Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

Литвинов Степан Викторович

Математическое моделирование гомогенных и гетерогенных полимерных систем с учётом реологии материала

02.00.06 — Высокомолекулярные соединения

Диссертация
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д. т. н., проф.
Б. М. Язьев

Ростов–на–Дону — 2019

Оглавление

Введение

В настоящее время всё чаще конструкции и их элементы изготавливают из полимерных материалов. При этом одним из основных моментов является не только вопрос синтеза новых полимеров, но и создания математических моделей подобных конструкций, максимально приближающихся к реальному поведению материала в жизни для определения их напряжённо-деформированного состояния с целью прогнозирования длительной прочности подобных изделий.

В отличие от подавляющего большинства «классических» материалов, используемых во многих отраслях: строительство, машиностроение, авиастроение и т. д. — полимерные материалы обладают особенностями, которыми никоим образом нельзя пренебрегать.

Во-первых, это сильная зависимость физико-механических параметров (упругих и реологических) полимера от многочисленных факторов, основным из которых является температура. Так, физико-механические параметры некоторых полимеров при изменении температуры в пределах нескольких десятков градусов меняют свои значения в несколько раз. Особенно это становится заметно, если температурные режимы находятся в относительной близости к температуре стеклования полимера. Таким образом, необходимо максимально точно определять физико-механические параметры полимера. Ситуация осложняется тем, что существующие и используемые до настоящего времени методики весьма сложны и громоздки.

Во-вторых, — выраженная реология полимеров. Это свойство может играть как положительную роль — процесс релаксации напряжений в полимерной конструкции за счёт высокоэластических деформаций, так и отрицательную — рост напряжений за счёт этих же деформаций, которые могут в разы превышать упругие деформации.

Для математического моделирования в программных комплексах работы конструкций из полимерных материалов необходимо использовать уравнения связи напряжения–деформации, максимально точно описывающие реологические процессы, протекающие в полимере. В подавляющем большинстве современных вычислительных программных комплексов используют уравнения связи слишком простого вида: линейные, степенные, логарифмические, соответствующие реальному поведению полимера лишь в очень узком диапазоне. Для полноценного описания этих процессов необходимо прибегать к нелинейным уравнениям.

Таким образом, исследование новых и оптимизация существующих методов расчёта конструкций из полимерных материалов на прочность, деформативность, долговечность, с учётом множества факторов, влияющих на упругие и реологические параметры полимеров (температура, наличие различных добавок, наличие приводящего к деструкции или сшиванию молекул полимера ионизирующего излучения и т. д.), *является актуальным.*

Необходимо отметить, что приведенные в диссертации методы математической оптимизации моделирования конструкций из полимеров в полной степени относятся именно к гомогенным материалам, а также гетерогенным, неоднородность которых вызвана физическими полями (к примеру, температурой); в меньшей — к гетерогенным в случае рассмотрения армированных полимеров в виду их структурной неоднородности.

Степень разработанности темы

Прежде чем говорить о проработанности темы исследования в целом, необходимо выделить основные этапы, которые необходимо пройти на пути от получения новых полимеров до проведения расчётов напряжённо-деформированного состояния конструкций и их элементов:

1. Химия. Вопрос получения новых полимерных материалов и определение основных их характеристик. Полимерные материалы исследуются на микроуровне с уделением особого внимания их молекулярной структуре.

2. Физическая химия. Получение основных уравнений связи напряжения–деформации, описывающих основные явления, наблюдаемые в целом в вопросах работы полимеров. Материалы рассматриваются на макроуровне. Проведение исследований на микроуровне используется для объяснения адекватности новых уравнений и используемых гипотез.

3. Механика. Вопросы получения основных разрешающих уравнений и получение их решений аналитическими, численно-аналитическими или численными методами. Использование основных уравнений физической химии для математического моделирования работы полимерных материалов. Написание программных комплексов.

4. Математическое моделирование и конструирование. Применение готовых программных комплексов для моделирования работы конструкций с интерпретацией полученных результатов в соответствие с действующими для данной отрасли нормативными документами.

При этом имеется пересечение в понятиях, определениях и методах, применяемых на каждом этапе, которые могут носить абсолютно разный смысл.

В диссертационной работе уделяется внимание вопросу согласования между собой первых трёх пунктов. Как правило, исследования проводят по каждому из этих пунктов обособленно, не затрагивая другие, «соседние», области.

На основании результатов литературного обзора установили, что вопросам исследования жёстких сетчатых полимеров посвящено довольно мало работ. Подобная ситуация обстоит и с работами по вопросам изучения и развития методов расчёта конструкций и их элементов из гомогенных и армированных полимеров в различных диапазонах температур и напряжений. Практически полностью отсутствуют, как среди отечественных, так и среди зарубежных, работ исследования механики армированных полимеров, учитывающие зависимость релаксационных свойств от температуры; приведение полных систем уравнений механики подобных армированных полимеров, а также алгоритм их использования для решения прочностных задач.

Имеющиеся труды ориентированы, как правило, на теоретические исследования с применением линеаризованных физических соотношений, которые не всегда позволяют полноценною описать работу полимера в заданных условия эксплуатации. Для решения подобных задач по описанию напряженно-деформированного состояния в полимерах, максимально соответствующего реальным материалам, необходимо использовать нелинейные физические соотношения. Эти соотношения были получены феноменологически, т. е. было произведено некоторое обобщение линейных соотношений, в трудах М. И. Розовского [79], А. А. Ильюшина с коллегами [33], А. К. Малмейстером [63] и др. Однако при более общем и строгом методе исследований необходимо использовать физическую теорию, в основе которой лежат изыскания в области молекулярной природы деформации рассматриваемых сред.

Если же говорить о вопросах практического использования полимеров, к примеру, в качестве материала для изготовления труб, то проблемы исследования их напряжённо-деформированного состояния изложили А. Л. Якобсен, В. С. Ромейко, А. Н. Шестопал, А. А. Персион, J. Hessel и др. Проблемы изучения и расчёта конструкций и их элементов из полимерных материалов связаны с особенностями поведения материала при деформировании и, как говорилось ранее, существенной функцией их физико-механических параметров от температуры. Так, термопласты могут претерпевать упругие деформации до значений 0.1–0.2 при температурах в диапазоне от 0 до $+95\,^{\circ}C$. Это явление рассматривали такие учёные, как Э. Л. Калиничев, Е. И. Каменев, Г. Д. Мясников, М. Б. Саковцев, М. П. Платонов и др. При этом исследований влияния нелинейных свойств полимерных материалов на напряжённо-деформированное состояние конструкций в осесимметричной постановке практически не проводили.

Исследование элементов конструкций из полимерных материалов (J. M. Hill, C. A. Martins, A. M. Milan, C. P. Pesce, R. Ramos, А. А. Аскадский, Г. М. Бартенев, Д. Ф. Коган, М. Н. Попов, А. Л. Рабинович, Р. А. Турусов и др.) показало, что деформативные и прочностные свойства термопластов (поливинилхлорид, полиэтилен, полипропилен и др.) могут меняться в разы в пределах нормативных эксплуатационных температур (от 0 до $+80\,^{\circ}C$).

С учётом того, что физико-механические параметры полимеров сильно зависят от температуры, необходимо весьма точно определять распределение температурного поля в конструкциях и их элементах. Однако в подавляющем большинстве существующих работ принимали упрощённый закон распределения температуры, к примеру, логарифмический, справедливый только в статичных задачах, не учитывающих изменение температурного поля во времени.

Цель работы — комплексная оптимизация определения напряжённо-деформированного состояния гомогенных и гетерогенных систем сетчатых и линейных полимеров. Анализ влияния физико-механических параметров полимеров, являющихся функцией многих факторов (температура, время, наличие добавок и ионизирующего излучения) на напряженно-деформированное состояние. Разработка методов определения физико-механических характеристик полимеров по их кривым релаксации, а также получение для них полной системы уравнений и их численная реализация.

Задачи работы:

1. Проведение анализа современного состояния и тенденций развития данной проблемы в Российской Федерации и за рубежом.

2. Разработка методики определения функциональной зависимости физико-механических параметров полимера в зависимости от температуры и ионизирующего излучения, а также от наличия добавок.

3. В связи с различием в представлении функционала температурного поля в многочисленных литературных источниках по вариационному исчислению и методу конечных элементов, необходимо провести уточнение данного выражения функционала.

4. Оптимизация математической концепции решения плоских осесимметричных задач: температурного шага, сетки КЭ, положения центра тяжести конечного элемента.

5. Апробация достоверности решения плоских осесимметричных задач для полимера путём решения их несколькими методами (МКР и МКЭ) с последующим анализом и сопоставлением результатов.

6. Разработка 4-узлового конечного элемента (численно-аналитического), описывающего работу конструкции из полимера с учётом термовязкоупругости и апробация достоверности решения с использованием полученного 4-узлового КЭ. Сравнение с другими вариантами узлового моделирования конечного элемента.

7. Расчёт адгезионного соединения с течением времени (длительная прочность) с использованием нелинеаризованной и линеаризованной теорий и сопоставлением решений с другими авторами и их моделями.

8. Исследование и анализ влияния на напряжённо-деформированное состояние элементов конструкций физико-химического состава полимера.

Научная новизна. В настоящей работе впервые:

1. Предложена методика определения физико-механических параметров полимера, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, на основе кривых релаксации материала как функции от нескольких факторов.

2. Получены матрица жёсткости и вектор сил для прямоугольного конечного элемента, учитывающие при помощи непосредственного интегрирования заданной функции формы как температурные составляющие, так и составляющие высокоэластических деформаций с соответствующим спектром времён релаксации.

3. Проведено исследование напряжённо-деформированного состояния полимерного тела с комплексным подходом по оптимизации математической модели (получение нового конечного элемента и вектора нагрузок, конечно-элементной сетки, переменного шага времени и т. д.).

4. Выполнен расчёт на длительную прочность при нормальном отрыве адгезионного соединения путём прямого моделирования двумерными конечными элементами вместо «классического» использования модели пограничного слоя.

5. Проведён анализ влияния модифицированных упругих и реологических свойств полимера (введение добавок и воздействие ионизирующего излучения) на напряжённое состояние соответствующего элемента конструкции в осесимметричной постановке.

6. Проведено численное моделирование напряжённого состояния модельного математического объекта по промежуточным значениям полученных физико-механических параметров, как функций нескольких переменных.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что

— Предложен комплексный подход по оптимизации математической модели определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел.

— Проведено исследование ползучести толстостенного цилиндрического полимерного тела с учётом влияния физических полей и наличия добавок на упругие и высокоэластические параметры материала и их спектров времён релаксации как функции нескольких переменных.

Практическое значение работы:

1. На основании проведённых исследований в программном комплексе MatLab представлен комплект модулей для определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел в осесимметричной постановке.

2. Получены матрица жёсткости и вектор нагрузок двумерного конечного элемента численно-аналитическим методом, включающие в себя температурные компоненты и компоненты, отвечающие за высокоэластические деформации.

3. Решена практически важная задача определения длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве. Представлено существенное различие между результатами, полученными ранее другими авторами, и результатами, представленными в настоящей диссертационной работе.

4. Показано, что изменение температуры адгезионного соединения не существенно влияет на прочность этого соединения, а значительно сказывается на времени, когда достигаются максимальные напряжения и заканчивается процесс их релаксации.

5. Представлена методика определения физико-механических параметров полимера по одним только кривым релаксации, что позволяет получить необходимые упругие и реологические данные максимально быстро.

6. На основании решения модельных задач показано, что значительные отличия в поведении релаксационных свойств материала незначительно сказываются на изменении напряжённо-деформированного состояния идентичных полимерных тел.

Методология и методы исследования. Исследования проведены при помощи аналитических, численных и численно-аналитических методов. Непосредственная задача определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел производилось при помощи метода конечных элементов с применением программного комплекса MatLab. Для оценки достоверности результатов также использовали метод конечных разностей.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методика комплексной оптимизации математических моделей полимерных тел (оптимизация шага времени, оптимизация соотношения размеров сторон конечного элемента и т. д.).

2. Модифицированная матрица жёсткости и вектор нагрузок прямоугольного конечного элемента с учётом температурных и реологичесих составляющих, полученные численно-аналитическим методом.

3. Результаты решения тестовых задач для различных полимеров, где оценивается эффективность проведённых оптимизационных процессов.

4. Результаты оценки длительной прочности адгезионного соединения на нормальный отрыв, полученные методом конечных элементов.

5. Методика оценки длительной прочности адгезионного соединения при различных температурных режимах.

6. Результаты оценки напряженного состояния цилиндрических объектов с учётом изменения физико-механических параметров полимера.

7. Результаты сопоставления напряжённо-деформированного состояния адгезива, полученные при помощи нелинейных и линеаризованных выражений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

— проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений;

— сравнением полученных результатов с известными решениями других авторов;

— применением нескольких методов к решению одной задачи с последующим сопоставлением результатов.

Апробация работы. Основные моменты работы отражены в печатных и электронных публикациях [28, 29, 30, 43, 48, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 60, 62, 61, 103, 104, 105, 107, 109, 110, 114, 111, 112], материалах конференций (материалы III, IV, V, VIII, XIII и XIV международных научно-практических конференций, КБГУ, Нальчик, Строительство-2007, 2009, 2011–2015, РГСУ, Ростов-на-Дону, Современные строительные материалы, технологии и конструкции: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 95-летия ФГБОУ ВПО ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщикова) [41, 49, 54, 56, 59, 106, 113], а также в изданиях, входящих в базы SCOPUS или Web of Science [121, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 149, 152].

Внедрение результатов работы. Имеются свидетельства о регистрации программ ЭВМ [66, 69, 70] (см. страницы 284–286).

Структура и объём работы. Работа состоит из введения, семи глав, основных выводов, библиографического списка и трёх приложений. Изложена на 286 страницах машинописного текста и содержит 63 рисунка и 14 таблиц.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 49 печатных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК РФ — 20, в журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of science — 12, в других периодических изданиях — 17, получены 3 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Глава 1. Состояние вопроса. Обзор основных соотношений и методов решения задач теории упругости и ползучести

1.1 Краткий исторический обзор развития вопросов исследования полимеров

У человека не хватит фантазии, чтобы представить современную жизнь без полимерных материалов. В технике, в частности машиностроительной, наряду с использованием полимеров в качестве электро-, тепло-, звуко- и радиоизоляционных материалов, а также в качестве покрытий, защищающих несущие детали от различных агрессивных воздействий, большое значение приобретает использование их как конструкционных материалов в элементах силовых конструкций. При этом довольно давно изучают вопрос применения неармированных гомогенных (однородных) и практически изотропных полимеров в слабонагруженных элементах конструкций и деталях, например, трубы из полиэтилена высокой плотности, применяемые для переноса жидкостной массы при малых давлениях; полиамидные лопасти маломощных вентиляторов [18, 71, 80] и т. д.

В сильнонагруженных деталях, особенно там, где необходима высокая удельная прочность, например в корпусах судов и ракет из стеклопластиков [9, 26, 40], в штампах из дельта-древесины [38, 90] используют армированные полимеры, чаще всего анизотропные.

При этом разнообразные вещества способны выступать в роли армирующих элементов: в стеклопластиках — стеклянные волокна, в дельта-древесине — древесный шпон и т.д. Причём в настоящее время именно стеклопластики [8, 15, 25, 40, 78], а конкретнее — армированные стеклопластики [31, 36, 76, 82, 91, 93] обладают максимальными показателями прочностных и жёсткостных характеристик. Если отойти от классификации армированных полимеров с точки зрения механики [68, 101], то в большей мере свойства армирующих элементов, их ориентировка и объединяемые элементы в единую систему особенностями полимерных связей — определяют физико-механические свойства композитов.

Необходимо отметить особую роль связующих, некоторые особенности механического влияния высокомолекулярных соединений которых известны достаточно хорошо, по крайней мере качественно [1, 2, 3, 10, 42, 45, 46, 47, 83, 89, 92]. Характерной особенностью полимерных связующих являются значительные обратимые деформации, которые по фазе с напряжённым состоянием не совпадают, кроме того у них, связующих, имеется значительно бо́льшая, чем у тех же металлов, зависимость упругих и реологических параметров от многих факторов: длительность воздействия нагрузок, скорость развития деформаций, температура и существенная роль релаксационных процессов.

Современные конструкции не могут быть спроектированы и изготовлены без применения инженерных расчётов, в том числе и в виде пакетов прикладных программ на основе метода конечных элементов. В этом случае возможно создать конструкции, для изготовления которых рационально применять и гомогенные, и гетерогенные полимеры, в том числе и армированные. Однако эти программные комплексы обязательно нужно создавать на основе механики полимеров или учитывать её в специальных модулях, отвечающих за расчёт полимерных изделий. Будучи частью механики сплошных сред, для развития механики полимеров необходимо наличие полной системы уравнений, связывающих напряжённое и деформированное состояние среды, а также функциональную связь между ними.

Следовательно, необходимо решить вопросы трёх групп задач, необходимых для развития механики армированных полимеров:

Первая — получение на основе экспериментальных и теоретических изысканий данных о закономерностях деформаций жёстких полимеров, применяемых в качестве связующих. Также для них необходимо получить полную систему уравнений, установить возможности согласования с ними таких разделов наук, как теория упругости, пластичности и ползучести, сопротивление материалов и т. д. с последующей разработкой методов их решения.

Вторая — исследование совместной работы механической системы, состоящей из армирующих элементов и связующих полимеров. Необходимо определить критерии возможности рассмотрения этой гетерогенной системы как сплошной анизотропной или изотропной среды. Разработать методики прогнозирования свойств и характеристик армированных полимеров по известным свойствам слагаемых их компонентов.

Третья — комплексное исследование деформаций армированных полимеров с последующим определением полной системы уравнений и создание теорий прочности, которые дают возможность найти условия разрушения конструкций и их элементов, находящихся в сложном напряжённом состоянии, по данным простейших испытаний.

С точки зрения «целевой аудитории» задачи первой и третьей групп ориентированы на конструкторов и специалистов по расчёту конструкций; второй — на технологов, занимающихся созданием и изготовлением материалов с чётко заданными свойствами благодаря максимальному использованию потенциала и качеств отдельных компонентов.

Таким образом, всесторонний подход к решению полного объёма перечисленных задач требует длительного периода времени и значительные усилия многочисленных исследователей как теоретиков, так и экспериментаторов.

В периодической печати можно выделить работы по исследованию механических свойств полимеров, в том числе и армированных. Исследования свойств гомогенных изотропных полимеров изложены в монографиях Т. Алфрея [4], Л. Трелоара [94], А. Тобольского [92]. При этом подробное изучение совокупности свойств линейных полимеров проводил Ю. С. Лазуркин [45]. Однако в настоящее время существует относительно малое количество работ по исследованию жёстких сетчатых полимеров, и ещё меньше — по созданию общих методов расчёта гомогенных, а тем более армированных полимеров и конструктивных элементов из этих материалов при значительных изменениях уровня напряжений и температуры. Не удалось найти ни одной работы для решения поставленных задач при помощи полной системы уравнений механики армированных полимеров с учётом реальных релаксационных температурно-временных свойств этих материалов.

Существующие теоретические работы в основном созданы на базе линеаризованных физических соотношений, которые зачастую даже близко не описывают механическое поведение полимеров в реальных условиях. Стремление к максимально полному их описанию приводит к безальтернативному использованию нелинейных физических соотношений.

Ряд авторов (Ю. Н. Работнов [77], А. А. Ильюшин с сотрудниками [32], А. К. Малмейстер с сотрудниками [63]) получили подобные соотношения чисто феноменологически, путем формального обобщения линейных соотношений. Однако имеется и более строгий метод в использовании физической теории, основанный на исследовании молекулярной природы деформации рассматриваемых сред: А. Л. Рабинович [24, 72], А. А. Аскадский [10], Г. И. Гуревич [20, 21, 22, 23, 24]. Данный подход и используется в дальнейшем в диссертационной работе.

1.2 Основные уравнения механики деформируемого твёрдого тела, теории упругости, пластичности и ползучести

Дифференциальные уравнения равновесия *(уравнения Навье)* в цилиндрической системе координат записываются так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ \dfrac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta = 0; \\ \dfrac{\partial\tau_{zr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{zr}}{r} + Z = 0, \end{cases}$$

где R, Θ, Z — объёмные силы.

Формулы Коши в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}; & \gamma_{r\theta} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\theta}; \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\theta} + \dfrac{u}{r}; & \gamma_{\theta z} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{rz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана в цилиндрической системе координат имеют вид [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}\right) - \dfrac{\partial\varepsilon_r}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial^2(r\gamma_{r_\theta})}{\partial r\,\partial\theta} = 0; \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial r^2} - 2\dfrac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial r\,\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varepsilon_z}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\gamma_{\theta z}}{\partial\theta} + \gamma_{rz}\right) = 0; \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta\,\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\gamma_{\theta z}}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2(r^2\gamma_{r\theta})}{\partial r\,\partial z} - \dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\dfrac{\gamma_{rz}}{r}\right) = 0; \\ r\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_r - \dfrac{\partial(r\varepsilon_\theta)}{\partial r}\right) - \dfrac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2(r\gamma_{\theta z})}{\partial r\,\partial\theta} + \dfrac{\partial^2(r\gamma_{r\theta})}{\partial\theta\,\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\left(\dfrac{\varepsilon_z}{r}\right) + \dfrac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r\dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\dfrac{\gamma_{\theta z}}{r}\right) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial\theta\,\partial z} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

В работе [6] отмечается, что в случае плоских осесимметричных задач в полярных координатах удобнее пользоваться выражением, полученным из первой формулы системы уравнений (1.2):

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0, \tag{1.3}$$

которое имеет более низкий порядок, чем уравнение, получающееся напрямую из системы (1.2).

Закон Гука в цилиндрических координатах записывается так:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_{el,\,r} + \varepsilon_{pl,\,r} + \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{\text{вын}}; \qquad \gamma_{r\theta} = \gamma_{el,\,r\theta} + \gamma_{pl,\,r\theta} + \gamma_{cr,\,r\theta}; \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_{el,\,\theta} + \varepsilon_{pl,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{\text{вын}}; \qquad \gamma_{\theta z} = \gamma_{el,\,\theta z} + \gamma_{pl,\,\theta z} + \gamma_{cr,\,\theta z}; \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{el,\,z} + \varepsilon_{pl,\,z} + \varepsilon_{cr,\,z} + \varepsilon_{\text{вын}}; \qquad \gamma_{rz} = \gamma_{el,\,rz} + \gamma_{pl,\,rz} + \gamma_{cr,\,rz}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где ε_r, ε_θ, ε_z — полная относительная деформация; $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, γ_{rz} — полная угловая деформация; $\varepsilon_{el,\,\xi}$, $\gamma_{el,\,\zeta\xi}$ (ζ, $\xi = r$, θ, z) — от англ. *elastic* — упругая линейная и угловая деформации; $\varepsilon_{pl,\,\xi}$, $\gamma_{pl,\,\zeta\xi}$ ($\xi = r$, θ, z) — от англ. *plastic* — пластическая линейная и угловая деформации; $\varepsilon_{cr,\,\xi}$, $\gamma_{el,\,\zeta\xi}$ ($\xi = r$, θ, z) — от англ. *creep* — деформации ползучести материала, линейная и угловая, представляющие собой, соответственно, высокоэластическую деформацию полимеров; $\varepsilon_{\text{вын}}$ — вынужденные деформации (температурное расширение, радиация, влагоупругость и т. д.);

$$\begin{cases} \varepsilon_{el,\,r} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right]; & \gamma_{el,\,r\theta} = \dfrac{\tau_{r\theta}}{G}; \\ \varepsilon_{el,\,\theta} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right]; & \gamma_{el,\,\theta z} = \dfrac{\tau_{\theta z}}{G}; \\ \varepsilon_{el,\,z} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right]; & \gamma_{el,\,rz} = \dfrac{\tau_{rz}}{G}. \end{cases}$$

При использовании численных методов часто удобно использовать *закон Гука в обратной форме*:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_{pl,\,r} - \varepsilon_{cr,\,r}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \sigma_\theta = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_{pl,\,\theta} - \varepsilon_{cr,\,\theta}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \sigma_z = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{pl,\,z} - \varepsilon_{cr,\,z}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \tau_{r\theta} = \left(\gamma_{r\theta} - \gamma_{pl,\,r\theta} - \gamma_{cr,\,r\theta}\right) G; \\ \tau_{\theta z} = \left(\gamma_{\theta z} - \gamma_{pl,\,\theta z} - \gamma_{cr,\,\theta z}\right) G; \\ \tau_{zr} = \left(\gamma_{zr} - \gamma_{pl,\,zr} - \gamma_{cr,\,zr}\right) G, \end{cases} \tag{1.5}$$

где

$$\theta_{pl} = \varepsilon_{pl,\,r} + \varepsilon_{pl,\,\theta} + \varepsilon_{pl,\,z}$$

— объёмная пластическая деформация;

$$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,z}$$

— объёмная деформация ползучести;

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

— параметры Ламе.

Полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела П и работой внешних сил A:

$$\text{Э} = \Pi - A. \tag{1.6}$$

Потенциальная энергия упругой деформации тела описывается выражением:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,\,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,\,z} + \tau_{r\theta}\gamma_{el,\,r\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{el,\,\theta z} + \tau_{zr}\gamma_{el,\,zr}\right) dV, \quad (1.7)$$

или в матричной форме:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \left\{\sigma\right\}^T \cdot \left\{\varepsilon_{el}\right\} dV, \quad (1.8)$$

где $\left\{\sigma\right\}^T = \left\{\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{zr}\right\}$;
$\left\{\varepsilon_{el}\right\} = \left\{\varepsilon_{el,\,r} \quad \varepsilon_{el,\,\theta} \quad \varepsilon_{el,\,z} \quad \gamma_{el,\,r\theta} \quad \gamma_{el,\,\theta z} \quad \gamma_{el,\,zr}\right\}^T$.

