третьего слоя
r4=6.4;%внешний радиус третьего слоя, мм
%Определение геометрии области

hmax=0.15;%максимальный размер стороны КЭ

g=[2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
   r1 r2 r2 r1 r2 r3 r3 r3 r4 r4
   r2 r2 r1 r1 r3 r3 r2 r4 r4 r3
   0 0 h h 0 0 h 0 0 h
   0 h h 0 0 h h 0 h h
   1 1 1 1 2 2 2 3 3 3
   0 2 0 0 0 3 0 0 0 0];

```

```
[p,e,t]=initmesh(g,'Hmax',hmax);%Разбиение на конечные элементы
pdemesh(p,e,t);%вывод сетки КЭ
axis square;
np=size(p,2);%количество узлов
ne=size(e,2);%количество ребер, попавших на границу
nt=size(t,2);%количество элементов
P0=sparse(1,2*np);%вектор узловых нагрузок
K=sparse(2*np,2*np);%Глобальная матрица жесткости
%Формируем глобальную матрицу жесткости
for i=1:nt
    BD;%Вспомогательная процедура для формирования матриц [D]
    и [B]
    Ke=B'*D*B*2*pi*rm*A;%Локальная матрица жесткости
    %Заполнение глобальной матрицы жесткости
    for j=1:2
        for k=1:2
            for l=1:3
                for m=1:3
                    K(2*ii(l)+j-2,2*ii(m)+k-2)=K(2*ii(l)+j-
                    2,2*ii(m)+k-2)+Ke(2*l+j-2,2*m+k-2);
                end
            end
        end
    end
    %Нагрузка и граничные условия
    for i=1:ne
        ii(1)=e(1,i);
        ii(2)=e(2,i);
    end
end
```

```

ri=p(1,ii(1));
rj=p(1,ii(2));
zi=p(2,ii(1));
zj=p(2,ii(2));
%Внутренняя поверхность
if ri==rj&&ri==r1
    L=abs(zj-zi);
    P0(2*(ii(1))-1)=P0(2*(ii(1))-1)+pa*pi*r1*L;
    P0(2*(ii(2))-1)=P0(2*(ii(2))-1)+pa*pi*r1*L;
end
%Торцевые поверхности
if or (zi==zj&&zi==0, zi==zj&&zi==h)
    K(2*ii(1),1:2*np)=0;
    K(1:2*np,2*ii(1))=0;
    K(2*ii(1),2*ii(1))=1;
    P0(2*ii(1))=0;
    K(2*ii(2),1:2*np)=0;
    K(1:2*np,2*ii(2))=0;
    K(2*ii(2),2*ii(2))=1;
    P0(2*ii(2))=0;
end
end
t1=0;%Начальный момент времени, с
t2=100*3600;%Конечный момент времени, с
nT=200;%Число шагов по времени
dt=(t2-t1)/nT;%Шаг по времени, с
ez=zeros(4,nt); %Вектор деформаций ползучести
Pz=zeros(1,2*np);%Вектор нагрузки от ползучести
sigma_r=zeros(nT+1,nt);%Матрица радиальных напряжений
sigma_t=zeros(nT+1,nt);%Матрица окружных напряжений

```

```

sigma_z=zeros(nT+1,nt);%Матрица напряжений по z
tau=zeros(nT+1,nt);%Матрица касательных напряжений
for it=1:nT+1 %Цикл по времени
P=P0+Pz; %Полный вектор нагрузки
%Накладываем граничные условия на вектор нагрузки
for i=1:ne
ii(1)=e(1,i);
ii(2)=e(2,i);
ri=p(1,ii(1));
rj=p(1,ii(2));
zi=p(2,ii(1));
zj=p(2,ii(2));
if or (zi==zj&&zi==0, zi==zj&&zi==h)
P(2*ii(1))=0;
P(2*ii(2))=0;
end
end
U=K\P'; %Решение системы линейных алгебраических уравнений
МКЭ
u=zeros(np,1);%Вектор перемещений u
%Вычисление нагрузки от ползучести
Pz=zeros(1,2*np);
for i=1:nt
BD;
Ue=zeros(4,1);%Локальный вектор перемещений
for j=1:2
for l=1:3
Ue(2*l+j-2)=U(2*ii(l)+j-2);
end
end

```

```

S=D*(B*Ue-ez(1:4,i));%Вектор напряжений
sigma_r(it,i)=S(1);
sigma_z(it,i)=S(2);
sigma_t(it,i)=S(3);
tau(it,i)=S(4);

%Вычисление деформаций ползучести для полимерных слоев
if or (t(4,i)==1, t(4,i)==3)
    p0=(S(1)+S(2)+S(3))/3;%среднее напряжение
    %Функции напряжений:
    f_r=3/2*(S(1)-p0)-Eb*ez(1,i);
    f_t=3/2*(S(3)-p0)-Eb*ez(2,i);
    f_z=3/2*(S(2)-p0)-Eb*ez(3,i);
    f_rz=3/2*S(4)-Eb*ez(4,i);

    %Поиск максимальной функции напряжений:
    if abs(f_t)>abs(f_r) && abs(f_t)>abs(f_z)
        f_max=abs(f_t);
    elseif abs(f_r)>abs(f_t) && abs(f_r)>abs(f_z)
        f_max=abs(f_r);
    else
        f_max=abs(f_z);
    end
    nz=n0*exp(-f_max/mz);%Релаксационная вязкость