Работа внешних сил описывается выражением:

$$A = \int\limits_V \left(Ru + \Theta v + Zw\right) dV + \int\limits_\Omega \left(\bar{R}u + \bar{\Theta}v + \bar{Z}w\right) d\Omega, \quad (1.9)$$

где R, Θ, Z и $\bar{R}$, $\bar{\Theta}$, $\bar{Z}$ — представляют собой проекции на оси координат, соответственно, объёмных (массовых) сил и поверхностных нагрузок.

В общем виде уравнение теплопроводности записывается:

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) = q_T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.10)$$

при граничных условиях

$$T = T_\Gamma \quad \text{на} \quad \Gamma_1;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + Q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha\left(T - T_0\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3,$$

и начальном условии: $T = T_*$ при $t = t_0$.

Выражение (1.10) для практических расчётов часто записывают в виде:

$$-\operatorname{div}\left(\varkappa \operatorname{grad} T\right) + \beta T = f(r,\, \theta,\, z,\, t), \quad (1.11)$$

Здесь в выражениях (1.10) и (1.11): T — температура; $\varkappa = \dfrac{\lambda_T}{c_p \rho}$ — коэффициент температуропроводности материала; λ_T — коэффициент теплопроводности; c_p — изобарная теплоёмкость; ρ — плотность материала; q_T — удельная мощность источников теплоты, которая считается положительной, если теплота подводится к структуре; Q — поток теплоты на части границы Γ, который считается положительным, если теплота теряется структурой; α — коэффициент теплообмена с окружающей средой температурой T_0; T_Γ — температура на части границы Γ; T_* — начальное распределение температуры; $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$ — полная граница многослойной области V; n — внешняя нормаль к границе Γ.

1.3 Переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке

Наиболее часто при расчёте физических полей приходится иметь дело с эллиптическими краевыми задачами следующего вида: необходимо определить функцию $u(\bar{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} u) + \beta u = f \tag{1.12}$$

с краевыми условиями

$$u(\bar{x})|_{\Gamma 1} = g(\bar{x}); \tag{1.13}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma 2} - \Theta = 0; \tag{1.14}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma 3} + \gamma \left(u|_{\Gamma 3} - p \right) = 0, \tag{1.15}$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

В трудах [13, 16, 19, 37, 44, 65, 81, 84] приводится теорема, согласно которой решение задач (1.12)—(1.15) эквивалентно задаче минимизации выпуклого функционала: $u = \arg\min_v \operatorname{Im} v$, где

$$\mathrm{Im}\,(v) = \int\limits_{\Omega} \left[\alpha\,(\mathrm{grad}\,v)^2 + \beta v^2\right]\,d\Omega + \int\limits_{\text{Г}3} \gamma v^2\,d\Gamma -$$

$$- 2\int\limits_{\text{Г}3} \gamma p v\,d\Gamma - 2\int\limits_{\text{Г}2} \Theta v\,d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega} f v\,d\Omega. \quad (1.16)$$

1.4 Основные уравнения метода конечных элементов и метода конечных разностей

1.4.1 Одномерный симплекс-элемент метода конечных элементов

Рассматривается прямолинейный элемент (рисунок 1.1), с узлами i и j, координаты которых X_i и X_j. Длина элемента равна $L = X_j - X_i$. Узловые значения функции φ соответственно Φ_i и Φ_j. Изучается глобальная система координат, не связанная с элементом. Для аппроксимации функции ϕ используется полиномальная функция [88]

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (1.17)$$

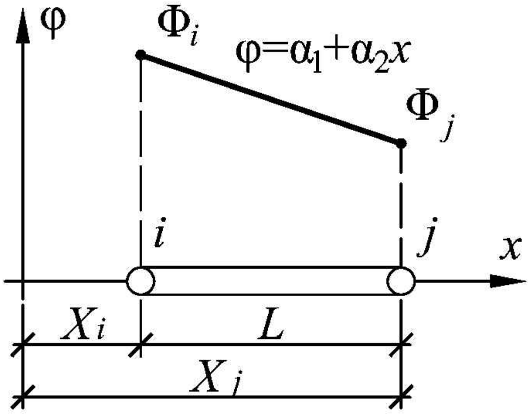


Рисунок 1.1 — Одномерный симплекс-элемент

Для определения коэффициентов α_1 и α_2 используются условия на концах элемента:

$$\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i$$

и

$$\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_j.$$

Результат решения системы двух уравнений

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i;$$
$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j$$

даёт значения коэффициентов:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \tag{1.18}$$

где $N_i = \dfrac{X_j - x}{X_j - X_i}$ и $N_j = \dfrac{x - X_i}{X_j - X_i}$ — интерполяционные функции (функции формы).

В практической работе соотношение (1.18) применяется в матричной форме:

$$\varphi = \left[N\right] \left\{\Phi\right\}, \tag{1.19}$$

где $\left[N\right] = \left[N_i \quad N_j\right]$ — матричная строка; $\left\{\Phi\right\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$ — вектор-столбец.

1.4.2 Двумерный симплекс-элемент метода конечных элементов

Используемый для всех дальнейших выкладок двумерный симплекс–элемент [88] представлен на рисунке 1.2. Элемент представляет собой треугольник без дополнительных внутренних узлов на прямолинейных сторонах. В дальнейшем нумерация узлов принята против часовой стрелки от произвольно выбираемого i-го узла.

Исследуемая функция φ принимает значения в узлах Φ_i, Φ_j и Φ_k, координаты которых — (X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k).

Интерполяционный полином принимается в виде:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{1.20}$$

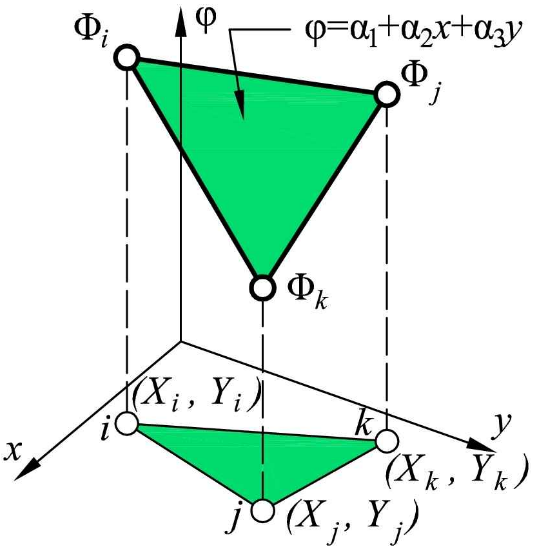


Рисунок 1.2 — Двумерный симплекс-элемент

Условия в узлах:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \Phi_i \quad &&\text{при} \quad x = X_i, \quad y = Y_i;\\
\varphi &= \Phi_j \quad &&\text{при} \quad x = X_j, \quad y = Y_j;\\
\varphi &= \Phi_k \quad &&\text{при} \quad x = X_k, \quad y = Y_k.
\end{aligned}$$

С учётом приведённых условий в узлах выражение (1.20) можно представить в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}
\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i;\\
\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j;\\
\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k,
\end{cases} \tag{1.21}$$

в результате решения которой коэффициенты записываются как:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2A}\left[(X_jY_k - X_kY_j)\,\Phi_i + (X_kY_i - X_iY_k)\,\Phi_j + (X_iY_j - X_jY_i)\,\Phi_k\right];\\
\alpha_2 &= \frac{1}{2A}\left[(Y_j - Y_k)\,\Phi_i + (Y_k - Y_i)\,\Phi_j + (Y_i - Y_j)\,\Phi_k\right];\\
\alpha_3 &= \frac{1}{2A}\left[(X_k - X_j)\,\Phi_i + (X_i - X_k)\,\Phi_j + (X_j - X_i)\,\Phi_k\right].
\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что определитель системы уравнений (1.21) фактически представляет собой удвоенную площадь треугольника:

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = X_jY_k - X_kY_j + X_kY_i - X_iY_k + X_iY_j - X_jY_i = 2A.$$

Подставим полученные коэффициенты α_1, α_2 и α_3 в выражение (1.20), после чего произведём группировку коэффициентов перед узловыми значениями Φ_i, Φ_j и Φ_k:

$$\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k, \tag{1.22}$$

где

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_ix + c_iy\right] \quad \text{при} \quad \begin{cases} a_i = X_jY_k - X_kY_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A}\left[a_j + b_jx + c_jy\right] \quad \text{при} \quad \begin{cases} a_j = X_kY_i - X_iY_k, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k; \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left[a_k + b_kx + c_ky\right] \quad \text{при} \quad \begin{cases} a_k = X_iY_j - X_jY_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$$

Недостатком выбранного аппроксимирующего полинома (1.20) можно назвать то, что внутри треугольного элемента скалярная величина φ определяется линейными по x и y функциями формы. Следовательно, градиент φ в направлении осей x и y является величиной постоянной. Так, в направлении x градиент может быть представлен:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x}\Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x}\Phi_k,$$

но

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = b_\beta, \qquad \beta = i, j, k.$$

Таким образом

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k.$$

Аналогично

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k.$$

Так как коэффициенты b_i, b_j, b_k, c_i, c_j и c_k фиксированы для заданных узловых координат, и значения функции в узлах Φ_i, Φ_j, Φ_k не зависят от координат пространства, то частные производные являются величинами постоянными. Таким образом, для аппроксимации быстро изменяющейся функции φ необходимо уменьшать размер конечного элемента.

1.4.3 Аппроксимация функции методом конечных разностей

Решение задач механики напрямую связано с использованием производной функции $y = f(x)$, которой называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Для численного дифференцирования [14, 98] функции $y = f(x)$ вводят на интервале $[a, b]$ равномерную сетку (рисунок 1.3). Неравномерная сетка не рассматривается, т. к. в диссертационной работе она не используется.

$$\omega_x = \left\{ x_i = a + (i-1)\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

Тогда для приближённое значение производной может быть получено из равенства

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для дальнейших расчётов будут использованы следующие способы определения производной в одной и той же точке:

$$\bigcirc \otimes \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}; \quad \Delta x = h; \quad y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h) \qquad (1.23)$$

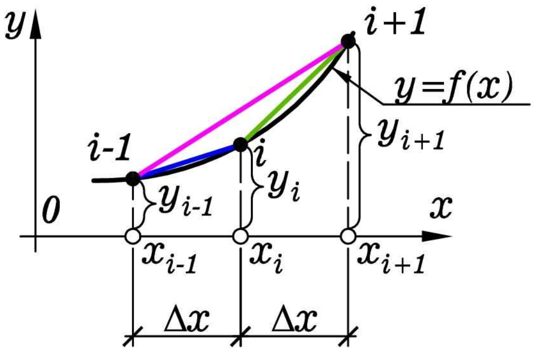


Рисунок 1.3 — Схема аппроксимации функции с помощью метода конечных разностей

с помощью *левых разностей* (см. рисунок 1.3, синяя прямая);

$$\otimes\bigcirc \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta x = h; \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) \qquad (1.24)$$

с помощью *правых разностей* (см. рисунок 1.3, зелёная прямая);

$$\bigcirc\times\bigcirc \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}; \quad \Delta x = h; \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad (1.25)$$

с помощью *центральных разностей* (рисунок 1.3, фиолетовая прямая).

Производные старших порядков можно определить комбинацией производных первого порядка (1.23) и (1.24), например

$$\begin{aligned}\bigcirc\otimes\bigcirc \qquad y_i'' = (y_i')' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} &= \\ = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2). &\quad (1.26)\end{aligned}$$

При практической аппроксимации функции $y = f(x)$ часто аппроксимация крайних точек i_1 и i_{N+1} по формулам (1.23) и (1.24) довольно неточна, в [98] приводятся выражения, позволяющие повысить точность аппроксимации:

— аппроксимация производных первого порядка в случае пяти узлов (реализация для решения задач в виде модуля к программным комплексам

MatLab и Octave приводится в приложении В.1):

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \frac{-25y_1 + 48y_2 - 36y_3 + 16y_4 - 3y_4}{12h} + \frac{h^4}{5}y_*^V;\\
y_2' &= \frac{-3y_1 - 10y_2 + 18y_3 - 6y_4 + y_5}{12h} - \frac{h^4}{20}y_*^V;\\
y_3' &= \frac{y_1 - 8y_2 + 8y_4 - y_5}{12h} + \frac{h^4}{30}y_*^V;\\
y_4' &= \frac{-y_1 + 6y_2 - 18y_3 + 10y_4 + 3y_5}{12h} - \frac{h^4}{20}y_*^V;\\
y_5' &= \frac{3y_1 - 16y_2 + 36y_3 - 48y_4 + 25y_5}{12h} + \frac{h^4}{5}y_*^V,
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

где y_*^V — значение производной пятого порядка в некоторой внутренней точке. Поскольку значение шага h мало, то слагаемыми, содержащими h^4, допускается пренебрегать в практических расчётах.

— аппроксимация производных второго порядка в случае пяти узлов (реализация для решения задач в виде модуля к программным комплексам MatLab и Octave приводится в приложении В.2):

$$
\begin{aligned}
y_1'' &= \frac{35y_1 - 104y_2 + 114y_3 - 56y_4 + 11y_4}{12h^2} + O(h^3);\\
y_2'' &= \frac{11y_1 - 20y_2 + 6y_3 + 4y_4 - y_5}{12h^2} + O(h^3);\\
y_3'' &= \frac{-y_1 + 16y_2 - 30y_3 + 16y_4 - y_5}{12h^2} + O(h^4);\\
y_4'' &= \frac{-y_1 + 4y_2 + 6y_3 - 20y_4 + 11y_5}{12h^2} + O(h^3);\\
y_5'' &= \frac{11y_1 - 56y_2 + 114y_3 - 104y_4 + 35y_5}{12h^2} + O(h^3).
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Выражения (1.27) и (1.28) позволяют получить аппроксимацию функции $y = f(x)$ любого n-го порядка точности. Данные выражения допускается использовать не только в узлах $x = x_1, x_2, \ldots$, но и в любых узлах $x = x_i, x_{i+1}, \ldots$, проводя соответствующую замену индексов.

1.5 Выводы по главе

1. Проведён краткий исторический обзор по вопросам исследования полимеров.

2. Приведены основные уравнения механики, необходимые для решения задач упругости, включающие в себя компоненты высокоэластической деформации полимера.

3. Рассматривается переход от эллиптических уравнений к вариационным. Данный переход необходим для решения задач в энергетической постановке (метод конечных элементов).

4. На основании литературного обзора сформулированы приведённые во введении цели и задачи исследования.

Глава 2. Методика определения реологических параметров на основе обработки опытных результатов

Ещё в 50–60-х годах XX века было показано [11, 72, 73, 74], что составляющие суммарной деформации, являющиеся по величине много меньше единицы, значительно преобладают над величинами остаточных деформаций полимера, что связывают с их сетчатой структурой.

Следовательно, в дальнейших выкладках вполне законно полностью пренебрегать пластическими деформациями, а ограничиться только учётом малой упругой и высокоэластической составляющими.

С другой стороны, предшествующая деформация материала может приводить к последующему процессу разрушения, таким образом возможно предположить примерную оценку момента разрушения при помощи анализа процесса деформации и следующей экстраполяцией данных вплоть до разрушения. При этом под самим моментом разрушения можно понимать очень много факторов: превышение предельных напряжений, предельных деформаций и т. д. Соглано опытным данным, полученным при одноосном растяжении (сжатии) и сдвиге в работах [11, 72, 73, 74], таким критерием является достижение некоторой предельной деформации, в результате формулировать некоторую приближенную теорию прочности, которая, правда, лежит вне настоящей работы.

Вследствие малости составляющих отдельных компонент деформаций, а также малости самой суммарной деформации, становится возможным использование только общей кинематической теории [72], при этом остается физическая нелинейность, обусловленная соответствующими уравнениями связи. Таким образом, в дальнейших выкладках в диссертации рассматривают лишь малые упругие и высокоэластические деформации и при этом жесткие сетчатые полимерные связующие исследуют как упругорелаксирующую среду в области малых деформаций.

Система уравнений можно представить в нескольких вариантах: векторной (см. параграф 1.2 на с. 18), тензорной и координатной. Для дальнейших выкладок удобно использовать уравнения в тензорной форме записи.

2.1 Вязкоупругость

Прежде чем говорить об основном уравнении связи напряжений и деформации, используемом в диссертации, — нелинейном обобщённом уравнении Максвелла-Гуревича — необходимо рассмотреть «классические модели» вязкоупругого поведения материала.

Существуют два идеальных случая деформаций:

1. Упругая деформация твёрдых тел — описывается законом Гука.
2. Течение жидкости — описывается законом Ньютона

В реальных телах можно выделить 2 основных вида отклонений от случаев идеального протекания деформаций:

1. Неподчинение законам Гука и Ньютона — имеет место нелинейная пропорциональность между напряжением и деформацией в твёрдом теле или скоростью деформации в жидкости.
2. Зависимость напряжений одновременно как от самой деформации, так и от её скорости, а также от более высоких производных деформации по времени. Данное свойство наблюдается в системах, проявляющих как свойства твёрдого тела, так и жидкости. Подобные тела называются *вязкоупругими.*

Наиболее часто в ходе экспериментальных данных устанавливают зависимость отношения напряжений к деформациям как функции исключительно от времени ($\sigma/\varepsilon = f(t)$), но не функции самих напряжений или деформаций — исследуются соотношения теории линейной вязкоупругости.

Максвелл моделировал поведение вязкоупругого тела последовательным соединением пружины и поршня, работающего в вязкой среде (рисунок 2.1, а). Здесь пружина описывает упругую деформацию, а поршень — необратимые деформации течения. Кельвин вместо последовательного соединения поршня и пружины предпочёл параллельное (рисунок 2.1, б). В дальнейшем идею Кельфина развивал Фойгт.

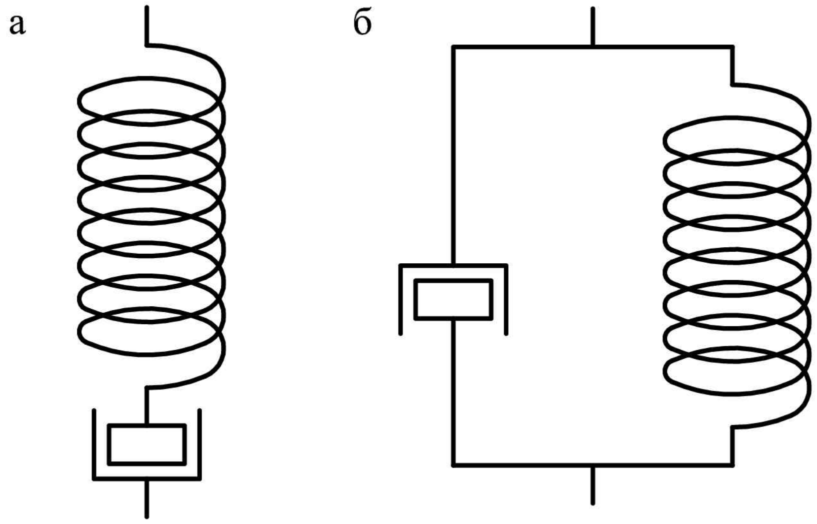


Рисунок 2.1 — Модели вязкоупругости Максвелла (а) и Кельвина (б)

Согласно модели Максвелла скорость изменения напряжений во времени описывается выражением:

для деформации сдвига

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{с}}}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_{\text{с}}}{\tau}; \tag{2.1}$$

для деформации растяжения

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{н}}}{\mathrm{d}t} = E\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{н}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_{\text{н}}}{\tau}, \tag{2.2}$$

где $\sigma_{\text{с}}$ и $\sigma_{\text{н}}$ — напряжение сдвига и нормальное напряжение; t — время деформации; γ и $\varepsilon_{\text{н}}$ — относительная деформация сдвига и растяжения; G — модуль сдвига; E — модуль упругости; τ — время, необходимое для того, чтобы напряжение в теле уменьшилось в e раз.

При рассмотрении случая постоянной деформации ($\varepsilon = \text{const}$; $d\varepsilon/dt = 0$), выражения (2.1) и (2.2) в случае вязкоупругого тела имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{с}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_{\text{с}}}{t}; \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{н}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_{\text{н}}}{t}. \tag{2.3}$$

В общем виде выражения (2.3) записываются

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}. \tag{2.4}$$

Интегрирование выражения (2.4) даёт

$$\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{t}{\tau}$$

или

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \tag{2.5}$$

где σ_0 — начальное напряжение при $t = 0$, определяющее неравновесное состояние тела; σ — напряжение через некоторый промежуток времени t.

Следствием из уравнения (2.5) является снижение уровня напряжения в теле с течением времени, т. е. $\sigma < \sigma_0$. При времени стремящемся к бесконечности $t \to \infty$ напряжение теоретически стремится к нулю. Однако значительная часть напряжения уменьшается за некоторый промежуток времени, и, как следствие из выражения (2.5), если изменение напряжения в e раз происходит за некоторый интервал времени t, т. е. $\sigma = \sigma_0/e$, то

$$\tau = t. \tag{2.6}$$

Таким образом выражение (2.6) подтверждает смысл переменной τ из выражения (2.2).

В случае неизменного во времени напряжения ($\sigma = \mathrm{const}$; $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$) выражения (2.1) и (2.2) записываются

$$G\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_{\text{с}}}{\tau} = 0; \qquad E\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{н}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_{\text{н}}}{\tau} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{с}} = G\tau\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}; \tag{2.7}$$

$$\sigma_{\text{н}} = E\tau\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{н}}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

Сравнение уравнений (2.7) и (2.8) с законом Ньютона

$$\sigma_{\text{с}} = \eta_{\text{сд}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

видно, что произведение величин $G\tau$ и $E\tau$ равно коэффициенту вязкости:

$$\eta_{\text{р}} = E\tau; \tag{2.9}$$

$$\eta_{\text{сд}} = G\tau. \tag{2.10}$$

где $\eta_{\text{р}}$ и $\eta_{\text{сд}}$ — коэффициенты вязкости при деформации растяжения и сдвига.

Анализ уравнений (2.9) и (2.10) показывает, что коэффициенты вязкости при различных видах деформаций (растяжение-сжатие, сдвиг) не равны друг другу. В случае абсолютно упругих тел ($\nu = 0.5$), получаем $E = 3G$ и, соответственно, $\eta_{\text{р}} = 3\eta_{\text{сд}}$, т. е. измеренный при растяжении коэффициент вязкости оказывается в три раза больше коэффициента вязкости, измеренного при сдвиге.

При рассмотрении модели Кельвина происходит суммирование напряжений в упругой ветви $\sigma_{\text{упр}}$ с вязкоупругой $\sigma_{\text{вязк}}$. Общее напряжение σ определяется

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{2.11}$$

где ε — относительная деформация; $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ — скорость изменения относительной деформации.

Уравнение (2.11) является неоднородным дифференциальным, решение которого определяется следующими шагами:

1. Поиск общего решения аналогичного однородного уравнения

   $$\eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} + E\varepsilon = 0,$$

   которое равно

   $$\varepsilon = Ce^{-(E/\eta)t},$$

   где C — постоянная интегрирования, равная $-\sigma/E$.

2. Поиск частного решения неоднородного уравнения. В данном случае

   $$\varepsilon_{\text{част}} = \frac{\sigma}{E}.$$

Общее решение равно их сумме:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + Ce^{-(E/\eta)t}.$$

Следовательно

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \qquad (2.12)$$

Выражение (2.12) показывает, что относительная деформация ε стремится к некоторой постоянной величине σ/E при времени, стремящемся к бесконечности. В ином случае деформация составляет лишь часть от общей деформации, происходит запаздывание изменения деформации. Поэтому величину времени $\tau_з = \eta/E$ называют временем запаздывания.

Различными авторами предложены иные модели ползучести, так же базирующиеся на разделении деформаций на упругую и пластическую составляющие

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr}.$$

В общем случае деформация ползучести предполагают в виде произведения

$$\varepsilon_{cr} = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(T).$$

Значительную известность имеют следующие функциональные зависимости от напряжений

$$\begin{aligned}
&f_1(\sigma) = B\sigma^n && \text{— закон Нортона,}\\
&f_1(\sigma) = C\,\mathrm{sh}(\alpha\sigma) && \text{— закон Прандтля,}\\
&f_1(\sigma) = De^{\beta\sigma} && \text{— закон Дорна,}\\
&f_1(\sigma) = A\left[\mathrm{sh}(\gamma\sigma)\right]^n && \text{— закон Гарофало,}\\
&f_1(\sigma) = B(\sigma - \delta)^n && \text{— закон трения,}
\end{aligned}$$

где все символы, отличные от σ соответствуют определённым материальным константам.

Из приведённых зависимостей соотношение Гарофало включает как частные случаи законы Нортона, Прандтля и Дорна и учитывает нелинейность зависимости скорости деформаций ползучести от напряжений. Степенной закон

Нортона также получен из физических соображений и широко распространён в практике.

Временны́е зависимости часто используются в следующем виде

$$
\begin{aligned}
&f_2(t) = t && \text{— для второй стадии ползучести,}\\
&f_2(t) = Bt^m && \text{— закон Бейли,}\\
&f_2(t) = \left(1 + bt^{1/3}\right)e^{kt} && \text{— закон Андраде,}\\
&f_2(t) = \textstyle\sum_i a_i t^{m_i} && \text{— закон Греэхема и Уоллеса.}
\end{aligned}
$$

Согласно закону Аррениуса зависимость функции от температуры записывается

$$f_3(T) = Ae^{-\Delta H/kT}.$$

Здесь ΔH — энергия активации; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

В практике часто применяется зависимость $\varepsilon_{cr}(\sigma, t, T)$, в которой заключены простейшие из приведённых выше выражений

$$\varepsilon_{cr} = Ce^{-\Delta H/kT} t^m \sigma^n,$$

откуда при постоянной температуре получаем

$$\varepsilon_{cr} = Bt^m \sigma^n. \tag{2.13}$$

Данные выражения могут быть использованы исключительно в случае постоянных напряжений и только представляют попытку математической формализации первой и второй стадий ползучести. Для рассмотрения переменных напряжений, необходимо выразить уравнения скоростного типа. Так, из соотношения (2.13) при $\sigma = \mathrm{const}$ получаем выражение

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr}}{\mathrm{d}t} = mBt^{m-1}\sigma^n, \tag{2.14}$$

которое с учётом соотношений (2.13) и (2.14) можно преобразовать в виду, не содержащему время t

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr}}{\mathrm{d}t} = \frac{mB^{1/m}\sigma^{n/m}}{\varepsilon_{cr}^{(1-m)/m}}.$$

Выбор зависимости скоростного типа является попыткой математического моделировнаия первой стадии ползучести, когда скорость ползучести убывает.

В современных программных комплексах, таких как ANSYS [85, 150], Solid Works [145, 146] и др., ползучесть моделируется при помощи зависимости скорости изменения деформации от напряжений, относительной деформации, времени и температуры

$$\varepsilon_{creep} = f_1(\sigma)f_2(\varepsilon)f_3(t)f_4(T).$$

Данная форма описания ползучести даёт неплохие результаты при моделировании необратимых деформаций. Невозможность учёта обратимых деформаций является серьёзным недостатком данных комплексов. Учёт обратимых деформаций возможен при использовании нелинейного уравнения связи Максвелла-Гуревича, о котором будет сказано в дальнейшем.

Отсутствие уравнения Максвелла-Гуревича в существующих конечноэлементных комплексах вынуждает исследователей самостоятельно писать программные модули для определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел.

2.2 Основные уравнения в тензорной форме. Уравнение Максвелла-Гуревича

Несмотря на то, что настоящая работа посвящена осесимметричной задаче, то есть задаче, решаемой в цилиндрической системе координат, дальнейшие выкладки будут производиться в декартовой системе координат x, y, z (рисунок 2.2), так как именно в ней происходит получение опытных данных с последующим определением физико-механических параметров полимера.

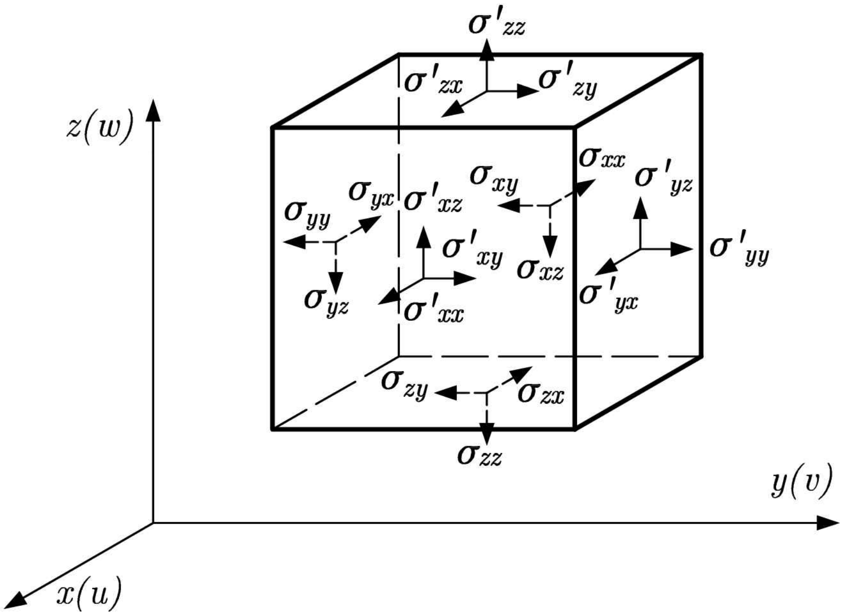


Рисунок 2.2 — Элемент сплошной среды в декартовых координатах

Записывать выражения можно более компактно, если присваивать осям и смещениям индексы 1, 2, 3

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3; \quad u = u_1; \quad v = u_2; \quad w = u_3,$$

а также для компонентов напряжений

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11}, \ldots, \quad \tau_{yz} = \sigma_{yz} = \sigma_{23}, \ldots, \quad (1, 2, 3), \quad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki})\,.$$

При формировании компонент упругой и реологических деформаций необходимо отметить особенность сдвиговых деформаций

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{23}. \tag{2.15}$$

Коэффициент «2» в выражении (2.15) вводится не случайно и позволяет записывать дальнейшие выражения более удобно и универсально.

Тогда выражения для компонентов суммарной, упругой и высокоэластической деформации записываются так:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{11}, \dots, & \varepsilon_{yz} &= 2\varepsilon_{23}, \dots, \\
\varepsilon_{el,xx} &= \varepsilon_{el,11}, \dots, & \varepsilon_{el,yz} &= 2\varepsilon_{el,23}, \dots, \\
\varepsilon_{cr,xx} &= \varepsilon_{cr,11}, \dots, & \varepsilon_{cr,yz} &= 2\varepsilon_{cr,23}, \dots, \quad (1,2,3).
\end{aligned}$$

Компоненты тензора малой суммарной деформации через смещения записываются как:

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{2.16}$$

Суммарная деформация имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{el,ik} + \varepsilon_{cr,ik} + \alpha\,(T - T_0)\,\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{2.17}$$

где коэффициент δ_{ik} принимает значения

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Скорость деформаций получают дифференцированием выражения (2.17)

$$v_{s,ik} = \frac{\partial \varepsilon_{el,ik}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{2.18}$$

На основании закона Гука в обратной форме (см. параграф 1.2, с.18) для упругих составляющих деформаций справедлива запись

$$\varepsilon_{el,ik} = \left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu} p \delta_{ik} \right) \frac{1}{2G} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{2.19}$$

где ν — коэффициент Пуассона; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; p — среднее давление.

Скорость высокоэластических деформаций, согласно [72], определяется выражением

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left[\frac{3}{2}\left(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}\right) - E_\infty \varepsilon_{cr,ik}\right] \frac{1}{\eta^*} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{2.20}$$

или в ином виде, получаемом путём преобразований с помощью закона Гука

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left(\varepsilon_{el,ik} - \frac{\theta_{el}\delta_{ik}}{3} - \frac{G_\infty}{G}\varepsilon_{cr,ik}\right) \frac{1}{\left(1 + \dfrac{G_\infty}{G}\right) T^*} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{2.21}$$

Здесь используется теория, согласно которой объёмная высокоэластическая деформация равна нулю $\theta_{cr} = 0$, при этом $\nu_{cr} = 0.5$ и тогда

$$G_\infty = \frac{E_\infty}{2(1 + \nu_{cr})} = \frac{E_\infty}{3}, \quad \text{отсюда} \quad E_\infty = 3G_\infty,$$

где T^* — соответствующее время релаксации.

В общем виде релаксационная вязкость определяется формулой

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left\{-\frac{1}{m^*}\left[\gamma^* p + \left|\frac{3}{2}\left(\sigma_{rr} - p\right) - E_\infty \varepsilon_{cr,rr}\right|_{\max}\right]\right\}, \tag{2.22}$$

где индексом r обозначены главные направления для напряжений; γ^* — объёмный коэффициент, зависящий от структуры полимера и температуры.

Зависимость между временем релаксации T^* и коэффициентом релаксационной вязкости η^* описывается формулой

$$\eta^* = 3G\left(1 + G_\infty/G\right)T^*. \tag{2.23}$$

Здесь, как и ранее, использованы соотношения

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}\delta_{ik} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}; \tag{2.24}$$

$$\theta_{el} = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{el,ii}; \qquad p = K\theta_{el}; \qquad K = \frac{E}{3\left(1 - 2\nu\right)}. \tag{2.25}$$

Относительное изменение объёма записывается с учётом используемых гипотез

$$\theta = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \qquad \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{cr,ii} = 0.$$

$$\theta = \theta_{el} + 3\alpha(T - T_0).$$

Форма записи коэффициента релаксационной вязкости (2.22) предпочтительна в случае изотермических процессов, при которых составляющие данного выражения η_0^*, γ^* и m^*, зависящие от температуры T становятся константами. Довольно часто в выражении (2.22) слагаемое, содержащее $p = \theta_{el}K$, весьма мало и им можно пренебречь.

Использование выражений (2.17)—(2.19) позволяет прийти к системе уравнений относительно компонентов трёх величин: напряжений — σ_{ik}, смещений — u_i и суммарной деформации — ε_{ik}.

Подстановка (2.19) в (2.17) приводит к явному выражению деформаций ползучести $\varepsilon_{cr,ik}$, которое не могло быть получено при наличии остаточной деформации

$$\varepsilon_{cr,ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_{el,ik} - \alpha(T - T_0)\delta_{ik}$$

или

$$\varepsilon_{cr,ik} = \varepsilon_{ik} - \left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu} p\delta_{ik}\right)\frac{1}{2G} - \alpha(T - T_0)\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.26)$$

Для удобства дальнейшей работы удобно ввести обозначения

$$f_{ik}^* = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}\right) - E_\infty \varepsilon_{cr,ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.27)$$

Необходимо отметить, что $f_{ik}^* = f_{ki}^*$.

Подставляя в последнее уравнение выражение (2.26), определяют f_{ik}^* через σ_{ik} и ε_{ik}, справедливое при отсутствии остаточной деформации:

$$f_{ik}^* = \frac{3}{2}\left[\left(1 + \frac{G_\infty}{G}\right)\sigma_{ik} - \left(1 + 2\nu\frac{E_\infty}{E}\right)p\delta_{ik}\right] + \\ + \alpha E_\infty (T - T_0)\delta_{ik} - E_\infty \varepsilon_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.28)$$

Подставляя (2.26) и (2.28) в (2.20), получаем уравнение связи — обобщённое уравнение Максвелла, содержащее лишь компоненты напряжений и суммарной деформации.

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} - \frac{3}{1+\nu}\frac{\partial p}{\partial t}\delta_{ik}\right) + \alpha\delta_{ik}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{f^*_{ik}}{\eta^*} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{2.29}$$

В последнем уравнении связи, коэффициент релаксационной вязкости η^* выражается

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta^*_0}\exp\left\{\frac{1}{m^*}\left[\gamma^* p + |f^*_{rr}|_{\max}\right]\right\}.$$

В связи с наличием в выражении η^* экспоненты, система (2.29) является нелинейной, что и определяет сложность её решения.

2.3 О константах уравнения связи и понятие линеаризации уравнений высокоэластичности

Используемые в настоящем параграфе уравнения связи представлены шестью независимыми константами в случае неизменности температуры ($T = \text{const}$): две константы упругой деформации G и ν, а также четырьмя параметрами высокоэластической деформации η^*_0, m^*, E_∞ и γ^*, в общем случае являющимися значительными функциями температуры. При этом не представляется возможным [72] теоретическое определение указанных параметров; определение возможно на основании данных макроскопического анализа.

При этом упругие параметры материала модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν зависят от атомного строения вещества, мало зависят от надмолекулярной структуры полимера и определяются, в основном, его химической структурой.

С другой стороны, например, модуль высокоэластичности E_∞ определяется взаимодействием отдельных элементов длинноцепочечных молекулярных комплексов, а также их тепловым движением, соответственно зависит от структурных характеристик полимера и поэтому является значительной функцией температуры.

Не меньшей зависимостью от температуры и структурного состояния полимера обладает коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^*. Связано это с тем, что сам коэффициент выражается через временной релаксационный параметр t_0^* и энергию активации.

Для оценки объёмного коэффициента γ^*, согласно [72], можно использовать выражение

$$\gamma^* = \frac{9}{2}\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)\frac{1-2\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{2}{3}\frac{E_\infty}{E}(1+\nu)\right],$$

где α^* и β^* — структурные постоянные. Такие образом, объёмный коэффициент γ^* зависит от структуры полимера и температуры, но в гораздо меньшей степени, чем E_∞.

Высказанные соображения подтверждают ряд работ, ставшие «классикой» [11, 12], и до сих пор, несмотря на свою давность, не потеряли актуальность по содержащимся в них опытным данным по параметрам упругой и высокоэластической деформаций (кроме γ^*). Несмотря на это, до настоящего времени тяжело выделить работы, в которых всестороне проводили бы исследования зависимости параметров полимеров от химического состава и строения для обобщённого уравнения Максвелла.

Нелинейность уравнений высокоэластичности приводит к тому, что получить их аналитическое решение практически невозможно — для этого применяют численные и численно-аналитические методы. Поэтому в инженерной практике, а также для предварительной оценки деформированного состояния используют приближённые методы, в том числе и метод линеаризованных уравнений.

Довольно часто необходимо на первом этапе определить качественную картину процесса деформации полимера, для чего и используются линеаризованные уравнения. При этом не всегда удаётся добиться количественного совпадения полученных теоретических решений с соответствующими опытными наблюдениями; совпадение, как правило, имеет место только при малых напряжениях [74]. Полезно применять линеаризованные уравнения и для качественного анализа при использовании численных методов интегрирования, т. к. в этом случае можно предварительно сориентироваться с подбором значений соответствующих параметров, что благоприятно сказывается на объёмах вычислительной работы.

Основы теории линейной высокоэластичности были заложены в многочисленных работах, к примеру, для одноосных задач развитие этой теории отразилось в работах [4, 34, 35, 92, 99].

При этом линейная теория представляется частным случаем нелинейной, получаемой при условии

$$m^* \longrightarrow \infty, \qquad \eta^* \longrightarrow \eta_0^*\left(T\right).$$

При известной зависимости $T = T(x_i, t)$ можно определить и зависимость $\eta_0^* = \eta_0^*(x_i, t)$. В этом случае скорость высокоэластических деформаций (2.20) имеет линейную зависимость от напряжений и деформаций, при этом может быть нелинейной функций времени и координат.

При радикальном упрощении уравнений обычно условие линеаризации записывают в виде

$$m^* \longrightarrow \infty, \qquad \eta^* \longrightarrow \eta_0^* \equiv \mathrm{const}.$$

Необходимо отметить, что использовать вышеуказанное условие можно только при изотермических процессах при постоянном температурном поле. В этом случае коэффициент начальной релаксационной вязкости превращает η_0^* в константу, определяемую величиной температуры. Поскольку, как видно из выражения (2.22), коэффициент релаксационной вязкости η^* зависит не только от температуры (через коэффициент начальной релаксационной вязкости), но является функцией и напряжений, и модуля скорости m^*, который сам сильно зависит от температуры, использование линеаризации не всегда возможно, т. к. может приводить к значительным отличиям от нелинеаризованного расчёта.

2.4 Квазистатическое растяжение (сжатие) стержней

При исследовании однородного растяжения образца вдоль оси x можно записать

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}(t) = \sigma_x(t) \quad \text{и} \quad \sigma_i = 0 \quad (i = 2, 3). \tag{2.30}$$

Далее выкладки приводятся в декартовой системе координат (x, y, z). Однако при рассмотрении стержней цилиндрической формы, задача становится в осесимметричной постановке, в результате в декартовой системе направления осей y и z эквивалентны.

В выражении (2.30) $\sigma_{xx}(t) = \sigma_x(t)$ — зависимая от режима нагружения стержня величина напряжений.

Величина деформаций от времени может быть определена на основании выражений (2.17)–(2.20):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{el,xx} + \varepsilon_{cr,xx}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{el,yy} + \varepsilon_{cr,yy}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{el,xy} + \varepsilon_{cr,xy}, \tag{2.31}$$

где упругие составляющие деформации определяются так:

$$\varepsilon_{el,xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_{el,yy} = -\nu\varepsilon_{el,xx}; \quad \varepsilon_{el,xy} = 0. \tag{2.32}$$

Скорости высокоэластических деформаций будут определяться выражениями

$$\frac{d\varepsilon^*_{xx}}{dt} = \frac{f^*_{xx}}{\eta^*}; \quad \frac{d\varepsilon^*_{yy}}{dt} = \frac{f^*_{yy}}{\eta^*}; \quad \frac{d\varepsilon^*_{xy}}{dt} = \frac{2f^*_{xy}}{\eta^*}. \tag{2.33}$$

При этом вместо частных производных используются полные производные. В выражении (2.33) функции напряжений имеют вид

$$f^*_{xx} = \sigma_x - E_\infty\varepsilon_{cr,xx}; \quad f^*_{yy} = -\left(\frac{1}{2}\sigma_x + E_\infty\varepsilon_{cr,yy}\right); \quad 2f^*_{xy} = -E_\infty\varepsilon_{cr,xy},$$

Коэффициент η^* принимает вид

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta^*_0}\exp\left\{\left[\gamma^*\frac{\sigma_x}{3} + |f^*_{rr}|_{max}\right]\frac{1}{m^*}\right\}.$$

Таким образом, коэффициент релаксационной вязкости η^* напрямую зависит от максимального значения функции напряжений f_{rr} для главных направлений. Вследствие того, что в данном случае главные направления совпадают с координатами, используют наибольшую по модулю величину из f_{xx} и f_{yy}.

Также в рассматриваемой задаче деформация сдвига ε_{xy} имеет тождественно нулевое значение. Это становится очевидно при рассмотрении последней компоненты выражения (2.33), если представить его в конечно-разностном виде:

$$\Delta\varepsilon^*_{xy} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon^*_{xy}}{\mathrm{d}t}\Delta t; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon^*_{xy}}{\mathrm{d}t} = -\frac{E_\infty}{\eta^*}\cdot\varepsilon^*_{xy}\right). \tag{2.34}$$

Для данного уравнения можно записать единственное тривиальное решение $\varepsilon^*_{xy} \equiv 0$ только в случае однородных начальных условий.

Необходимо отметить, что в случае высокоэластической деформации, достигается некоторая предельная деформация, которая перестаёт зависеть от времени, называемая равновесной высокоэластической деформацией $\varepsilon_{cr,x,\text{пред}}$ и являющаяся функцией напряжений. В предельном значении высокоэластической деформации связь между напряжениями и самой высокоэластической деформацией представляет собой линейную функцию

$$\sigma_x = E_\infty\varepsilon_{cr,x,\text{пред}}, \tag{2.35}$$

где E_∞ — модуль высокоэластической деформации.

Суммарная предельная деформация определяется суммой двух составляющих: упругой и высокоэластической. На основании (2.35)

$$\varepsilon_{x,\text{пред}} = \varepsilon_{el,x} + \varepsilon_{cr,x,\text{пред}} = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x}{E_\infty} = \frac{\sigma_x}{E^*_\infty}, \tag{2.36}$$

где величина

$$E^*_\infty = \frac{E_\infty}{1+\dfrac{E_\infty}{E}} = \frac{E}{1+\dfrac{E}{E_\infty}}$$

называется приведённым модулем высокоэластичности.

В поперечном направлении деформации определяются из уравнений (2.33) делением почленно двух первых уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr,yy}}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr,xx}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sigma_x/2+E_\infty\varepsilon_{cr,yy}}{\sigma_x-E_\infty\varepsilon_{cr,xx}}.$$

Это выражение обращается в тождество при условии

$$\varepsilon_{cr,yy}=-\frac{\varepsilon_{cr,xx}}{2}. \tag{2.37}$$

Данное соотношение удовлетворяет условию постоянства объёма при указанной деформации, т. к. $\theta_{cr}=\mathrm{const}$.

С учётом (2.37), из (2.31) и (2.32)

$$\varepsilon_{yy}=\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\varepsilon_{el,xx}-\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}=\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\frac{\sigma_x}{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}. \tag{2.38}$$

Далее, для удобства, вводится эффективный коэффициент Пуассона, равный отношению суммарных деформаций с обратным знаком

$$\nu_{\text{эфф}}=-\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}, \tag{2.39}$$

тогда выражение (2.38) принимает вид

$$\nu_{\text{эфф}}=-\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\frac{\varepsilon_{el,xx}}{\varepsilon_{xx}}+\frac{1}{2}, \qquad \left(\varepsilon_{el,xx}=\frac{\sigma_x}{E}\right). \tag{2.40}$$

В случае монотонного процесса имеет место соотношение

$$\frac{\varepsilon_{el,xx}}{\varepsilon_{cr,xx}}\leqslant 1,$$

следовательно, из выражения (2.40) следуют два предельных значения $\nu_{\text{эфф}}$: ν при $\varepsilon_{el,xx}\simeq\varepsilon_{xx}$, и $\frac{1}{2}$ при $\varepsilon_{el,xx}\ll\varepsilon_{xx}$, таким образом $\nu\ll\nu_{\text{эфф}}\ll\frac{1}{2}$. В общем случае параметр $\nu_{\text{эфф}}$ — представляет собой функцию времени, зависящую от режима нагружения.

С помощью соотношения (2.40) можно сопоставить между собой величины f^*_{xx} и f^*_{yy}. При этом $2f^*_{yy}=-\left(\sigma_x-E_\infty\varepsilon_{cr,x}\right)=-f^*_{xx}$, соответственно $\left|f^*_{yy}\right|=$

$\dfrac{|f^*_{xx}|}{2}$. Таким образом, в выражении коэффициента релаксационной вязкости η^* используют величину f^*_{xx}.

В результате в рассматриваемой задаче после нахождения удлинения в направлении растяжения появляется возможность определить деформированное состояние.

Деформация определяется при помощи оставшихся выражений (2.31)–(2.33)

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{el,xx} + \varepsilon_{cr,xx}; \qquad \varepsilon_{el,xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \\
\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr,xx}}{\mathrm{d}t} = \frac{f^*_{xx}}{\eta^*}; \qquad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta^*_0}\exp\left\{\left[\frac{1}{3}\gamma^*\sigma_x + |f^*_{xx}|\right]\frac{1}{m^*}\right\},
\end{gathered} \tag{2.41}$$

где $f^*_{xx} = \sigma_x - E_\infty\varepsilon_{cr,xx} = \left(1 + \dfrac{E_\infty}{E}\right)\sigma_x - E_\infty\varepsilon_{xx}$.

С другой стороны, можно воспользоваться одним уравнением относительно суммарной деформации

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xx}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} + \frac{f^*_{xx}}{\eta^*}, \tag{2.42}$$

в которое подставляется второе выражение f^*_{xx} из (2.41).

Следовательно, деформация вдоль оси x определяется из независимой группы уравнений.

Необходимо отметить, что в связи с весьма малым влиянием объёмного коэффициент γ^* на коэффициент релаксационной вязкости, часто принимают $\gamma^* \to 0$. Следующим этапом после определения скоростей смещения и деформаций, является определение самих смещений

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad v_x = \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.43}$$

Резюмируя вышесказанное, в случае квазистатического одноосного растяжения, напряжение σ_x и соответствующая суммарная деформация ε_{xx} связаны дифференциальным уравнением (2.42), при этом поперечная деформация ε_{yy} может быть определена из соотношения (2.38).

2.5 Релаксация напряжений

Наибольший практический интерес представляет собой режим постепенной релаксации напряжений в растянутом (сжатом) стержне с фиксированной суммарной деформацией.

Полагая в выражении (2.42)

$$\varepsilon_{xx} = \mathrm{const} = \varepsilon_c, \tag{2.44}$$

получают дифференциальное уравнение, описываемое изучаемый процесс

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{E}{\eta_0^*} f_{xx}^* \exp\left\{\left[\frac{1}{3}\gamma^*\sigma_x + |f_{xx}^*|\right]\frac{1}{m^*}\right\}. \tag{2.45}$$

Здесь f_{xx}^* — функция напряжений, определяемая выражениям

$$f_{xx}^* = \sigma_x - E_\infty\varepsilon_{cr,x} = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right)\sigma_x - E_\infty\varepsilon_x.$$

Начальное условие записывается так: $\sigma_x = \sigma_{x,0}$ при $t = 0$.

В рассматриваемом режиме

$$\frac{\mathrm{d}f_{xx}^*}{\mathrm{d}t} = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t},$$

далее, исключая из (2.45), можно записать

$$\frac{\mathrm{d}f_{xx}^*}{\mathrm{d}t} = -\frac{E + E_\infty}{\eta_0^*} \exp\left(b^*\varepsilon_c\right) f_{xx}^* \exp\left|\frac{f_{xx}^*}{m_0^*}\right|, \tag{2.46}$$

где введены обозначения

$$m_0^* = \frac{m^*}{1 + \dfrac{\gamma^* \operatorname{sign}\sigma_x}{3\left(1 + \dfrac{E_\infty}{E}\right)}} \quad \text{и} \quad b^* = \frac{E_\infty^*\gamma^*}{3m^*}.$$

В выражении (2.46) отмечен множитель ($b^*\varepsilon_c$), в данном режиме являющийся величиной постоянной.