    %Определение деформаций ползучести на следующем шаге
    по времени
    if i~=nt+1
        ez(1,i)=ez(1,i)+f_r/nz*dt;
        ez(2,i)=ez(2,i)+f_z/nz*dt;
        ez(3,i)=ez(3,i)+f_t/nz*dt;
        ez(4,i)=ez(4,i)+f_rz/nz*dt;
    end

```

```

end

Pze=B'*D*ez(1:4,i)*2*pi*rm*A; %Локальный вектор
нагрузки от ползучести

%Вычисление глобального вектора нагрузки от ползучести:
for j=1:2
    for l=1:3
        Pz(2*ii(l)+j-2)=Pz(2*ii(l)+j-2)+Pze(2*l+j-2);
    end
end

end

%Вывод процента выполнения программы
clc;
proc=fix(it/(nT+1)*100)

end

%Вывод графиков радиальных напряжений в начале и в конце
процесса ползучести:
figure;
pdesurf(p,t, sigma_r(1,1:nt));
hold on
pdesurf(p,t, sigma_r(nT+1,1:nt));
colormap('jet')

%Вывод графиков окружных напряжений в начале и в конце про-
цесса ползучести:
figure;
pdesurf(p,t, sigma_t(1,1:nt));
hold on
pdesurf(p,t, sigma_t(nT+1,1:nt));
colormap('jet')

```

### **A.3 Оптимизация цилиндрической оболочки, находящейся в температурном поле, по теории прочности Мора**

```

T0=100; %Температура на внутренней поверхности
alpha=10^(-5); %коэффициент температурного расширения
E0=0.31*10^5; %Модуль упругости материала при x=a
a=0.15; %внутренний радиус оболочки
b=0.25; %внешний радиус оболочки
nu=0.3; %коэффициент Пуассона
k=0.5; %отношение допускаемых напряжений на растяжение и
сжатие
m=1-nu;
pa=10; %внутреннее давление, МПа
pb=0; %внешнее давление, МПа
C1=(k-1)*(pa-pb)/(b^(k-1)-a^(k-1));
C2=(pb*a^(k-1)-pa*b^(k-1))/(b^(k-1)-a^(k-1));
A=C1*(k+1);
B=C1*(m/(k-1)+1);
C=C2*m;
nr=100;
dr=(b-a)/nr;
E=zeros(1,nr+1);
R=zeros(1,nr+1);
E(1)=E0;
for i=1:nr
    r1=a+(i-1)*dr;
    E1=E(i);
    k1=(E1^2*alpha*(-T0/(log(b/a)*r1))+E1*A*r1^(k-
2))/(B*r1^(k-1)+C);
    r2=r1+dr/2;

```

```

E2=E1+dr/2*k1;
k2=(E2^2*alpha*(-T0/(log(b/a)*r2))+E2*A*r2^(k-
2))/(B*r2^(k-1)+C);
r3=r2;
E3=E1+dr/2*k2;
k3=(E3^2*alpha*(-T0/(log(b/a)*r3))+E3*A*r3^(k-
2))/(B*r3^(k-1)+C);
r4=r1+dr;
E4=E1+dr*k3;
k4=(E4^2*alpha*(-T0/(log(b/a)*r4))+E4*A*r4^(k-
2))/(B*r4^(k-1)+C);
E(i+1)=E(i)+dr/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
R(i)=r1;
end
R(nr+1)=b;
%figure;
%plot(R,E/E0);
%Решение прямой задачи
%E=ones(1,nr+1)*E0;
%Определяем температурное поле
T=zeros(1,nr+1);
for i=1:nr+1
    r=a+(i-1)*dr;
    T(i)=T0*log(b/r)/log(b/a);
end
figure;
plot (R, T);
matr=zeros(nr+1,nr+1);
svob=zeros(1,nr+1);
matr(1,1)=1;

```

```

svob(1)=-pa;
for i=2:nr
    r=a+(i-1)*dr;
    E_= (E(i+1)-E(i-1))/2/dr;
    T_= (T(i+1)-T(i-1))/2/dr;
    fi=3/r-E_/E(i);
    psi = -(1-nu)*E_/r/E(i);
    f=-E(i)*alpha*T_/r;
    matr(i,i-1)=(1/dr^2-fi/(2*dr));
    matr(i,i)=psi-2/dr^2;
    matr(i,i+1)=(1/dr^2+fi/(2*dr));
    svob(i)=f;
end
matr(nr+1,nr+1)=1;
svob(nr+1)=-pb;
sigma_r=matr\svob'; %решение СЛАУ
sigma_t=R.*dif(sigma_r,dr)+sigma_r';
sigma_eqv=sigma_t-k*sigma_r';
%figure;
plot(R,sigma_eqv);
hold on
%plot(R,sigma_r,'k--');
%plot(R,sigma_t,'b--');

```

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Свидетельство о государственной  
регистрации программы для ЭВМ**

**РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ**



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2016614064**

**Расчет многослойных полимерных труб с учетом ползучести  
материала**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего профессионального  
образования «Ростовский государственный строительный  
университет» (РГСУ) (RU)**

Авторы: **Языев Батыр Меретович (RU), Чепурненко Антон  
Сергеевич (RU), Дудник Анастасия Евгеньевна (RU), Савченко  
Андрей Андреевич (RU)**

Заявка № **2016611241**

Дата поступления **17 февраля 2016 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **13 апреля 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ильин