Как показано в работе [72], дальнейшее решение производится при помощи некоторой экспоненциальной функции

$$\Psi(x) = x \exp x,$$

которая подробно табулирована с шагом 0.01 и ясно, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-Ei(-x)\right] = -\frac{\exp(-x)}{x}.$$

Тогда можно получить решения (2.46)

$$t = \frac{\eta_0^*}{E + E_\infty} \exp\left(-b^*\varepsilon_c\right)\left[-Ei(-\xi^*) + Ei(-\xi_0^*)\right], \tag{2.47}$$

где введена переменная ξ

$$\xi^* = \left|\frac{f_{xx}^*}{m_0^*}\right| = \frac{\left|\left(1 + \dfrac{E_\infty}{E}\right)\sigma_x - E_\infty\varepsilon_c\right|}{m_0^*}. \tag{2.48}$$

В области $\xi^* \gg 1$ приближённое решение может быть записано в виде

$$t = \frac{\eta_0^*}{E + E_\infty} \exp\left(-b^*\varepsilon_c\right)\left[\frac{\exp(-\xi^*)}{\xi^*} - \frac{\exp(-\xi_0^*)}{\xi_0^*}\right]. \tag{2.49}$$

Интегральные кривые удобно представлять графически при помощи полулогарифмических координат. Тогда, логарифмируя (2.47), получим:

$$\lg\frac{t}{t_0} = -\frac{b^*\varepsilon_c}{\ln 10} + \lg\frac{\eta_0^*}{(E + E_\infty)\, t_0} + \lg\left[-Ei(-\xi^*) + Ei(-\xi_0^*)\right], \tag{2.50}$$

где t_0 — масштабный коэффициент времени (1 с или 1 мин и т. д.).

На рисунке 2.3 представлен характер интегральных кривых.

На рисунке 2.4 — теоретические кривые в координатах (σ_x ,t) и (σ_x, $\lg t$), полученные для некоторых значений параметров.

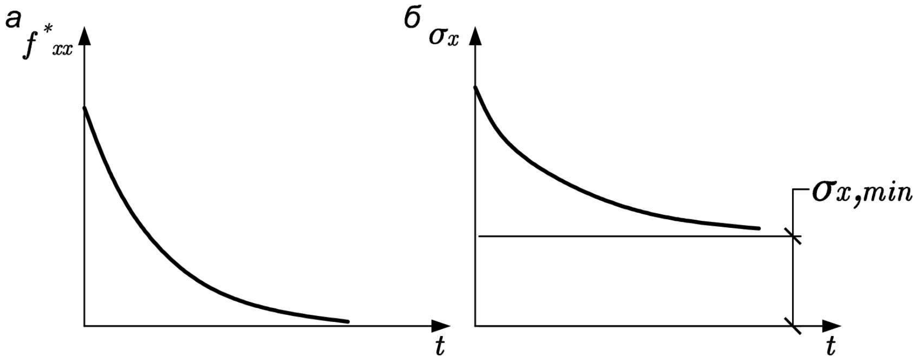


Рисунок 2.3 — Характер интегральных кривых при релаксации напряжений: *а* — функция $f_{xx}(t)$; *б* — напряжение $\sigma_x(t)$

Вследствие того, что напряжения в рассматриваемом процессе релаксации напряжений убывают со временем, полученные графики релаксации напряжений имеют тот же характер, что и кривые релаксации деформаций [72]. Если рассматривать графики, полученные с использованием полулогарифмических координат, они имеют две горизонтальные асимптоты и одну точку перегиба. Когда в процессе упругого последействия происходит релаксация деформаций до нулевого значения, то при $\varepsilon_x = \text{const}$ релаксация напряжений происходит до некоторого минимального значения, определяемого условием $\xi^* \to 0$. Это значение вычисляется выражением

$$\sigma_{\min} = E_\infty \varepsilon^*_{\max} = E_\infty \varepsilon^*_c \tag{2.51}$$

и можно определить нижний предел релаксации напряжений.

Высокоэластическая деформация изменяется и в случае ползучести, и в случае релаксации напряжений. В последнем случае из выражения (2.41) имеет место запись

$$\varepsilon^*_x = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x}{E} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_x}{E}.$$

С учётом значения $\sigma_{\min}$ и начального условия,

$$\varepsilon^*_0 \ll \varepsilon^*_x \ll \varepsilon^*_{\max}, \qquad \varepsilon^*_0 = \varepsilon^*_c - \frac{\sigma_{x,0}}{E}, \qquad \varepsilon^*_{\max} = \varepsilon^*_c - \frac{\sigma_{\min}}{E} = \frac{\varepsilon_c}{1 + \dfrac{E_\infty}{E}}. \tag{2.52}$$

В случае быстрого нагружения перед фиксацией постоянной деформации такого, что имеет место только упругая составляющая деформации, а неупругая

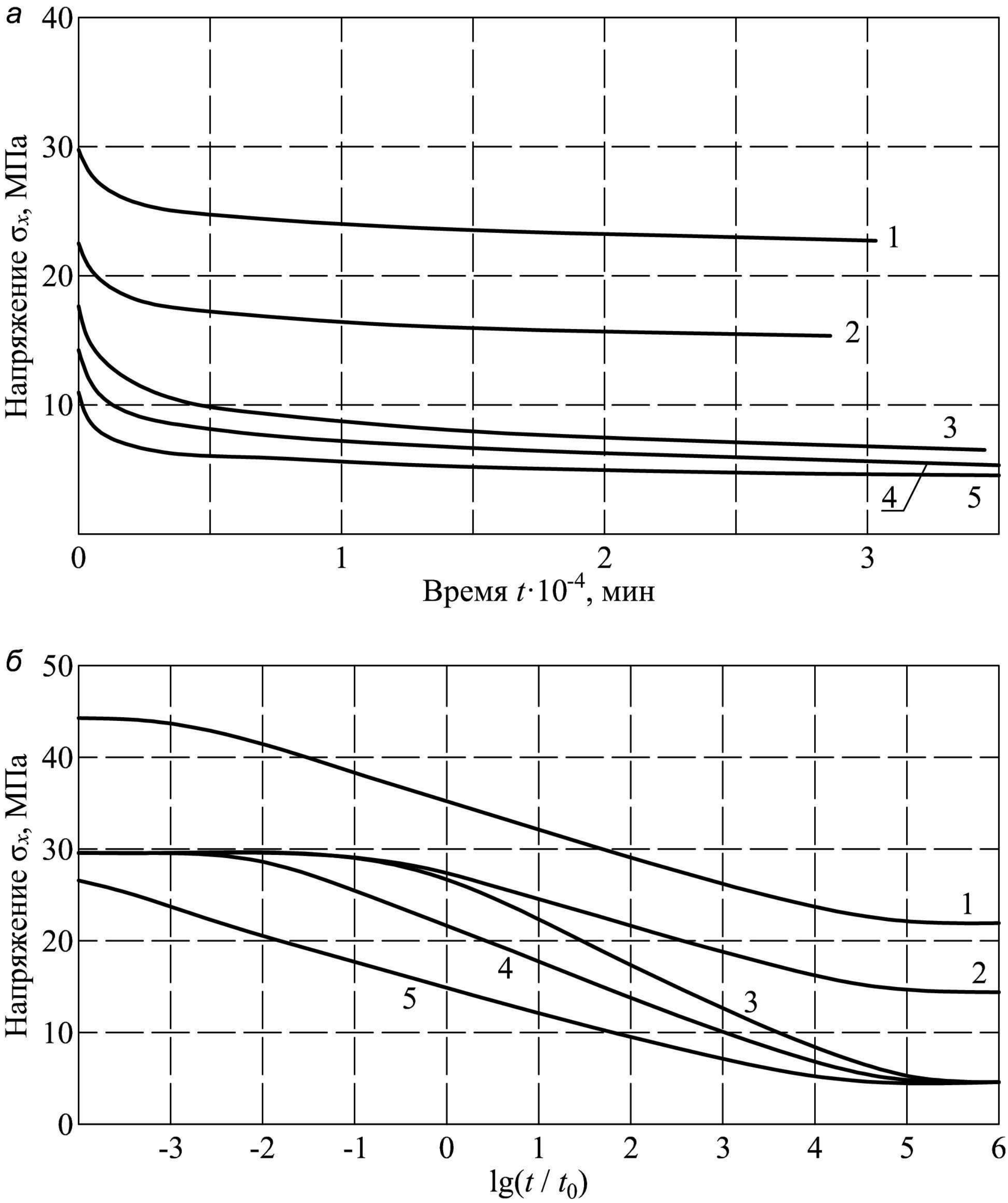


Рисунок 2.4 — Интегральные кривые релаксации напряжений, вычисленные по формулам (2.47) и (2.50):
а — в координатах ε, t; *б* — в координатах ε, $\lg(t/t_0)$. Величина деформаций $\varepsilon_c \cdot 10^5$: 1 — 1.5; 2–5 — 1. Значения E_∞, МПа: 1 и 2 — 3000; 3, 4 и 5 — 600. Значения остальных параметров: $E = 3000$ МПа; $m^* = 3$ МПа; $\eta_0^* = 0.4 \cdot 10^6$ МПа. Значения γ^*: 1, 2 и 3 — 0; 4 — 1; 5 — 3

— не успевает развиться, т. е. $\sigma_{x,0} = E\varepsilon_c$, справедлива запись равенства нулю неупругой составляющей: $\varepsilon_c^* = 0$.

Угловой коэффициент касательной к диаграмме релаксации напряжений в полулогарифмических координатах может быть определён дифференцированием выражения (2.50), таким образом, в точке перегиба можно записать

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi^*}{\mathrm{d}y^*}\right)_{\xi^*=\xi^*_{\text{П}}} = -\frac{1}{1+\dfrac{1}{\xi^*_{\text{п}}}}, \tag{2.53}$$

где

$$y^* = \ln\frac{t}{t_0} = \lg\frac{t}{t_0}\ln 10.$$

Значение ординаты точки перегиба

$$\xi^*_{\text{п}} = \frac{\left|\left(1+\dfrac{E_\infty}{E}\right)\sigma_{\text{п}} - E_\infty\varepsilon_0\right|}{m^*_0}$$

для кривых, представленных на рисунке 2.4 можно однозначно определить через ξ^*_0 путем отыскания корня уравнения [72]

$$\left[-Ei\left(-\xi^*_{\text{п}}\right) + Ei\left(\xi^*_0\right)\right]\left(1+\xi^*_{\text{п}}\right)\exp\xi^*_{\text{п}} = 1. \tag{2.54}$$

Корень представленного уравнения может быть определён и путём подбора, и графически. Поскольку в дальнейшем для определения упругих и высокоэластических параметров будет использована несколько другая методика, классическое решение здесь приводить не будем, его можно найти в [72].

Следующим этапом в левой части выражения (2.54) заменяют ξ^* и y^* их значениями, в результате чего получают выражение

$$\bar{m}^*_0 = \left|\bar{k}\right|\left(1+\frac{1}{\xi^*_{\text{п}}}\right), \tag{2.55}$$

где

$$\bar{k} = \frac{k}{\ln 10}; \qquad k = \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta\lg\left(\dfrac{t}{t_0}\right)}.$$

Таким образом, параметр k представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой $\sigma_x\left(\lg t\right)$ в точке перегиба, имеет ту же размерность, что и напряжения и может быть определён по соответствующей опытной диаграмме релаксации напряжений. Параметр $\bar{m}_0^*$ в выражении (2.55) имеет значение

$$\bar{m}_0^* = \frac{m_0^*}{1 + \dfrac{E_\infty}{E}} = \frac{m^*}{1 + \dfrac{E_\infty}{E} + \gamma^* \operatorname{sign} \dfrac{\sigma_x}{3}}.$$

В случае малых значений γ^* и $\dfrac{E_\infty}{E}$ имеет место приближённое соотношение $\bar{m}_0^* = m^*$.

При наличии данных опытных испытаний диаграмм $\sigma_x(t)$ в случае $\varepsilon_x = \text{const}$ при помощи выражения (2.55) по угловому коэффициенту линейного участка в области перегиба кривой можно определить параметр $\bar{m}_0^*$. В первом приближении можно принять $\bar{m}_0^* = \left|\bar(k)\right|$, в случае известного соотношения $\dfrac{E_\infty}{m^*}$ можно более точно найти $\bar{m}_0^*$ с учётом $\xi_\text{п}^*$ методом перебора по (2.55), т. к.

$$\xi^* = \left| \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right) \frac{\sigma_x}{m_0^*} - \frac{E_\infty}{m_0^*} \varepsilon_c \right|.$$

В работе [72] показано, что при помощи выражения (2.55) можно определить величину γ^* исходя из сравнения угловых коэффициентов касательных к опытным диаграммам ползучести и релаксации напряжений. При этом для практического применения указанный способ мало пригоден, поскольку малые погрешности определения угловых коэффициентов ведут к существенным погрешностям при вычислении γ^*. На основании вышесказанного, все определения параметров и вычисления происходят без учёта коэффициента γ.

На рисунке 2.5 отражены опытные данные по релаксации напряжений образца из эпоксидной смолы ЭДТ-10. В практике удовлетворительное совпадение опытных кривых с теоретическими происходит только в области малых времён, в области больших времен необходимо учитывать несколько спектров времён релаксации полимера.

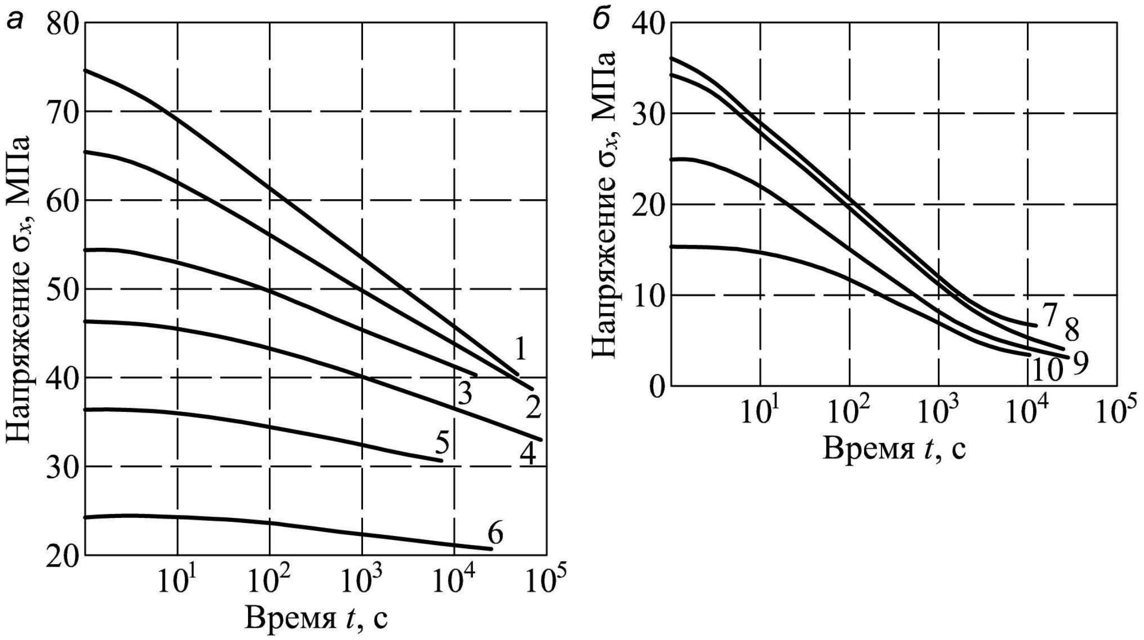


Рисунок 2.5 — Экспериментальные диаграммы релаксации напряжений эпоксидного полимера ЭДТ-10:
Температура T, $^\circ C$: *а* — 20; *б* — 80. Величина деформации $\varepsilon_c \cdot 10^2$: 1 — 3.5; 2 — 2.7; 3 — 1.9; 4 — 1.5; 5 — 1.2; 6 — 0.8; 7 — 3.4; 8 — 2.4; 9 — 1.8; 10 — 1

2.6 Методика определения постоянных

Ученики школы профессора Б. М. Языева, к которым относится и автор настоящей диссертационной работы, разработали иной подход к определению упругих и высокоэластических параметров полимеров. Автор отразил в работах [29, 121], и в работах других учеников [27, 120].

В настоящем параграфе приводится методика определения физико-механических параметров (упругих и высокоэластических) полимеров на примере поливинилхлорида. Связано это с тем, что в настоящее время долю на рынке конструкционных материалов из полимеров порядка 70 % занимает именно поливинилхлорид, из которого изготавливают: окна, трубы, изоляция кабелей и т. д. Данный материал обладает многими положительными свойствами такими, как высокая огнестойкость, устойчивость к агрессивным средам, довольно высокие физико-механические свойства — всё это и определяет его широкое распространение.

Как отмечалось ранее, оценку прочностных и деформационных свойств конструкций и их элементов из полимерных материалов нельзя проводить только по мгновенной, упругой работе. Необходимо учитывать высокоэластические деформации, развивающиеся в течение времени, которые могут приводить к существенному перераспределению напряжений в элементах конструкций, в результате чего существенно меняется напряжённо-деформированное состояние. Ситуация осложняется тем, что для поливинилхлорида, как и для большинства других полимеров, данные по высокоэластическим деформациям (релаксация, ползучесть и т. д.) в литературе встречаются довольно редко. Можно отметить работы [86, 87], из которых был заимствован график релаксации ПВХ для дальнейшего анализа и получения необходимых параметров уравнения Максвелла-Гуревича (рисунок. 2.6) при постоянной относительной деформации $\varepsilon = 3\,\%$.

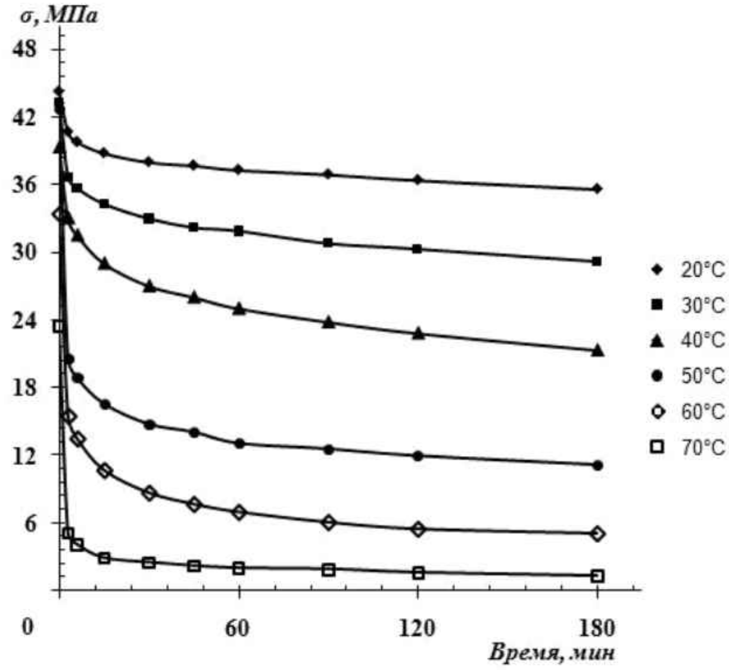


Рисунок 2.6 — Кривые релаксации вторичного ПВХ

В таблице 2.1 представлена зависимость напряжения от времени $\sigma(t)$ на основе рисунка 2.6.

Авторы работ [86, 87] используют интегральное уравнение Больцмана–Вольтера для аппроксимации полученных кривых:

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \int_0^t T(\tau)\, d\tau \right],$$

Таблица 2.1 — Зависимость напряжения–деформации ($\sigma(t)$) для ПВХ

σ, МПа	t, ч									
	0	3	6	15	30	45	60	90	120	180
$20\,^{\circ}C$	44.4	40.8	39.8	38.8	38.0	37.7	37.3	36.9	36.4	35.6
$30\,^{\circ}C$	43.4	36.7	35.7	34.3	33.0	32.2	31.9	30.8	30.3	29.2
$40\,^{\circ}C$	39.3	32.9	31.4	29.0	27.0	25.9	24.9	23.8	22.7	21.3
$50\,^{\circ}C$	36.4	20.5	18.8	16.5	14.7	13.9	13.0	12.5	11.9	11.1
$60\,^{\circ}C$	33.4	15.4	13.4	10.6	8.61	7.63	6.95	6.02	5.42	5.05
$70\,^{\circ}C$	23.4	5.06	4.05	2.84	2.48	2.16	2.00	1.85	1.58	1.31

где σ — напряжение в заданный (текущий) момент времени t; σ_0 — напряжение в начальный момент времени $t = 0$; τ — переменная, изменяющая свои значения от 0 до t; $T(\tau)$ — ядро релаксации.

Рассмотрим ядро, имеющее довольно сложный вид:

$$T(\tau) = -\frac{S}{k_B m}\left[\frac{1}{\alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)} - \frac{1}{\ln 0.5}\right],$$

где $m = m^* \int_0^\infty T^*(\tau)\,d\tau$; $T^*(\tau)$ — переменная часть ядра; k_B — постоянная Больцмана; m^* — общее число кинетических единиц (релаксаторов и нерелаксаторов в единице объёма); α — доля релаксаторов в общем числе кинетических единиц; S_0 — величина начальной энтропии системы.

При этом, параметр α является функцией от τ:

$$\alpha = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{k^*}{\beta}\tau\right)^{\beta}},$$

где $k^* = k^{n-1}$; $\beta = \frac{1}{n-1}$; n — порядок реакции взаимодействия релаксаторов; k — постоянная скорости этого взаимодействия.

Плюсом интегральной формы уравнений является удобство обработки экспериментальных данных, а также весьма точное описание процессов ползучести и релаксации. В практике, при непосредственном решении задач, возникают значительные математические трудности, в результате чего отдают предпочтение дифференциальной форме, а не интегральной.

Рассмотрим альтернативную методику определения входящих в нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича реологических параметров на основе анализа графика релаксации напряжений (см. рисунок. 2.6).

Испытания стержней производят в условиях одноосного напряженного состояния. Далее приводят выкладки при учёте только одного спектра времён релаксации полимеров. В таком случае уравнение Максвелла–Гуревича имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}, \tag{2.56}$$

где ε_{cr} — деформация ползучести (высокоэластическая деформация); f^* — функция напряжений

$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr},$$

где E_∞ — модуль высокоэластичности.

Релаксационная вязкость η^* определяется выражением

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left\{\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right)\right\}, \tag{2.57}$$

где η_0^* — начальная релаксационная вязкость; m^* — модуль скорости.

Полная деформация ε испытываемого стержня складывается из упругой и высокоэластической деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr} = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon_{cr}, \tag{2.58}$$

где E — мгновенный модуль упругости.

При этом, по условиям проведения испытаний полимерного образца, полная деформация остается величиной постоянной. В нашем случае

$$\varepsilon = \text{const} = 0.03.$$

В самом начале процесса релаксации при $t = 0$ ч высокоэластические деформации отсутствуют, таким образом появляется возможность определить мгновенный модуль упругости E:

$$E = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon} = \frac{\sigma(0)}{0.03}.$$

Следовательно, из уравнения (2.58) появляется возможность найти деформации ползучести ε_{cr} в каждой точке времени:

$$\varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon - \frac{\sigma(t)}{E}. \tag{2.59}$$

Уравнение Максвелла–Гуревича (2.56) отражает скорость ползучести, поэтому следующим этапом дифференцируем выражение (2.59) во времени:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = -\frac{1}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{2.60}$$

Для удобства введём обозначение скорости ползучести в каждый момент времени через переменную $\upsilon = \frac{\partial \varepsilon_{cr}(t)}{\partial t}$. Для нахождения скорости деформаций необходимо предварительно продифференцировать напряжения $\sigma(t)$ по времени t. Так как необходимые данные получены при различных интервалах времени (см. таблицу 2.1), то для численного дифференцирования будет применён метод неопределённых коэффициентов. Для удобства записи штрихом «$'$» обозначается производная по времени t. В самом начале процесса релаксации (при $t_1 = 0$), производная напряжения по времени σ' может быть представлена линейной комбинацией напряжений по трём точкам: исследуемая точка и две соседние

$$\sigma_1' \approx c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3. \tag{2.61}$$

Предполагается, что соотношение (2.61) выполняется точно, если функция напряжения σ является многочленом степени не выше «2», т. е. выражение (2.61) можно представить в виде

$$\sigma = 1; \qquad \sigma = t - t_1; \qquad \sigma = (t - t_1)^2. \tag{2.62}$$

Производные выражений (2.62) имеют вид

$$\sigma' = 0; \qquad \sigma' = 1; \qquad \sigma' = 2\,(t - t_1). \tag{2.63}$$

Производим подстановку выражений (2.62) и (2.63) в (2.61):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_1 - t_1) + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t1) = 1; \\ c_1(t_1 - t_1)^2 + c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t1)^2 = 2\left(t_1 - t_1\right). \end{cases}$$

Упрощая данное выражение, окончательно получаем:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_1) = 1; \\ c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t_1)^2 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы будут коэффициенты

$$c_1 = -\left(\frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{t_3 - t_1}\right);$$
$$c_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{t_3 - t_2};$$
$$c_3 = -\frac{1}{t_3 - t_2} + \frac{1}{t_3 - t_1}.$$

Проверкой полученных коэффициентов является рассмотрение частного случая при $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$. Тогда выражение для σ_1' записывается так:

$$\sigma_1' \approx \frac{1}{2\Delta t}\left(-3\sigma_1 + 4\sigma_2 - \sigma_3\right).$$

Для промежуточных точек ($i = 2 \ldots n - 1$) выражение производной напряжения по времени можно записать:

$$\sigma_i' \approx c_1\sigma_{i-1} + c_2\sigma_i + c_3\sigma_{i+1}. \tag{2.64}$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_1, c_2, c_3 используем следующие функции:

$$\sigma = 1; \qquad \sigma = t - t_i; \qquad \sigma = \left(t - t_i\right)^2,$$

производные которых имеют вид

$$\sigma' = 0; \qquad \sigma' = 1; \qquad \sigma' = 2\left(t - t_i\right).$$

В результате может быть получена система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_{i-1} - t_i) + c_3(t_{i+1} - t_i) = 1; \\ c_1(t_{i-1} - t_i)^2 + c_3(t_{i+1} - t_i)^2 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$c_1 = -\frac{1}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i};$$
$$c_2 = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i};$$
$$c_3 = -\frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i}.$$

Проверкой полученных коэффициентов может быть частный случай, когда $t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = \Delta t$. В этом случае выражение производной напряжения по времени принимает известную форму

$$\sigma_i' \approx \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}}{2\Delta t}.$$

В крайней точке $(t = n)$ производная напряжения по времени σ_n' не определяется, т. к. здесь она мало отличается от нуля

$$\sigma_n' \approx 0.$$

В конце процесса релаксации скорость роста высокоэластической деформации равна нуля, в результате чего можно определить величину модуля высокоэластичности:

$$\upsilon = \frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*} = 0;$$
$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr}; \tag{2.65}$$

$$E_\infty = \frac{\sigma(\infty)}{\varepsilon^{cr}(\infty)}.$$

Таким образом, уже известны два параметра уравнения Максвелла–Гуревича: мгновенный модуль упругости E и модуль высокоэластичности E_∞. Зная их, следующим этапом определяют коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^* и модуль скорости m^*. Определяем релаксационную вязкость на каждом временном этапе:

$$\eta^*(t) = \frac{f^*(t)}{\upsilon(t)},$$

где $f^*(t)$ вычисляем в соответствии с выражением (2.65).

Далее необходимо прологарифмировать выражение для релаксационной вязкости η^* в (2.57):

$$\ln\eta^* = \ln\left[\eta_0^* \exp\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right)\right] = \ln\eta_0^* - \frac{|f^*|}{m^*}; \tag{2.66}$$

Анализируя выражение (2.66), делаем вывод, что между величинами $y = \ln\eta^* = y$ и $x = |f^*|$ имеется линейная зависимость

$$y = ax + b, \tag{2.67}$$

где $a = -\dfrac{1}{m^*}$; $b = \ln\eta_0^*$.

Получив ряд значений $\ln\eta^*$ для соответствующих функций напряжений $|f^*|$, можно подобрать коэффициенты a и b выражения (2.67), определив которые, найдём, соответственно, модуль скорости m^* и начальную релаксационную вязкость η_0^*.

Кривая зависимости величины $\ln\eta^*$ от функции напряжений $|f^*|$, полученная при температуре $T = 20\,^\circ C$, показана на рисунке 2.7. Отклонение линии тренда (пунктирная прямая) от полученных зависимостей (сплошная кривая) объясняется рядом факторов, в том числе, малым количеством точек на исходной релаксационной кривой, которое сказывается на точности численного дифференцирования.

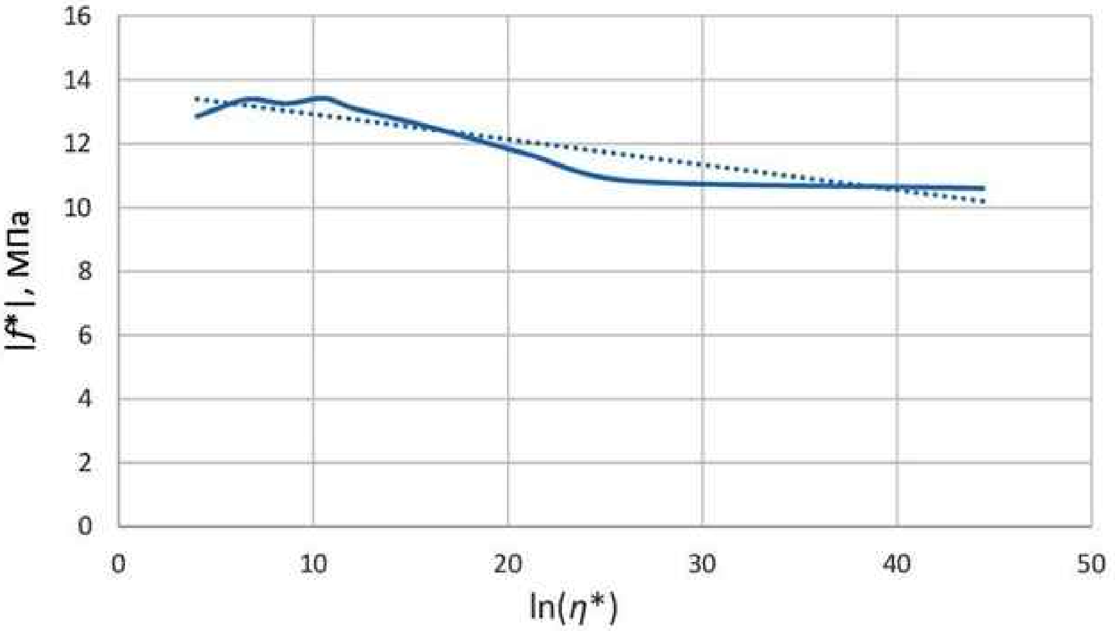


Рисунок 2.7 — Изменение величины η^* в зависимости от f^*

Таким образом, определение всех параметров уравнения Максвелла–Гуревича возможно только по данным зависимости релаксации напряжений от времени $\sigma(t)$. Результаты определения параметров приведены в таблице 2.2. Далее, согласно данным в настоящей таблице, были построены соответствующие графики (рисунки 2.8–2.11).

Таблица 2.2 — Упругие и релаксационные параметры вторичного поливинилхлорида, определённые при различных температурах

$T, ^\circ C$	20	30	40	50	60	70
E, МПа	1480	1450	1310	1210	1110	780
E_∞, МПа	5990	2975	1550	532	198	46.3
m^*, МПа	12.6	12.1	13.9	11.2	11.8	7.76
$\eta_0^* \cdot 10^{-5}$, МПа·мин	9.06	5.17	2.81	0.891	0.48	0.256

На основании анализа графиков изменения упругих и релаксационных параметров ПВХ, представленных на рисунках 2.8–2.11 сплошными линиями, устанавливаем, что все параметры, за исключением модуля скорости, являются значительной функцией температуры, т. е. — характерной чертой полимерных материалов.

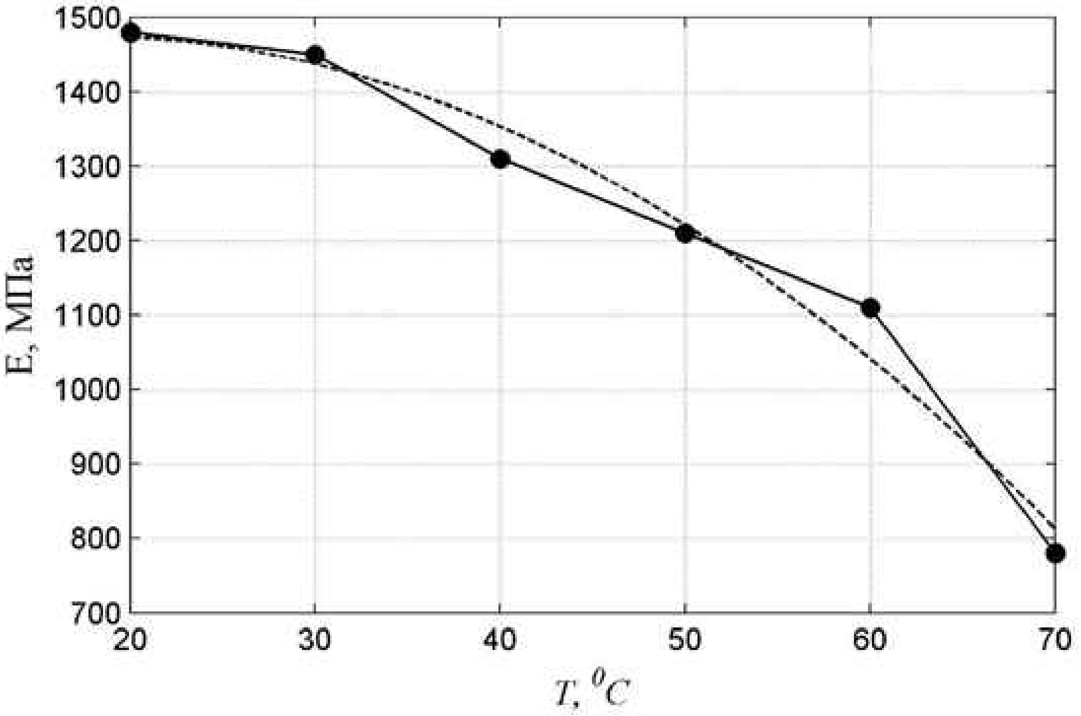


Рисунок 2.8 — Зависимость модуля упругости E вторичного ПВХ от температуры

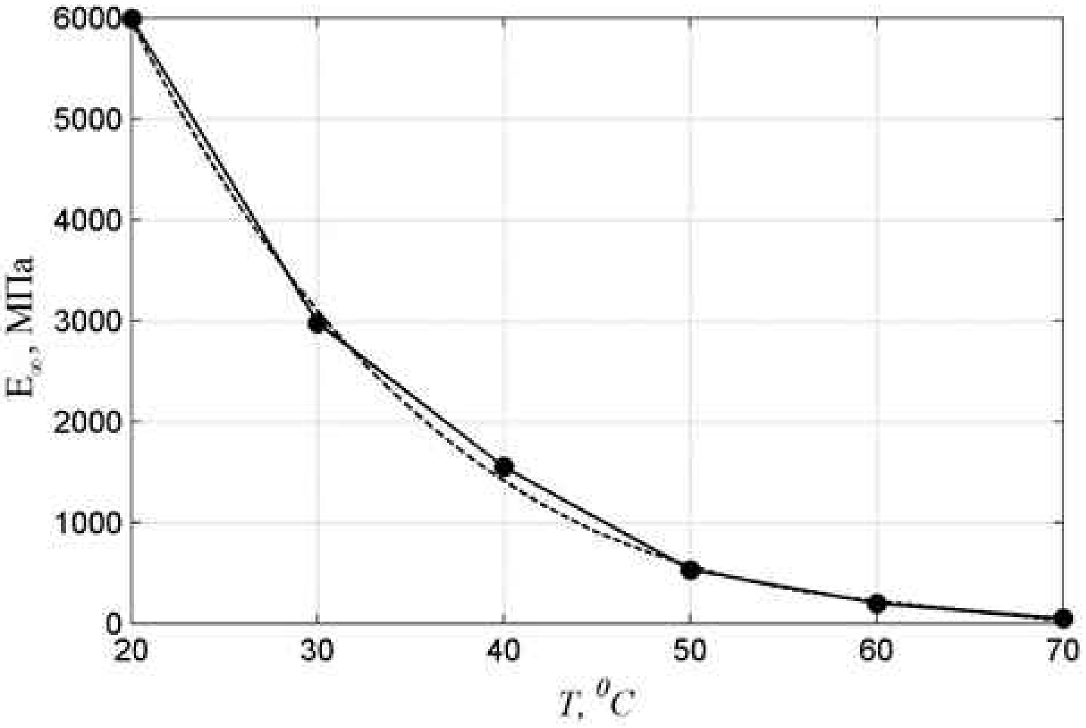


Рисунок 2.9 — Зависимость модуля высокоэластичности E_∞ вторичного ПВХ от температуры

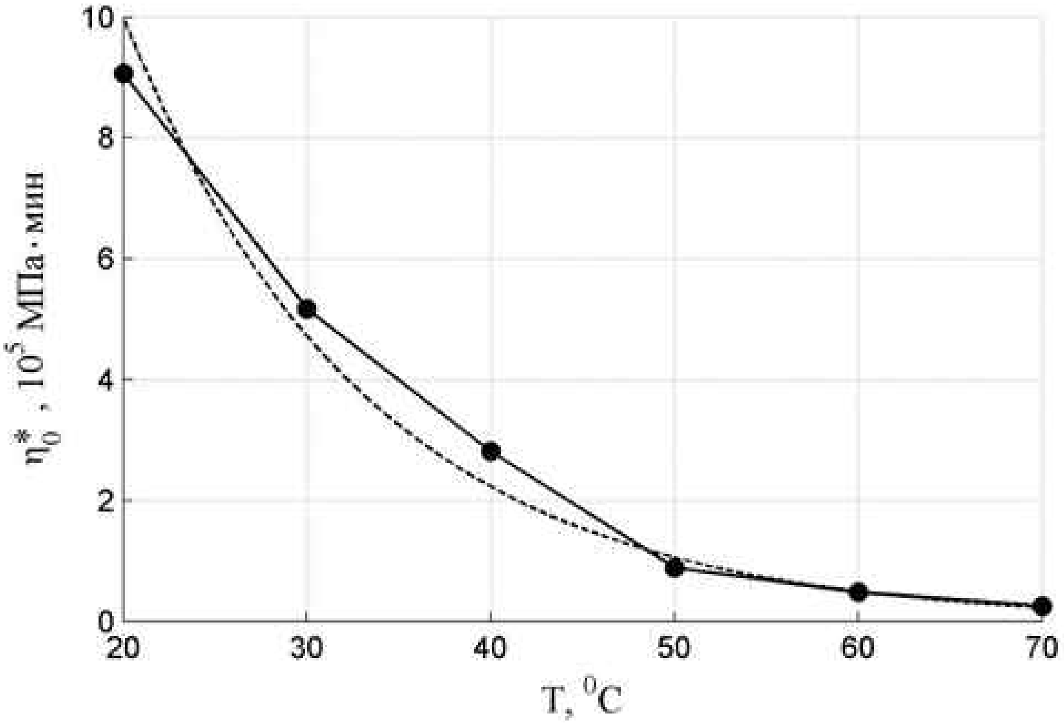


Рисунок 2.10 — Зависимость коэффициента начальной вязкости η_0^* вторичного ПВХ от температуры

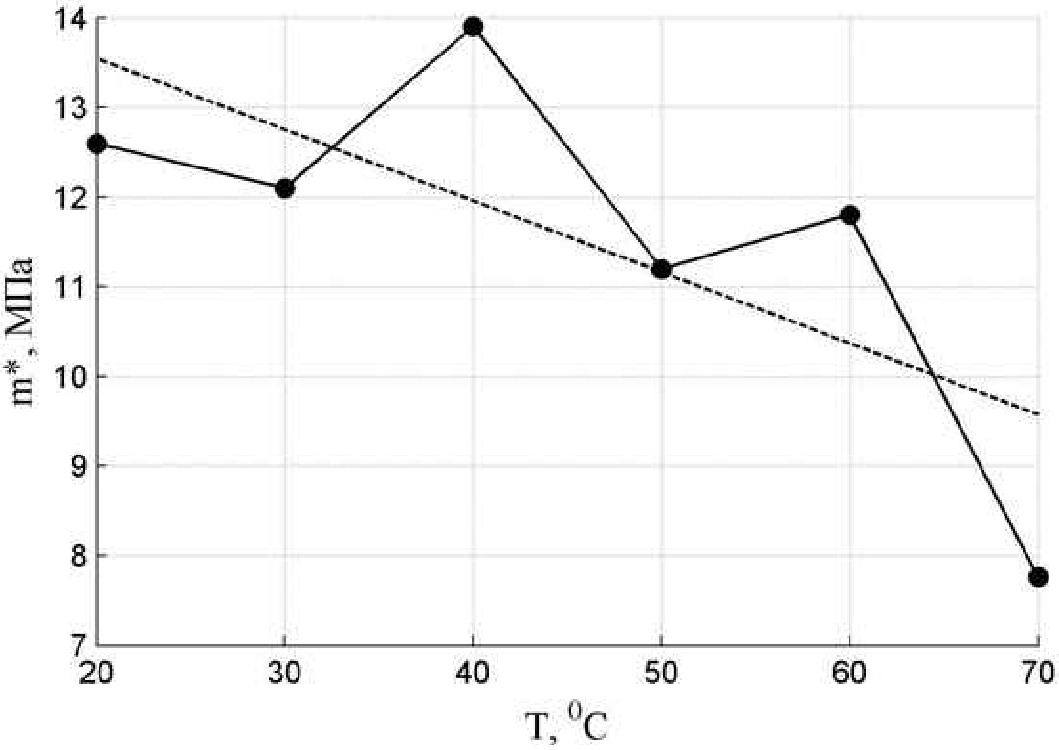


Рисунок 2.11 — Зависимость модуля скорости m^* вторичного ПВХ от температуры

Имея распределение физико-механических параметров, можно определить закон аппроксимирующих кривых. Окончательно, параметры уравнения Максвелла–Гуревича для ПВХ имеют следующие зависимости от температуры:

$$\begin{aligned} E(T) &= -0.2393T^2 + 8.3357T + 1402.6 \text{ [МПа]};\\ E_\infty(T) &= -0.0575T^3 + 11.095T^2 - 732T + 16618 \text{ [МПа]};\\ \eta_0^*(T) &= 44.78 \cdot 10^5 e^{-0.075T} \text{ [МПа} \cdot \text{мин]};\\ m^*(T) &= -0.0794T + 15.134 \text{ [МПа]}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Выражение (2.68) аппроксимирует зависимости модуля упругости от температуры с достоверностью $R^2 = 0.976$, модуля высокоэластичности — с достоверностью $R^2 = 0.9986$, коэффициента начальной релаксационной вязкости — с достоверностью $R^2 = 0.989$.

С целью оценки достоверности полученных коэффициентов решили задачу расчёта релаксации напряжения с течением времени в стержне на основе зависимостей (2.68). Подробная методика решения задачи релаксации напряжений будет рассмотрена в параграфе 7.4, на стр. 170. Сопоставление экспериментальных кривых с результатами теоретического решения задачи релаксации напряжений представлено на рисунке 2.12.Треугольные маркеры показывают значения напряжений по результатам проведения эксперимента, сплошные кривые — построены на основе уравнения Максвелла–Гуревича. Проанализировав построенные графики, видим очень хорошее совпадение экспериментальных данных с результатами решения задачи при температурах $T = 20, 30$ и $60°C$, при остальных температурных режимах совпадение весьма удовлетворительное.

2.7 Методика расчета задач с учётом ползучести материала

Все рассмотренные в диссертации задачи, в которых расчёт производится с учётом высокоэластических деформаций, решают численно одним из двух методов: конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ). Представленный далее алгоритм расчёта справедлив для обоих методов.

Задачи рассматривают несвязные, т. е. на первом этапе определяют температурное поле в полимерном теле, на втором — вычисляют упругие и реоло-

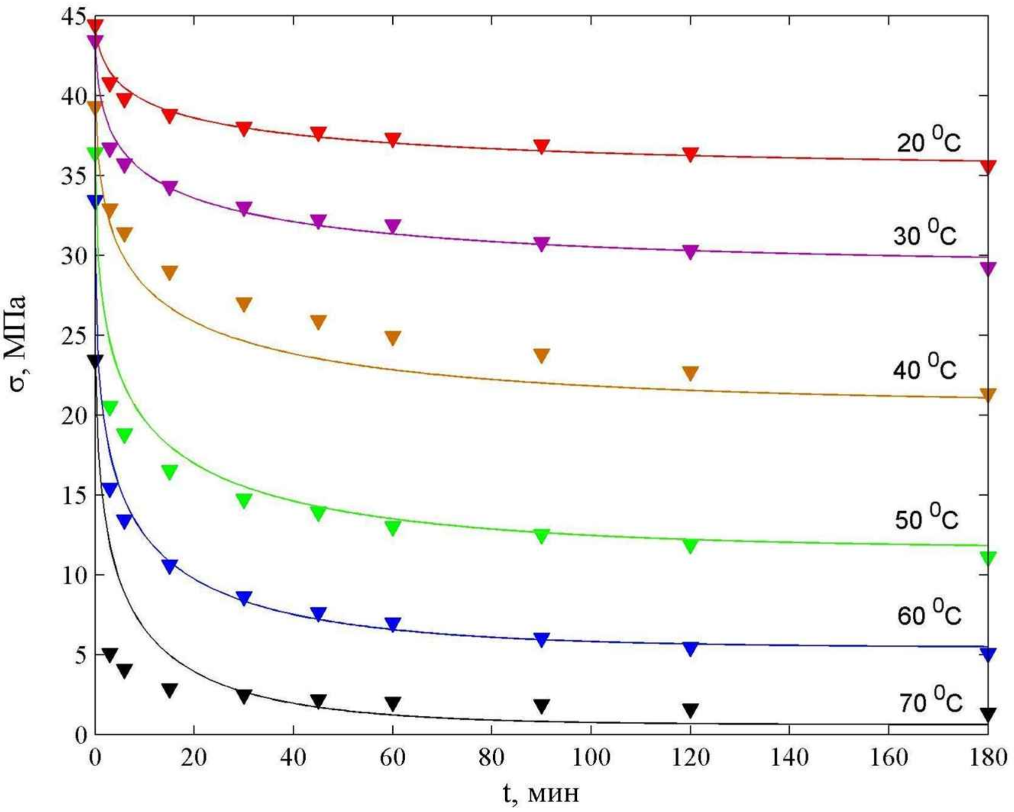


Рисунок 2.12 — Сопоставление экспериментальных кривых с результатами теоретических расчётов

гические параметры полимера в каждой точке (в случае МКР) и каждом конечном элементе (в случае МКЭ) в зависимости от распределения температурного поля. На третьем этапе определяют напряжённо-деформированное состояние в исследуемом теле.

Третий этап состоит из нескольких подэтапов. Связано это с тем, что нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича (2.56) содержит неизвестную высокоэластическую деформацию и в левой части (скорость высокоэластической деформации), и в правой части (в функции напряжений и экспоненциальной зависимости коэффициента релаксационной вязкости). Таким образом используется пошаговый метод, при котором в начальный момент времени ($t = 0$) считают, что все высокоэластические деформации отсутствуют, т. е. $\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s} = 0$. Остаётся определить напряжённо-деформированное состояние исходя только из упругой работы расчётной модели и скорость высокоэластической деформации на основе уравнения Максвелла–Гуревича (2.56). Предполагая, что временной интервал ($t = \Delta t$) достаточно мал, высокоэластическую деформацию на следующем временном интервале можно вычислить так:

$$\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t_{i+1}) = \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t)}{\partial t}(t_{i+1} - t).$$

Таким образом, используя данное уравнение можно определить на следующем временном этапе высокоэластическую деформацию, а зная её — напряжённо-деформированное состояние. Далее процесс повторяется циклично.

2.8 Выводы по главе

1. Подробно рассмотрено уравнение связи Максвелла–Гуревича, используемое во всех задачах настоящей диссертационной работы.
2. Приведены константы уравнения Максвелла–Гуревича. Показано, что данные константы на самом деле являются значительной функцией от температуры.
3. Приводится альтернативная методика определения констант уравнения Максвелла–Гуревича, позволяющая найти их по анализу только графиков релаксации напряжений. Наличие нескольких графиков релаксации напряжений при разных температурах позволяет определить зависимость этих параметров от температуры.

Глава 3. Одномерные плоские задачи термовязкоупругости для неоднородных полимерных тел

Как было сказано ранее, связь между напряжением и деформациями в полимерных телах лучше всего описывается обобщённым нелинейным уравнением Максвелла-Гуревича. Отсутствие данного уравнения в современных программных комплексах заставляет исследователей самостоятельно разрабатывать и писать программные модули по определению напряжённо-деформированного состояния. Однако, это позволяет учесть при создании новых конечных элементов множество факторов, повышающих точность расчёта. Достигается это, в том числе, и непосредственным аналитическим интегрированием аппроксимирующих функций по конечному элементу вместо их численной аппроксимации.

В работе рассматриваются одномерные и двухмерные конечные элементы, матрица жёсткости и вектор нагрузок которых получены аналитическим интегрированием аппроксимирующих функций, учитывающих многие факторы: распределение температурного поля и наличие высокоэластических деформаций.

Оптимизированные конечные элементы позволяют снизить ошибки, накапливаемые при пошаговом определении напряженно-деформированного состояния полимерных тел.

Рассматривается цилиндр (рисунок 3.1), внутренний радиус которого R_a, внешний — R_b. В случае плоского деформированного состояния (ПДС) длина цилиндра l значительно преобладает над внешним радиусом R_b: $l >> R_b$; в случае плоского напряжённого состояния (ПНС) длина цилиндра очень мала: $l \to 0$.

Исследуется цилиндрическое тело, граничные условия на внутренней и внешней поверхностях которого определяются параметрами: T_a, T_b — температура соответственно на внутренней и внешней поверхностях цилиндра; P_a, P_b — равномерно распределённое давление, приложенное соответственно к внутренней и внешней поверхностям цилиндра

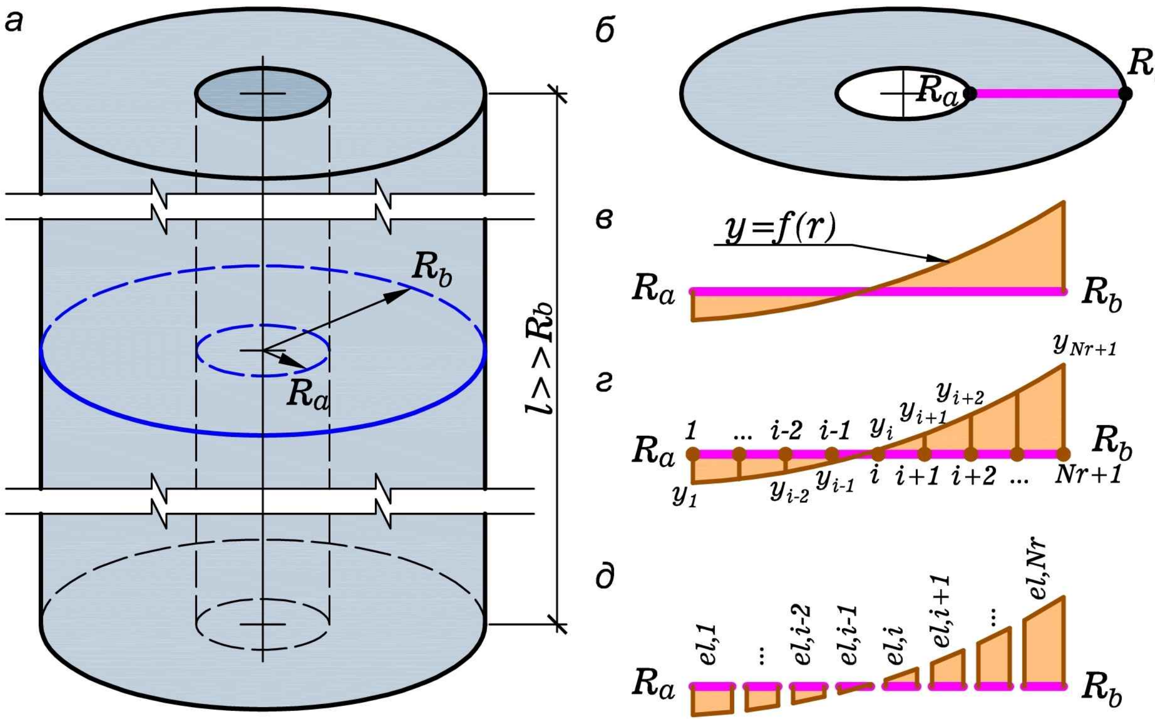


Рисунок 3.1 — Исходная схема осесимметричной задачи: *а* — исходный цилиндр; *б* — рассматриваемый участок цилиндра; *в* — непрерывная функция $y = f(x)$; *г* — аппроксимация функции конечными разностями; *д* — аппроксимация функции конечными элементами

3.1 Определение постоянного во времени температурного поля

В случае одномерной осесимметричной задачи и не изменяющегося во времени температурного поля, уравнение (1.11) (с. 21) записывается в виде однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0. \tag{3.1}$$

Аналитическое решение уравнения (3.1) может быть довольно просто получено с помощью метода замены переменной. Для этого вводим замену:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \vartheta \tag{3.2}$$

и подставляем в выражение (3.1):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta = 0.$$

Группируя слагаемые и производя их перестановку

$$\frac{\partial\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\partial r}{r},$$

интегрируя левую и правую части, получаем:

$$\ln\vartheta = -\ln r + \ln C_1 = \ln\frac{C_1}{r}.$$

Следовательно,

$$\vartheta = \frac{C_1}{r}.$$

С учётом произведённой замены в выражении (3.2), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r};$$

$$\partial T = C_1\frac{\partial r}{r};$$

$$T = C_1 \ln r + C_2.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяем, решая систему уравнений с учётом граничных условий: $T = T_a$ при $r = R_a$ и $T = T_b$ при $r = R_b$:

$$\begin{cases} T_a = C_1 \ln R_a + C_2; \\ T_b = C_1 \ln R_b + C_2. \end{cases}$$

В результате окончательное решение для одномерного температурного поля имеет вид:

$$T(r) = \frac{T_a \ln\left(\dfrac{R_b}{r}\right) + T_b \ln\left(\dfrac{r}{R_a}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_b}{R_a}\right)}. \tag{3.3}$$

3.1.1 Решение с помощью метода конечных разностей

Аппроксимации методом конечных разностей подлежит уравнение (3.1). Для этого используем алгоритм, приведённый в параграфе 1.4.3. Вводим на интервале $[R_a, R_b]$ равномерную сетку

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i-1)h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

Аппроксимация производных происходит с помощью уравнений (1.25) и (1.26):

$$\frac{T_{i+1}}{h_r^2} - \frac{2T_i}{h_r^2} + \frac{T_{i-1}}{h_r^2} + \frac{T_{i+1}}{2rh_r} - \frac{T_{i-1}}{2rh_r} = 0.$$

Полученную разностную схему можно представить в виде системы сеточных уравнений:

$$a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1} = f_i; \quad (i = 2,\, 3, \ldots,\, N);$$

$$T_1 = T_a; \quad T_{N+1} = T_b;$$

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2rh_r}; \quad b_i = -\frac{2}{h_r^2}; \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & \\ & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & & a_N & b_N & c_N \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdots \\ T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ \cdots \\ T_N \\ T_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

3.1.2 Решение с помощью метода конечных элементов

Для решения методом конечных элементов однородной задачи теплопроводности выражение (1.11) записываем так:

$$-\operatorname{div}(\varkappa \cdot \operatorname{grad} T) = 0. \tag{3.4}$$

Согласно (1.18) и (1.19) аппроксимацию температуры по радиусу конечного элемента можно записать так:

$$T = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} T_i + \frac{r - R_i}{R_j - R_i} T_j, \tag{3.5}$$

или в матричном виде

$$T = \Big[N\Big] \Big\{T\Big\}, \tag{3.6}$$

где $\Big[N\Big] = \Big[N_i \quad N_j\Big]$; $\Big\{T\Big\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}$; $N_i = \dfrac{R_j - r}{R_j - R_i}$ и $N_j = \dfrac{r - R_i}{R_j - R_i}$.

В параграфе 1.3 приводится переход к функционалу, соответствующему поставленному эллиптическому уравнению. Тогда функционал уравнения (3.4) записывается:

$$\operatorname{Im}(T) = \int\limits_V \left[\varkappa \,(\operatorname{grad} T)^2\right] dV = \int\limits_V \left[\varkappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2\right] dV. \tag{3.7}$$

Рассмотрим конечный элемент, приведённый на рисунке 3.2. Его объём будет равен произведению высоты элемента h_z на площадь его основания $A_{\text{основ}}$, которая в свою очередь равна произведению ширины элемента dr на длину дуги, проходящей через центр тяжести основания, т. е.

$$dV \approx A_{\text{основ}} h_z = \theta r h_z dr = \theta r h_z dr,$$

где для линейного конечного элемента в случае плоской осесимметричной задачи $h_z = 1$; $\theta = 1$; $dr = R_j - R_i$. Тогда объём элемента можно записать как:

$$dV \approx r\, dr. \tag{3.8}$$

С учётом выражения (3.8) для объёма конечного элемента и постоянства коэффициента $\varkappa$ по всем координатам, функционал (3.7) записывается в виде:

$$\operatorname{Im}(T) = \varkappa \int\limits_{R_i}^{R_j} r \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 dr. \tag{3.9}$$

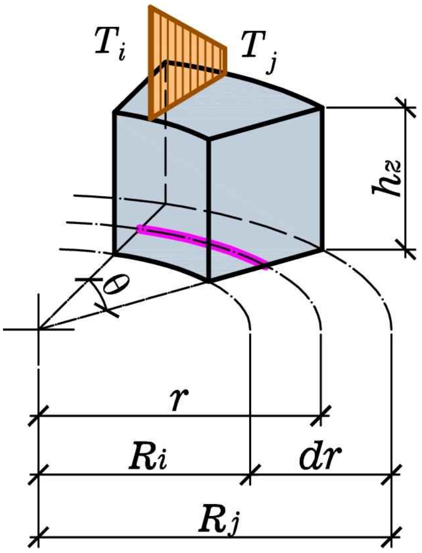


Рисунок 3.2 — Конечный цилиндрический элемент в осесимметричной постановке

Далее, функционал минимизируется по температуре в узлах, т. е. $\partial \operatorname{Im} / \partial T$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \operatorname{Im}}{\partial T_i} = \dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_i - \dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_j = 0; \\ \dfrac{\partial \operatorname{Im}}{\partial T_j} = -\dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_i + \dfrac{R_j + R_i}{R_j - R_i} T_j = 0. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} & -\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} \\ -\frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} & \frac{R_j+R_i}{R_j-R_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

представляя через коэффициенты:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i^{(e)} \\ T_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

или в короткой форме:

$$\left[k^{(e)}\right] \left\{T^{(e)}\right\} = \left\{f^{(e)}\right\},$$

где $\left[k^{(e)}\right]$ — матрица теплопроводности (жёсткости) конечного элемента; $\left\{f^{(e)}\right\}$ — вектор нагрузок.

Глобальные матрица теплопроводности и вектор нагрузки

$$\Big[K\Big]\Big\{T\Big\} = \Big\{F\Big\}$$

определяются соотношениями

$$\Big[K\Big] = \sum_{e=1}^{E}\Big[k^{(e)}\Big]; \qquad \Big\{F\Big\} = \sum_{e=1}^{E}\Big\{f^{(e)}\Big\}.$$

Итоговая матрица с учётом граничных условий принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ & k_{21}^{(e-1)} & k_{22}^{(e-1)} + k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & & \\ & & k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} + k_{11}^{(e+1)} & k_{12}^{(e+1)} & \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ \dots \\ T_i^{(e)} \\ T_j^{(e)} \\ \dots \\ T_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ \dots \\ f_2^{(e-1)} + f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} + f_1^{(e+1)} \\ \dots \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

Здесь $T_j^{(e-1)} = T_i^{(e)}$ и $T_j^{(e)} = T_i^{(e+1)}$.

3.1.3 Сравнение результатов, полученных различными методами

Для сравнения результатов, полученных аналитическими и численными методами, рассмотрим задачу распределения температурного поля в цилиндре (см. рисунок 3.1, с. 71) при следующих исходных данных: $R_a = 0.008\,\text{м}$; $R_b = 0.028\,\text{м}$; $T_a = 100\,°C$; $T_b = 28\,°C$. Цилиндр по толщине «разбивался» на интервалы, в случае конечных разностей, количеством N штук; при методе конечных элементов количество элементов равнялось количеству интервалов в методе конечных разностей, а длина элемента — длине интервала.

Код программы приведён в приложении B.3. Результат решения задачи при $N = 2$ представлен на рисунке 3.3. Результаты решения задачи при различных N приведены в таблице 3.1. Решения с помощью метода конечных разностей и метода конечных элементов полностью совпали между собой, что говорит о достоверности результатов. Из таблицы 3.1 видно, что количества интервалов при $N = 100$ более чем достаточно для получения точного решения.

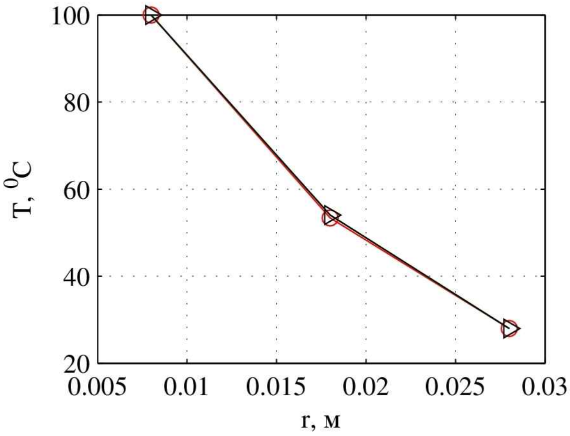


Рисунок 3.3 — Распределение температурного поля в цилиндре при двух интервалах по радиусу ($N = 2$): ○ — аналитическое и △ — численное решения

Таблица 3.1 — Сравнение результатов определения температуры при различном количестве интервалов N в точке $r = 0.018$ м аналитическим решением (АР), методом конечных разностей (МКР) и методом конечных элементов (МКЭ)

N, **шт.**	**2**	**4**	**10**	**40**	**100**	**400**	**1000**
АР T, $°C$	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934	53.3934
МКР T, $°C$	54.0000	53.5730	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ T, $°C$	54.0000	53.5730	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
δ, %	1.136	0.336	0.057	0.004	≈ 0	≈ 0	≈ 0

3.2 Определение переменного во времени температурного поля

В случае одномерной осесимметричной задачи и изменяющегося во времени температурного поля, уравнение (1.11) (с. 21) записывается в виде неоднородного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3.10}$$

Аналитическое решение уравнения (3.10) можно получить со значительными трудозатратами, поэтому решим его в дальнейшем с помощью численных методов: метода конечных разностей и метода конечных элементов. Трудности могут возникать при формировании произвольных граничных условий, описывающих теплообмен.

Общим для этих методов будет то, что для аппроксимации по времени вводится равномерная сетка

$$\omega_t = \left\{ t_\varrho = (\varrho - 1)h_t; \quad h_t = \frac{t_{max}}{N_t}; \quad \varrho = 1, 2, \dots, N_t + 1 \right\},$$

где t_{max} — предел времени, до которого продолжается расчёт; N_t — количество интервалов, на которые «разбивается» исследуемый участок времени.

В таком случае, согласно выражению для левых разностей (1.23), дифференциал температуры по времени

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_\varrho - T_{\varrho-1}}{h_t}.$$

Решение происходит поэтапно. В начале решается задача распределения температуры в точке времени $\varrho = 1$. При этом правая часть системы уравнений равна нулю: $f_{1,i} = 0$. Затем — задача в точке времени $\varrho = 2$, при этом температура в предыдущей точке времени $T_{\varrho=1}$ является известной величиной, а в текущей точке времени $T_{\varrho=1}$ — неизвестной. Процесс продолжается на всех временных точках, вплоть до $\varrho = N_t + 1$.

3.2.1 Решение с помощью метода конечных разностей

Для аппроксимации по толщине цилиндра вводим на интервале $[R_a, R_b]$ равномерную сетку:

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i - 1)h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N \quad {}_r}; \quad = 1, 2, \dots, N_r + 1 \right\}.$$

Так как процесс происходит во времени, то значения функции описываются двумя коэффициентами (ϱ, i).

Аппроксимация производных происходит с помощью уравнений (1.25) и (1.26):

$$\frac{T_{\varrho,\,i+1}}{h_r^2} - \frac{2T_{\varrho,\,i}}{h_r^2} + \frac{T_{\varrho,\,i-1}}{h_r^2} + \frac{T_{\varrho,\,i+1}}{2rh_r} - \frac{T_{\varrho,\,i-1}}{2rh_r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_{\varrho,\,i} - T_{\varrho-1,\,i}}{h_t}.$$

Полученную разностную схему можно представить в виде системы сеточных уравнений:

$$a_i T_{\varrho,\,i-1} + b_i T_{\varrho,\,i} + c_i T_{\varrho,\,i+1} = f_{\varrho,\,i}; \quad (i = 2,\,3,\ldots,\,N_r; \quad \varrho = 1,\,2,\ldots,N_t+1);$$

$$T_{\varrho,\,1} = T_{\varrho,\,a}; \quad T_{\varrho,\,N+1} = T_{\varrho,\,b};$$

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2rh_r}; \quad b_i = \left(-\frac{2}{h_r^2} - \frac{1}{\varkappa\cdot h_t}\right); \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}; \quad f_{\varrho,\,i} = -\frac{T_{\varrho-1,i}}{\varkappa\cdot h_t}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & & \\ & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & & \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & & a_{N_r} & b_{N_r} & c_{N_r} & \\ & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{\varrho,\,1} \\ T_{\varrho,\,2} \\ \cdots \\ T_{\varrho,\,i-1} \\ T_{\varrho,\,i} \\ T_{\varrho,\,i+1} \\ \cdots \\ T_{\varrho,\,N_r} \\ T_{\varrho,\,N_r+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ f_{\varrho,\,2} \\ \cdots \\ f_{\varrho,\,i-1} \\ f_{\varrho,\,i} \\ f_{\varrho,\,i+1} \\ \cdots \\ f_{\varrho,\,N_r} \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

3.2.2 Решение с помощью метода конечных элементов

Можно выделить два подхода к решению задачи методом конечных элементов. В первом — производят аппроксимацию производной температуры по времени до составления выражения функционала и выделяют неизвестную (в текущем моменте времени) и известную части (в предыдущем моменте времени). Во втором — производную температуры по времени представляют в качестве функции, а аппроксимацию по времени производят после составления выражения функционала.

3.2.2.1 Аппроксимацию производной температуры по времени до составления выражения функционала

С учётом аппроксимации производной температуры по времени, уравнение теплопроводности Фурье записываем в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_\varrho - T_{\varrho-1}}{h_t}.$$

Перенесём искомую величину T_ϱ влево, известную величину $T_{\varrho-1}$ оставим в правой части:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{1}{h_t}T_\varrho = -\frac{1}{h_t}T_{\varrho-1}.$$

Преобразуем данное выражение к дивергентному виду:

$$-\operatorname{div}\left[\varkappa \operatorname{grad} T\right] + \frac{1}{h_t}T_\varrho = f, \tag{3.11}$$

где $f = \dfrac{1}{h_t}T_{\varrho-1}$.

Согласно (1.18) и (1.19) аппроксимация температуры по радиусу конечного элемента записывается:

$$T_\varrho = \frac{R_j - r}{R_j - R_i}T_{\varrho,\,i} + \frac{r - R_i}{R_j - R_i}T_{\varrho,\,j}; \quad T_{\varrho-1} = \frac{R_j - r}{R_j - R_i}T_{\varrho-1,\,i} + \frac{r - R_i}{R_j - R_i}T_{\varrho-1,\,j}$$

или в матричном виде

$$T_\varrho = \Big[N\Big]\Big\{T_\varrho\Big\}; \quad T_{\varrho-1} = \Big[N\Big]\Big\{T_{\varrho-1}\Big\},$$

где $\Big[N\Big] = \Big[N_i \;\; N_j\Big]$; $\Big\{T_\varrho\Big\} = \begin{Bmatrix} T_{\varrho,\,i} \\ T_{\varrho,\,j}\end{Bmatrix}$; $\Big\{T_{\varrho-1}\Big\} = \begin{Bmatrix} T_{\varrho-1,\,i} \\ T_{\varrho-1,\,j}\end{Bmatrix}$; $N_i = \dfrac{R_j - r}{R_j - R_i}$ и $N_j = \dfrac{r - R_i}{R_j - R_i}$.

В параграфе 1.3 приводится переход к функционалу, соответствующему поставленному эллиптическому уравнению. Тогда функционал уравнения (3.11):

$$\operatorname{Im}(T_\varrho) = \int\limits_V \left[\varkappa (\operatorname{grad} T_\varrho)^2 + \frac{T_\varrho^2}{h_t} \right] dV - 2 \int\limits_V \frac{1}{h_t} T_{\varrho-1} T_\varrho \, dV =$$

$$= \int\limits_V \left[\varkappa (\operatorname{grad} T_\varrho)^2 + \frac{T_\varrho^2}{h_t} - 2 \frac{T_{\varrho-1} T_\varrho}{h_t} \right] dV. \quad (3.12)$$

Объём элемента определяется выражением (3.8). Тогда функционал (3.12):

$$\operatorname{Im}(T_\varrho) = \int\limits_{R_i}^{R_j} r \left[\varkappa \left(\frac{\partial T_\varrho}{\partial r} \right)^2 + \frac{T_\varrho^2}{h_t} - 2 \frac{T_{\varrho-1} T_\varrho}{h_t} \right] dr. \quad (3.13)$$

Далее, функционал минимизируется по температуре в узлах, т. е. $\partial \operatorname{Im} / \partial T_\varrho$ и, для дальнейшего удобства работы, умножается на ϑ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \operatorname{Im}}{\partial T_{\varrho,\,i}} = 0; \\ \dfrac{\partial \operatorname{Im}}{\partial T_{\varrho,\,j}} = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$\left[k^{(e)} \right] \left\{ T^{(e)} \right\} = \left\{ f^{(e)} \right\}, \quad (3.14)$$

где $\left[k^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}$; $\left\{ T^{(e)} \right\} = \begin{Bmatrix} T_{\varrho,\,i}^{(e)} \\ T_{\varrho,\,j}^{(e)} \end{Bmatrix}$; $\left\{ f^{(e)} \right\} \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$.

Коэффициенты системы уравнений (3.14) имеют вид:

$$\begin{aligned} k_{11}^{(e)} &= \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{6h_t} + \varkappa \frac{R_j + R_i}{R_j - R_i}; \\ k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} &= \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t} - \varkappa \frac{R_j + R_i}{R_j - R_i}; \\ k_{22}^{(e)} &= \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{6h_t} + \varkappa \frac{R_j + R_i}{R_j - R_i}; \\ f_1^{(e)} &= \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{6h_t} T_{\varrho-1,\,i} + \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t} T_{\varrho-1,\,j}; \\ f_2^{(e)} &= \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t} T_{\varrho-1,\,i} + \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{6h_t} T_{\varrho-1,\,j}; \end{aligned}$$

3.2.2.2 Аппроксимация производной температуры по времени после составления выражения функционала

С учётом аппроксимации производной температуры по времени уравнение теплопроводности Фурье

$$\varkappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

В дивергентном виде данное выражение может мыть представлено как:

$$-\operatorname{div}\left[\varkappa \operatorname{grad} T\right] = f, \tag{3.15}$$

где $f = -\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Аппроксимация температуры по радиусу записывается так же, как и в предыдущем параграфе. Тогда функционал уравнения (3.15)

$$\operatorname{Im}(T_\varrho) = \int\limits_V \left[\varkappa\,(\operatorname{grad} T_\varrho)^2\right]\,dV - 2\int\limits_V f T_\varrho\, dV =$$

$$= \int\limits_V \left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\varrho}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{\partial T_\varrho}{\partial t}T_\varrho\right]\,dV =$$

$$= \int\limits_V \left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\varrho}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{T_\varrho^2}{h_t} - 2\frac{T_\varrho T_{\varrho-1}}{h_t}\right]\,dV. \quad (3.16)$$

Объём элемента определяется выражением (3.8). Тогда функционал (3.16) получим в виде

$$\operatorname{Im}(T_\varrho) = \int\limits_{R_i}^{R_j} r\left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\varrho}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{T_\varrho^2}{h_t} - 2\frac{T_{\varrho-1}T_\varrho}{h_t}\right]\,dr. \quad (3.17)$$

Далее порядок действий аналогичен предыдущему параграфу. Коэффициенты системы уравнений в этом случае имеют вид:

$$k_{11}^{(e)} = \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{3h_t} + \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i};$$

$$k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = \frac{R_j^2 - R_i^2}{3h_t} - \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i};$$

$$k_{22}^{(e)} = \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{3h_t} + \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i};$$

$$f_1^{(e)} = \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{6h_t}T_{\varrho-1,\,i} + \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t}T_{\varrho-1,\,j};$$

$$f_2^{(e)} = \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t}T_{\varrho-1,\,i} + \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{6h_t}T_{\varrho-1,\,j};$$

3.2.3 Сравнение результатов, полученных различными методами

Для сравнения результатов, полученных аналитическими и численными методами, рассмотрим задачу распределения температурного поля в цилиндре (см. рисунок 3.1, с. 71) при следующих исходных данных: $R_a = 0.008$ м; $R_b = 0.028$ м; $T_a = T_b = 28\,^\circ C$. Цилиндр по толщине «разбивался» на интервалы, в случае конечных разностей, количеством N_r штук; при методе конечных элементов количество элементов равнялось количеству интервалов в методе конечных разностей, а длина элемента — длине интервала. Далее температура на внутреннем торце росла до $T_a = 100\,^\circ C$ в течение 1.2 ч. Процесс исследовали до времени 3.6 ч. Количество временных интервалов определяется переменной N_t.

Решение методом конечных элементов проводили по двум методикам: МКЭ1 — методике, приведённой в параграфе 3.2.2.1; МКЭ2 — методике, приведённой в параграфе 3.2.2.2.

Код программы приведён в приложении В.4, результаты решения задачи при различных N_r и N_t — в таблице 3.2, а также на рисунке 3.4 при $N_t = 20$ и $N_r = 20$.

Таблица 3.2 — Сравнение результатов определения температуры при различном количестве интервалов N_r в точке $r = 0.018$ м методом конечных разностей (МКР), методом конечных элементов с предварительной аппроксимацией температуры по времени (МКЭ1) и последующей (МКЭ2) неоднородной задачи в конце заданного интервала времени

N_r, шт.	**10**	**40**	**100**	**400**	**1000**
$N_t = 10$					
МКР T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
$N_t = 100$					
МКР T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, $^\circ C$	53.4239	53.3952	53.3936	53.3933	53.3932
$N_t = 1000$					
МКР T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, $^\circ C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, $^\circ C$	53.4222	53.3934	53.3918	53.3915	53.3915

Поскольку система уравнений метода конечных разностей имеет второй порядок точности, она выступает эталоном. Анализируя полученные данные делаем вывод, что верной является методика, при которой производная температуры по времени аппроксимируется до составления функционала (решение

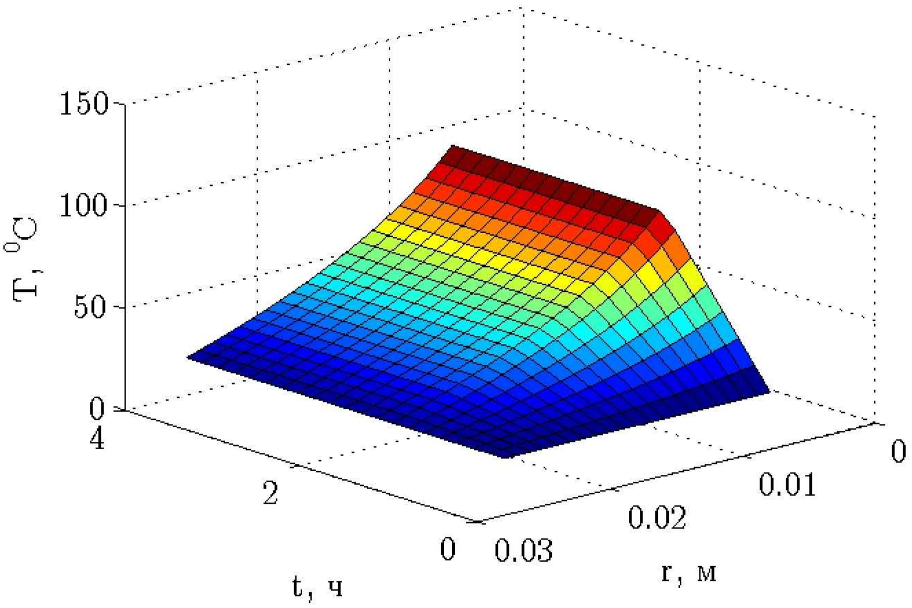


Рисунок 3.4 — Распределение температурного поля в течение 3.6 часов в толще цилиндра при росте температуры от 28 до 100 °C в течение 1.2 часа; $N_t = 20$, $N_r = 20$

МКЭ1), т. к. решения МКР и МКЭ1 совпали полностью, а по методике МКЭ2 расхождение увеличилось при росте количества интервалов по времени N_t.

3.3 Определение напряжённо-деформированного состояния неоднородного цилиндра с учётом температурного нагружения и деформациями ползучести

При решении плоских задач исследуют следующие виды напряжённо–деформированного состояния:

— Плоское деформированное состояние (ПДС). Предполагается, что осевые деформации вдоль оси z равны нулю, а напряжения вдоль этих осей имеют некоторое значение σ_z: $\varepsilon_z = 0$; $\sigma_z \neq 0$. Считается, что имеет место ПДС, если длина цилиндра значительно превышает его внешний радиус ($l \gg r$);

— Плоское напряжённое состояние (ПНС). Предполагается, что осевые напряжения на торцах σ_z равны нулю за счёт наличия осевых деформаций вдоль оси z: $\varepsilon_z \neq 0$; $\sigma_z = 0$. Считается, что имеет место ПНС, если длина цилиндра значительно меньше его внешнего радиуса ($l \ll r$).

Практическим примером ПДС являются трубы различного назначения; ПНС в чистом виде встречается весьма редко и с практической точки зрения исследование ПНС оправдано при экспериментальных работах и изучении срезов цилиндрических тел [6, 7, 53, 97, 102, 108]. Таким образом, дальнейшие выкладки приводятся для ПДС.

Рассмотрим плоское деформированное состояние полого многослойного цилиндра. Материал каждого слоя обладает различными физико-механическими свойствами, которые являются непрерывной функцией от температуры, а следовательно, от координат r_j слоя: $E_j\left(T_j\left(r\right)\right) = E\left(r\right)$.

3.3.1 Решение в напряжениях с помощью метода конечных разностей

Для вывода основных разрешающих уравнений метода конечных элементов используют выражения из уравнений (1.1) и (1.3), с учётом, что для ПДС в осесимметричной постановке $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = 0$:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0. \tag{3.19}$$

Рассмотрим первые три выражения закона Гука в прямой форме (1.4):

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,r}; \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,\theta}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_r\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,z} = 0 \quad \text{— в случае ПДС.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Из последнего выражения (3.20) получаем выражение для σ_z:

$$\sigma_z = -E\left(\varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,z}\right) + \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right),$$

которое подставляем в первые два выражения (3.20):

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu^2\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right) + \nu E\left(\varepsilon_T+\varepsilon_{cr,\,z}\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,r};\\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu^2\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right) + \nu E\left(\varepsilon_T+\varepsilon_{cr,\,z}\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,\theta}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Далее из уравнения (3.18) выражается окружное напряжение σ_θ:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}$$

и подставляется в уравнения (3.21):

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_r\left(1-2\nu\right) - r\nu\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\right] + \varepsilon_T\left(1+\nu\right) + \varepsilon_{cr,\,r} + \nu\varepsilon_{cr,\,z};\\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_r\left(1-2\nu\right) + r\left(1-\nu\right)\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\right] + \varepsilon_T\left(1+\nu\right) + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \nu\varepsilon_{cr,\,z}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Выражение для ε_θ дифференцируется по радиусу r:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{E}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} - \frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{E^2}\frac{\partial E}{\partial r}\sigma_r +\\ + \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1-\nu^2}{E}r\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial r^2} - r\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E^2}\frac{\partial E}{\partial r}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} +\\ + \frac{\partial\varepsilon_T}{\partial r}\left(1+\nu\right) + \frac{\partial\varepsilon_{cr,\,\theta}}{\partial r} + \nu\frac{\partial\varepsilon_{cr,\,z}}{\partial r}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Далее, выражения (3.22) и (3.23) подставляем в выражение (3.19) и, проводя ряд упрощений, окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial r^2} + \varphi(r)\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \psi(r)\sigma_r = f(r), \tag{3.24}$$

где

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r};$$

$$\psi(r) = -\frac{1}{r}\frac{1-2\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r};$$

$$f(r) = -\frac{E\partial\left(\alpha\Delta T\right)}{\partial r}\frac{1}{r\left(1-\nu\right)} - \frac{1}{r}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{cr,\,\theta}}{\partial r} + \nu\frac{\partial\varepsilon_{cr,\,z}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{cr,\,\theta}-\varepsilon_{cr,\,r}}{r}\right).$$

Аппроксимации методом конечных разностей подлежит уравнение (3.24). Для аппроксимации используется алгоритм, приведённый в параграфе 1.4.3. Вводим на интервале $[R_a, R_b]$ равномерную сетку

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i-1) \cdot h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

Аппроксимация производных происходит с помощью уравнений (1.25) и (1.26):

$$\sigma''_{ri} + p_i \sigma'_{ri} + q_i \sigma_{ri} = f_i, \tag{3.25}$$

где двумя штрихами «$''$» представлена вторая производная по радиусу r;

$$p_i = \frac{3}{r_i} - \frac{1}{E_i}\frac{\partial E_i}{\partial r};$$

$$q_i = -\frac{1}{r_i} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{E_i}\frac{\partial E_i}{\partial r};$$

$$f_i = -\frac{E_i \partial\left(\alpha \Delta T_i\right)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r_i\left(1-\nu\right)} - \\ - \frac{1}{r_i} \cdot \frac{E_i}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{cr,\,\theta i}}{\partial r} + \nu \frac{\partial \varepsilon_{cr,\,zi}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{cr,\,\theta i} - \varepsilon_{cr,\,ri}}{r_i}\right). \tag{3.26}$$

Аппроксимация производных на сеточном шаблоне происходила с применением формул (1.25) и (1.26):

$$\sigma''_i = \frac{\sigma_{ri-1} - 2\sigma_{ri} + \sigma_{ri+1}}{h_r^2}; \qquad \sigma'_r = \frac{\sigma_{ri+1} - \sigma_{ri-1}}{2h_r}.$$

Тогда выражение (3.25) принимает вид:

$$a_i \sigma_{ri-1} + b_i \sigma_{ri} + c_i \sigma_{ri+1} = f_i, \tag{3.27}$$

где

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{p_i}{2h_r}; \quad b_i = q_i - \frac{2}{h_r^2}; \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{p_i}{2h_r}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & & & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & & & \\ & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & & & & & a_N & b_N & c_N & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{r1} \\ \sigma_{r2} \\ \dots \\ \sigma_{ri-1} \\ \sigma_{ri} \\ \sigma_{ri+1} \\ \dots \\ \sigma_{rN} \\ \sigma_{rN-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_a \\ f_2 \\ \dots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \dots \\ f_N \\ -P_b \end{Bmatrix}.$$

Здесь уже заложены граничные условия: $\sigma_{r1} = -P_a$; $\sigma_{r(N+1)} = -P_a$.

Как видно из приведённых выкладок, нигде не учитывается, используется теория по которой полная деформация ползучести (ε_{cr}) равна нулю, или нет.

Если считать нагружение мгновенным [53], то в момент времени $t = 0$ будут справедливы начальные условия: $\varepsilon^*_{r,0} = \varepsilon^*_{\theta,0} = 0$. Таким образом, на нулевом этапе приходим к упругой задаче.

3.3.2 Решение в перемещениях с помощью метода конечных элементов

3.3.2.1 Физические соотношения плоской задачи

При решении плоской задачи, из шести компонент деформаций остаётся три: ε_r, ε_θ и ε_z. При этом, как говорилось ранее, в случае ПДС полная осевая деформация равна нулю:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,z},$$

откуда

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) - E\left(\varepsilon_T + \varepsilon_{cr,\,z}\right). \tag{3.28}$$

Подставим выражение (3.28) в оставшиеся выражения закона Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(1-\nu^2\right)\sigma_r - \frac{1}{E}\left(\nu+\nu^2\right)\sigma_\theta + \varepsilon_T\left(1+\nu\right) + \varepsilon_{cr,\,z} + \nu\varepsilon_{cr,\,z};$$
$$\varepsilon_\theta = -\frac{1}{E}\left(\nu+\nu^2\right)\sigma_r + \frac{1}{E}\left(1-\nu^2\right)\sigma_\theta + \varepsilon_T\left(1+\nu\right) + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \nu\varepsilon_{cr,\,z},$$

которые, для дальнейшей работы, выгодно записать в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1-\nu^2 & -\nu\left(1+\nu\right)\\ -\nu\left(1+\nu\right) & 1-\nu^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} + \\ + \left(1+\nu\right)\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\varepsilon_T + \begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,r}+\nu\varepsilon_{cr,\,z}\\ \varepsilon_{cr,\,\theta}+\nu\varepsilon_{cr,\,z}\end{Bmatrix}.$$

Выразим из данной формулы вектор напряжений:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1-\nu^2 & -\nu\left(1+\nu\right)\\ -\nu\left(1+\nu\right) & 1-\nu^2\end{bmatrix}\right)^{-1}\times \\ \times\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} - \left(1+\nu\right)\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\varepsilon_T - \begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,r}+\nu\varepsilon_{cr,\,z}\\ \varepsilon_{cr,\,\theta}+\nu\varepsilon_{cr,\,z}\end{Bmatrix}\right).$$

Проведя операцию обращения матрицы, окончательно получим выражение для напряжений:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu\\ \nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\varepsilon_T - \\ - \begin{Bmatrix}\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,r} - \begin{Bmatrix}\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,\theta} - \\ - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,z}. \quad (3.29)$$

Введём замену

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

тогда выражение (3.29) запишется

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \begin{Bmatrix} \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} - \\ - \begin{Bmatrix} \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,\theta} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,z}. \tag{3.31}$$

Далее выражение (3.31) приводим к виду:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \Big(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\} \Big).$$

Дальнейшие выкладки зависят от теории, описывающий деформации ползучести:

1. Если полная деформация ползучести не равна нулю, т. е.

   $$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,z} \neq 0,$$

   выражение (3.31) принимает вид:

   $$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \\ - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} \\ \varepsilon_{cr,\,\theta} \\ \varepsilon_{cr,\,z} \end{Bmatrix},$$

окончательно

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = [D]\left(\underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} - \underbrace{(1+\nu)\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} - \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \nu\\ 0 & 1 & \nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,r}\\ \varepsilon_{cr,\,\theta}\\ \varepsilon_{cr,\,z}\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}}\right). \qquad (3.32)$$

2. Если полная деформация ползучести равна нулю, т. е.

$$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,z} = 0,$$

выражение (3.31) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = [D]\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T - \frac{E}{1+\nu}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,r}\\ \varepsilon_{cr,\,\theta}\end{Bmatrix},$$

окончательно

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = [D]\cdot\left(\underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} - \underbrace{(1+\nu)\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} - \underbrace{\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu\\ -\nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{cr,\,r}\\ \varepsilon_{cr,\,\theta}\end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}}\right). \qquad (3.33)$$

3.3.2.2 Полная энергия системы

Согласно (1.6), полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела *П* и работой внешних сил *A*:

$$Э = П - A,$$

где в случае ПДС энергия упругой деформации тела записывается как:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V (\sigma_r\varepsilon_{el,\,r} + \sigma_\theta\varepsilon_{el,\,\theta})\,dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big\{\sigma\Big\}^T\cdot\Big\{\varepsilon_{el}\Big\}\,dV, \qquad (3.34)$$

где $\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\right)$; $\{\varepsilon_{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}$.

Полная деформация $\{\varepsilon\}$ определяется через выражения Коши (1.1):

$$\left\{\varepsilon\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ u/r \end{matrix}\right\}.$$

Аппроксимация перемещений u по элементу описывается выражением (1.19):

$$u = \left\{N\right\}\left\{U\right\} = \left\{N_i \;\; N_J\right\}\left\{\begin{matrix} u_i \\ u_j \end{matrix}\right\} = \frac{R_j - r}{R_j - R_i}u_i + \frac{r - R_i}{R_j - R_i}u_j.$$

Тогда полная деформация будет описываться выражением:

$$\left\{\varepsilon\right\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_j - R_i} & \dfrac{1}{R_j - R_i} \\ N_i/r & N_j/r \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} u_i \\ u_j \end{matrix}\right\} = \left[B\right]\left\{U\right\}. \qquad (3.35)$$

В выражении (3.34) вектор напряжений подлежит операции транспонирования, значит, к дальнейшим операциям необходимо применить свойство матриц при транспонировании:

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T.$$

Так, вектор напряжений (в зависимости от выбранной теории, описывающей деформации (3.32) или (3.33)), примет вид:

$$\{\sigma\}^T = \Big[[D]\big(\{B\}\{U\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\big)\Big]^T = \\ = \left(\{U\}^T\{B\}^T - \{\varepsilon_T\}^T - \{\varepsilon_{cr}\}^T\right)[D]. \quad (3.36)$$

После подстановки выражений для вектора напряжений (3.36) и вектора деформаций (3.35) в (3.34), выражение для энергии упругой деформации примет вид:

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\{U\}^T\{B\}^T[D] - \{\varepsilon_T\}^T[D] - \{\varepsilon_{cr}\}^T[D]\Big)\times \\
\times\Big([B]\{U\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\Big)\, dV = \\
= \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\{U\}^T[B]^T[D][B]\{U\} - \{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_T\} - \{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\} - \\
- \{\varepsilon_T\}^T[D][B]\{U\} + \{\varepsilon_T\}^T[D]\{\varepsilon_T\} + \{\varepsilon_T\}^T[D]\{\varepsilon_{cr}\} - \\
- \{\varepsilon_{cr}\}^T[D][B]\{U\} + \{\varepsilon_{cr}\}^T[D]\{\varepsilon_T\} + \{\varepsilon_{cr}\}^T[D]\{\varepsilon_{cr}\}\Big)\, dV. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

3.3.2.3 Получение матрицы жёсткости и вектора нагрузок КЭ

Согласно вариационному принципу Лагранжа, из всех кинематически возможных напряженно-деформированных состояний твердого деформируемого тела для действительного деформированного состояния полная энергия деформаций достигает минимального значения. Таким образом, следующим действием необходимо найти минимум энергии по перемещениям, т. е.

$$\frac{\partial Э}{\partial\{U\}} = 0.$$

В последующей процедуре минимизации используют правила дифференцирования (A.6) и (A.7).

При решении плоской задачи внешнюю нагрузку применяют для задания граничных условий, поэтому при минимизации энергии фактически дифференцирование происходит только по потенциальной энергии упругой деформации:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi}{\partial\{U\}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(2[B]^T[D][B]\{U\} - [B]^T[D]\{\varepsilon_T\} - [B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\} - \\
- [B]^T[D]\{\varepsilon_T\} - [B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\}\Big)\, dV = \\
= \int\limits_V \Big([B]^T[D][B]\{U\} - [B]^T[D]\{\varepsilon_T\} - [B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\}\Big)\, dV. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Объём конечного элемента приводится в выражении (3.8):

$$dV \approx r\,dr \approx r\left(R_j - R_i\right),$$

где r = расстояние до центра тяжести сечения конечного элемента, в случае плоской задачи допускается принимать

$$r \approx \frac{R_j + R_i}{2}. \tag{3.39}$$

В дальнейшем выражение (3.38) с учётом (3.8) приводим к виду:

$$[K]\cdot\{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ — глобальная матрица жёсткости; $\{U\}$ — глобальный вектор нагрузки, которые определяют соотношениями

$$[K] = \sum_{e=1}^{E}[k^{(e)}]; \qquad \{F\} = \sum_{e=1}^{E}\{f^{(e)}\}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\left[k^{(e)}\right] &= [B]^T[D][B]\{U\}r\left(R_j - R_i\right);\\ \{f^{(e)}\} &= \left([B]^T[D]\{\varepsilon_T\} + [B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\}\right)r(R_j - R_i),\end{aligned}$$

где $\{\varepsilon_T\}$ и $\{\varepsilon_{cr}\}$ определяются согласно принятым теориям ползучести в выражениях (3.32) и (3.33).

3.3.2.4 Граничные условия задачи

Граничные условия для ПДС имеют вид:

$$\sigma_r\left(r_a\right) = -P_a; \qquad \sigma_r\left(r_b\right) = -P_b,$$

где P_a и P_b — соответственно давление на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

Однако решение задачи происходит с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Тогда для сопоставления давления на поверхностях цилиндра в перемещениях соответствующих узлов можно воспользоваться первым выражением закона Гука в обратной форме (1.5):

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_r - 3K\varepsilon_T - 2\mu\varepsilon_{cr,\,r} - \lambda\theta_{cr},$$

где

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$
$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)};$$
$$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,z}.$$

После математических преобразований и упрощений получаем:

$$\varepsilon_r(1-\nu) + \nu\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_r}{E}(1+\nu)(1-2\nu) + (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\varepsilon_{cr,\,r} + \nu\theta_{cr}. \quad (3.40)$$

Деформации ε_r и ε_θ аппроксимируются по конечному элементу с помощью выражения (3.35). Окончательно граничное условия для крайних конечных элементов принимает вид:

$$u_i\left(\frac{-1+\nu\frac{R_j}{r}}{R_j-R_i}\right) + u_j\left(\frac{1-\nu\frac{R_i}{r}}{R_j-R_i}\right) = \\ = \frac{\sigma_r}{E}(1+\nu)(1-2\nu) + (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\varepsilon_{cr,\,r} + \nu\theta_{cr} \quad (3.41)$$

или

$$u_i\left(\frac{-1+\nu\frac{R_j}{r}}{R_j-R_i}\right) + u_j\left(\frac{1-\nu\frac{R_i}{r}}{R_j-R_i}\right) = \\ = \frac{\sigma_r}{E}(1+\nu)(1-2\nu) + (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\varepsilon_{cr,\,r}, \quad (3.42)$$

если в расчёте используется теория, по которой сумма всех деформаций ползучести равна нулю, т. е. $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,z} = 0$.

В выражениях (3.41) и (3.42) вместо σ_r подставляют напряжения на внутренней и внешних поверхностях цилиндра соответственно для внутреннего и внешнего конечных элементов.

3.3.3 Решение типовых задач

Рассматривается определение напряжённо-деформированного состояния цилиндрического тела. Физико-механические, реологические и теплофизические характеристики полимера приведены в работе [67]:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0.17\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}};\\
\rho &= 1250\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\\
c &= 0.35\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{град}};\\
\nu &= 0.3;\\
E &= -17.5T + 3525\ \text{МПа};\\
E_\infty &= -30T + 3150\ \text{МПа};\\
m^* &= -0.011T + 4.75\ \text{МПа};\\
\eta_0^* &= 104430\exp(-0.0275T)\ \text{МПа}\cdot\text{ч},
\end{aligned}$$

где λ — коэффициент теплопроводности; ρ — плотность материала; c — удельная теплоёмкость материала; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; E_∞ — модуль высокоэластичности; m^* — модуль скорости; η_0^* — коэффициент начальной релаксационной вязкости.

Геометрические параметры и граничные условия: $r_a = 8\,\text{мм}$; $r_a = 28\,\text{мм}$; $P_a = 0\,\text{МПа}$; $P_b = 0\,\text{МПа}$; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 100 шт.; время, в течение которого происходит расчёт НДС 3.6 ч; температура на внешней поверхности цилиндра ($r = r_b$) $28°C$; начальная температура на внутренней поверхности цилиндра ($r = r_a$) $28°C$; конечная температура на внутренней поверхности цилиндра ($r = r_a$) $100°C$; время роста температуры на внутренней поверхности цилиндра от своего начального значения до конечного 1.2 ч.

Методика решения задач в учётом ползучести материала приводится в главе 2.7 на с. 67, код программы — в приложении В.7.

Результаты расчёта поставленной задачи даны на рисунках 3.5–3.10.

На рисунке 3.7 показано распределение напряжения в толще цилиндра во времени. При изменении температурного поля происходит и изменение физико-механических и реологических параметров полимера, таким образом имеет место косвенная (наведённая) неоднородность. Темной сеткой приводится решение, полученное с помощью метода конечных разностей, светлой — с помощью метода конечных элементов. Результаты, полученные разными методами, совпали между собой с разностью, на несколько порядком ниже полученных величин, что позволяет говорить о *достоверности результатов*. Также, для оценки достоверности, приводится рисунок 3.11, на котором дана полная деформация (ε_z) вдоль оси z (для ПДС $\varepsilon_z = 0$) и полная деформация ползучести $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z} = 0$ при расчёте по соответствующей теории. Как видно из этих графиков, оба условия выполняются полностью в пределах точности ЭВМ.

3.4 Выводы по главе

1. Доказана необходимость аппроксимации производной температуры по времени до составления функционала температурного поля. Данное обстоятельство не учитывается в многочисленной литературе по методу конечных элементов.

2. Доказана работоспособность предложенных методик расчёта путём модельного решения задачи вязкоупругости цилиндрического тела с учётом изменения температурного режима. Все физико-механические параметры полимера являются функцией температуры.

3. На основании решения поставленной задачи доказана сходимость полученных результатов двумя независимыми методами: МКЭ и МКР. Сумма составляющих высокоэластических деформаций стремится к нулю, что полностью соответствует принятой теории связи Максвелла–Гуревича.

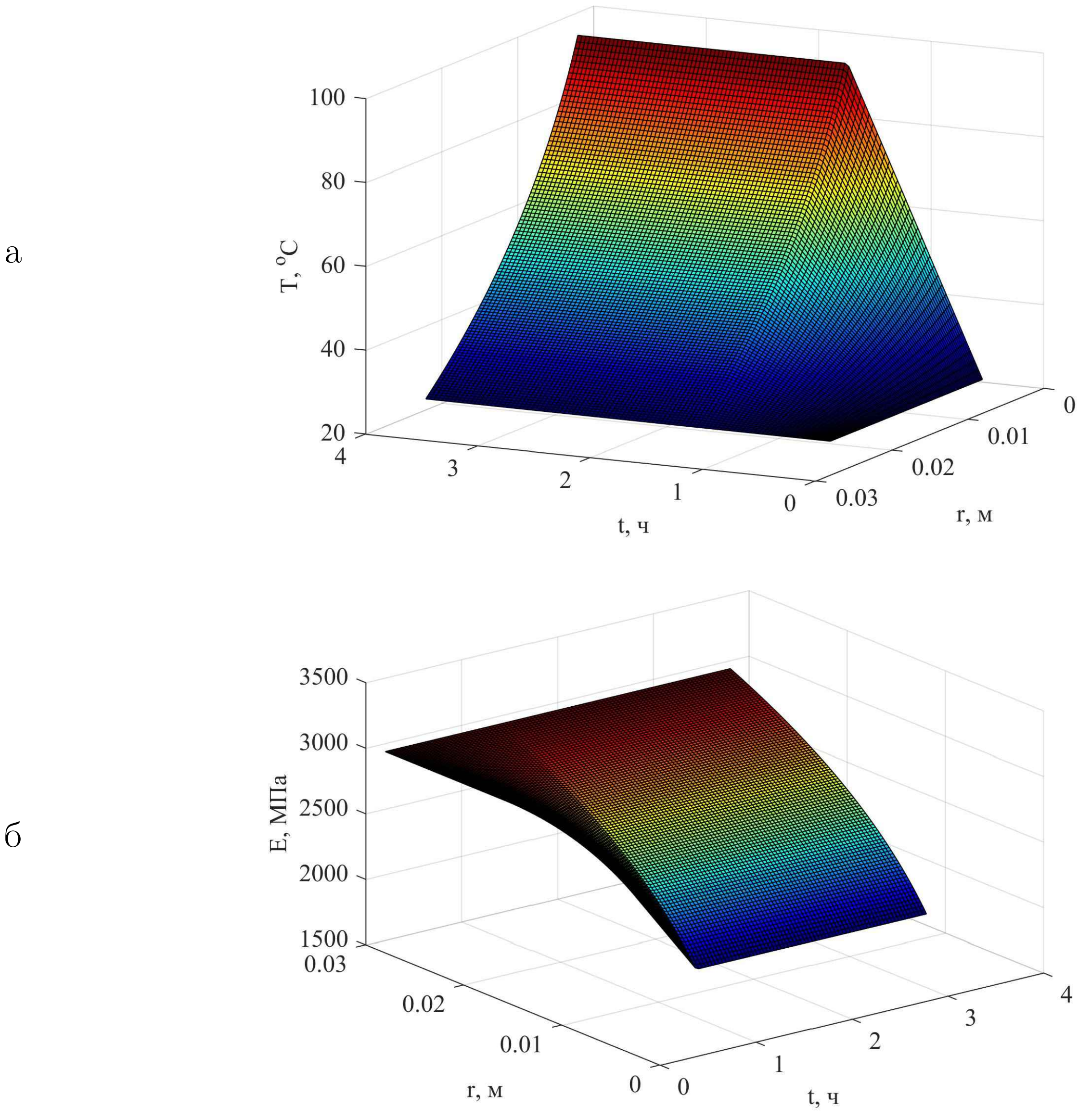


Рисунок 3.5 — Изменение температуры в цилиндре с течением времени (а) и изменение модуля упругости под влиянием температурного градиента (б)

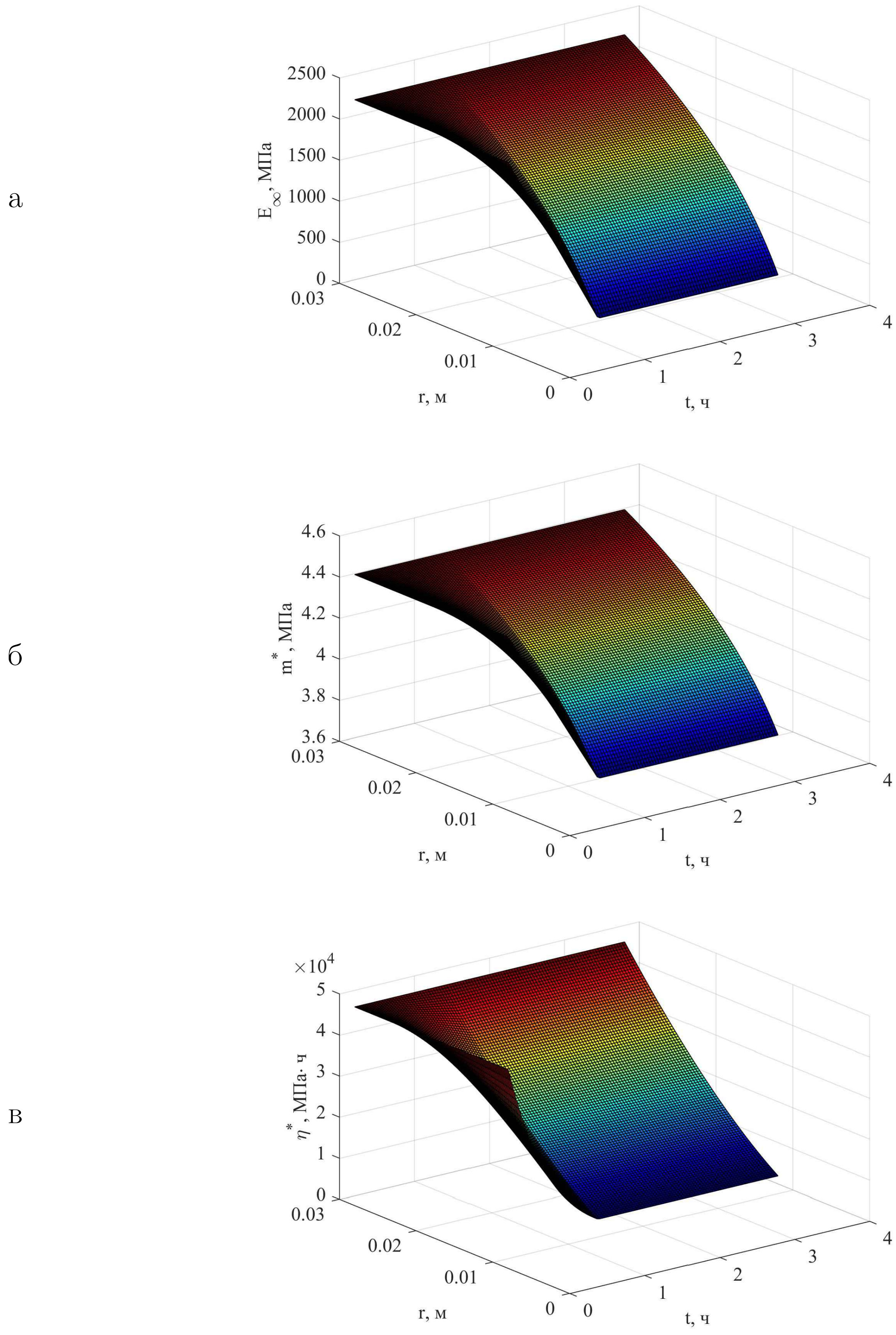


Рисунок 3.6 — Изменение реологических параметров материала под действием температурного поля с течением времени: а — модуль высокоэластичности ε_∞; б — модуль скорости m^*; в — коэффициент начальной релаксационной вязкости η^*

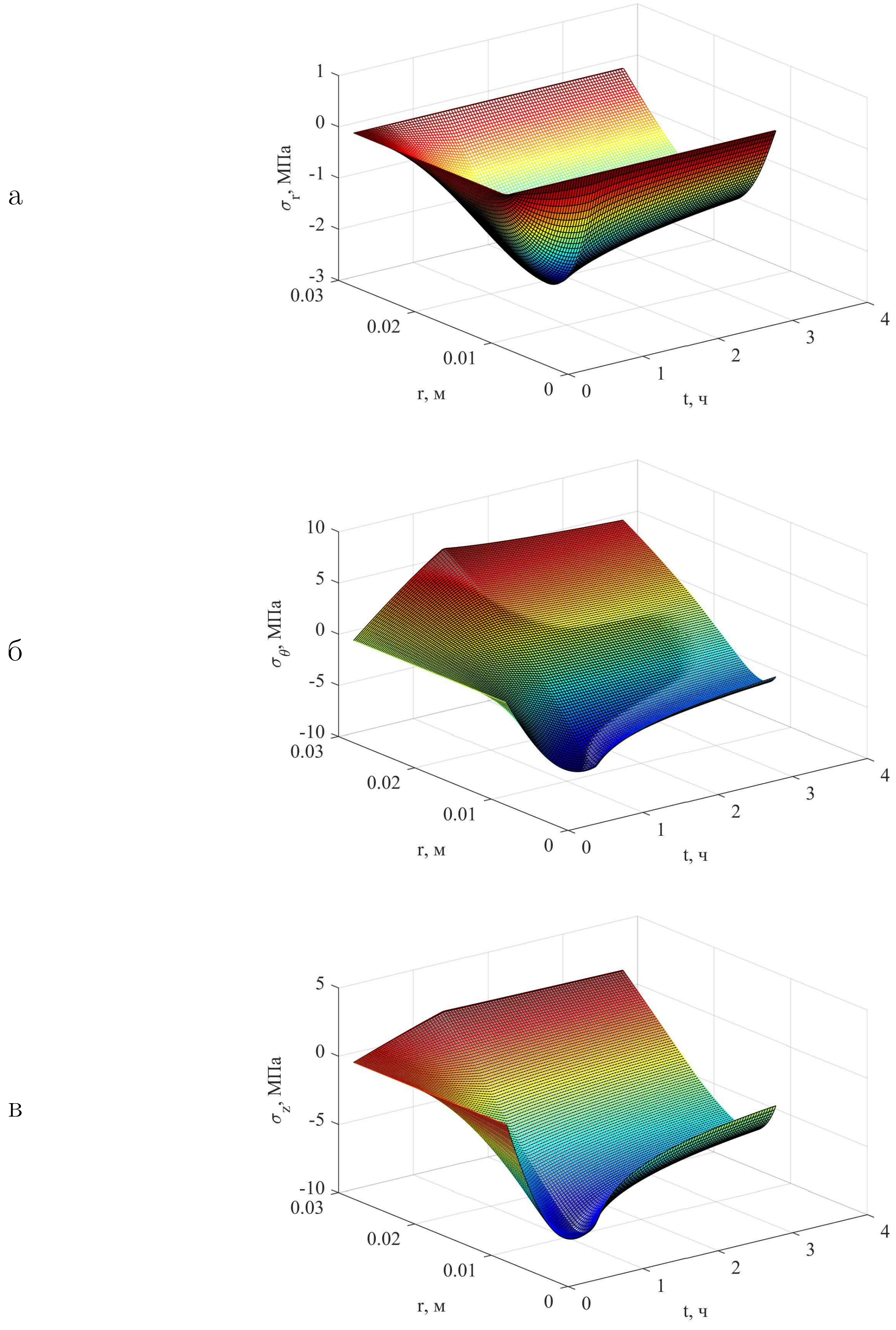


Рисунок 3.7 — Изменение напряжений во времени: а — радиальных σ_r; б — окружных σ_θ; в — осевых σ_z

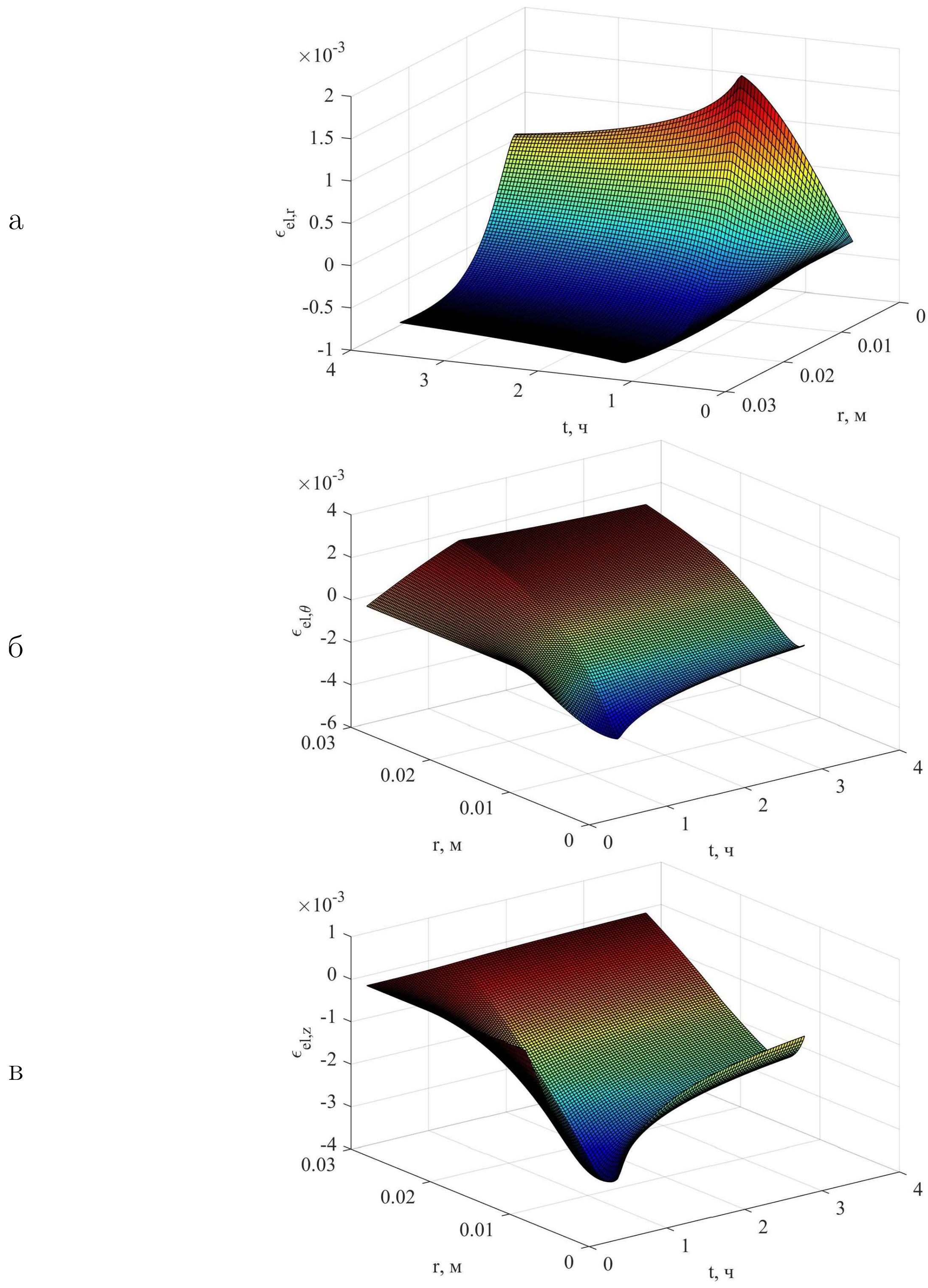


Рисунок 3.8 — Изменение упругих деформаций во времени: а — вдоль оси r; б — вдоль оси θ; в — вдоль оси z

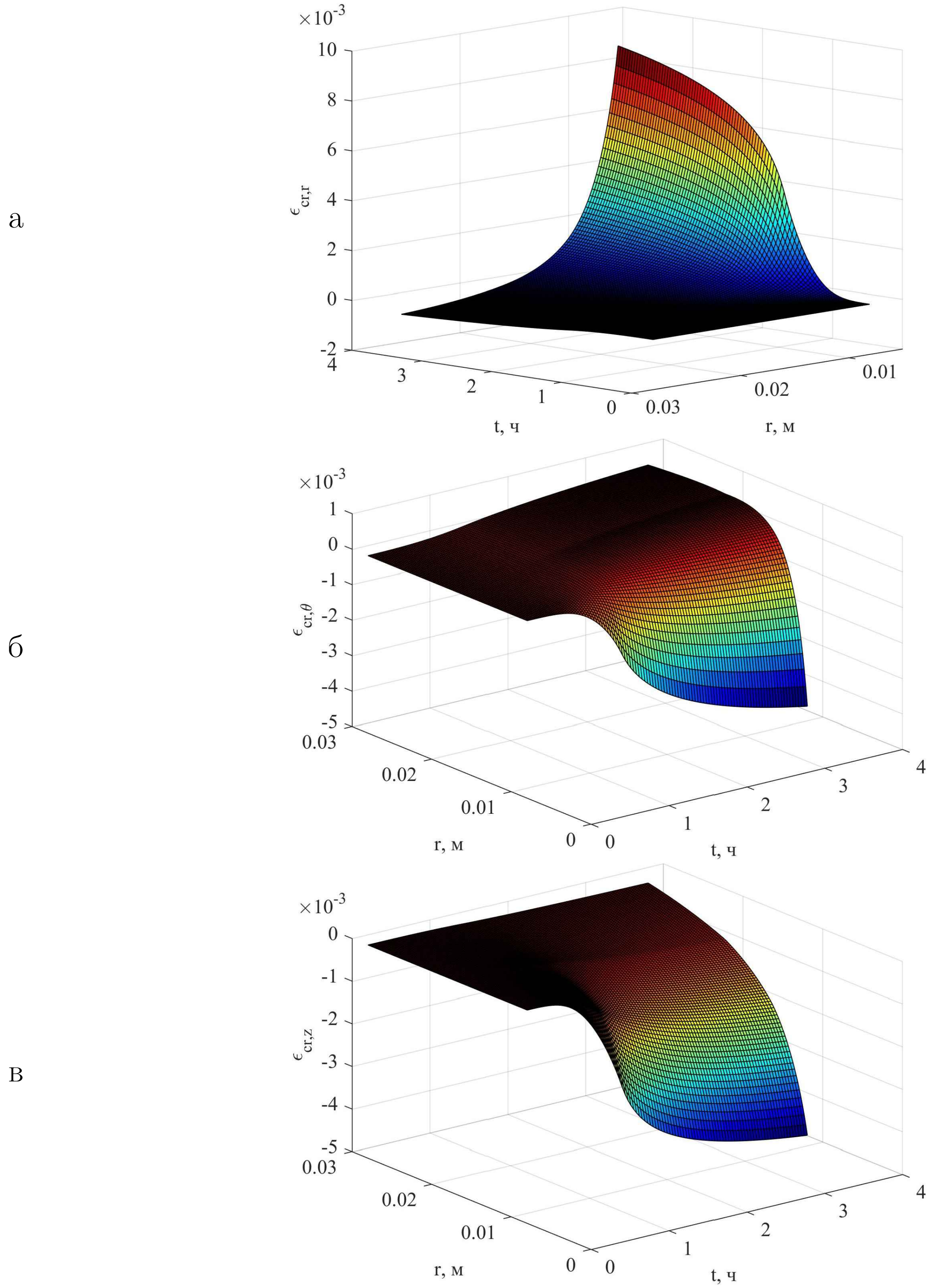


Рисунок 3.9 — Изменение деформаций ползучести во времени: а — вдоль оси r; б — вдоль оси θ; в — вдоль оси z

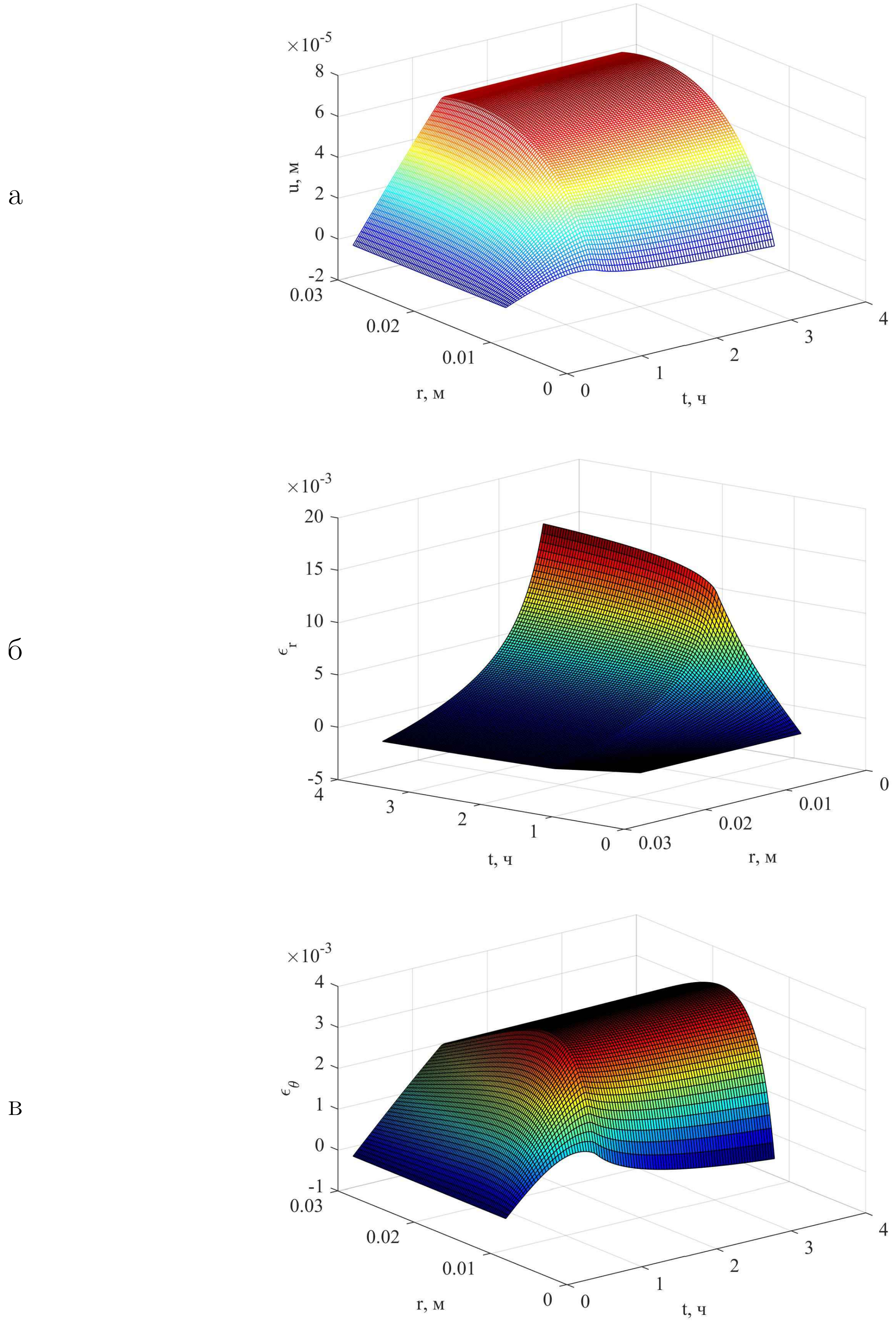


Рисунок 3.10 — Перемещения вдоль оси r (а) и изменение деформаций ползучести во времени: б — вдоль оси r; в — вдоль оси θ

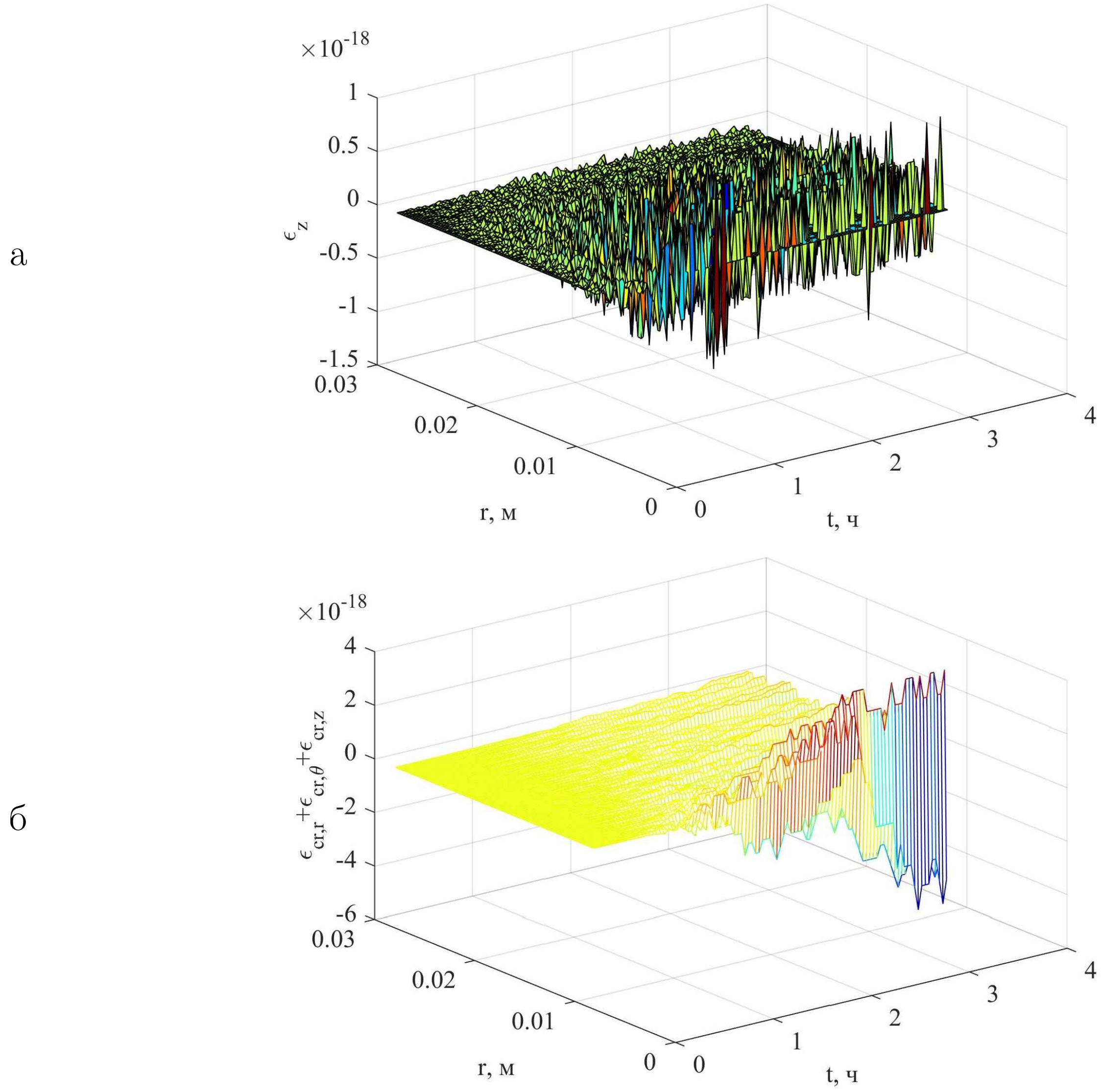


Рисунок 3.11 — Оценка достоверности полученных данных: а — полная деформация ($\varepsilon_z \approx 0$) вдоль оси z; б — полная деформация ползучести $\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,\,r} + \varepsilon_{cr,\,\theta} + \varepsilon_{cr,\,z} \approx 0$ вдоль оси z

Глава 4. Оптимизация плоских задач термовязкоупругости

В связи с тем, что расчёт полимерных тел во времени проводится пошагово, при этом количество шагов может измеряться сотнями и тысячами, необходимо оптимизировать методику расчёта. Для оценки достоверности полученных данных, приводится сравнение решение задачи, полученной в параграфе 3.3 (с. 85) с решениями, к которым была применена оптимизация.

4.1 Оптимизация интервала времени

Как говорилось ранее, при расчёте ползучести используют пошаговый метод, при котором высокоэластические деформации на следующем этапе времени определяют как сумму высокоэластических деформаций на текущем этапе времени с прибавлением произведения скорости деформаций на шаг аппроксимации по времени, т. е.

$$\varepsilon_{cr,S}\left(t+1\right)=\varepsilon_{cr,S}\left(t\right)+\frac{\partial\varepsilon_{cr,S}\left(t\right)}{\partial t}\Delta t.$$

Как видно из представленной формулы, точность зависит от размера выбранного шага по времени, уменьшая точность вычислений с ростом этого интервала. Если используется постоянное количество интервалов при аппроксимации времени, то точность падает с увеличением интервала времени, на котором производится весь расчёт. Частично решить данную проблему можно, увеличив количество аппроксимирующих интервалов по времени, однако, это порождает две другие проблемы:

1. рост машинного времени, требуемого на решение поставленной задачи в связи с увеличением количества шагов по времени;
2. накопление ошибки на каждом временном интервале в связи с ограничениями, накладываемыми разрядностью используемой электронно-вычислительной машины.

Основной рост деформаций ползучести происходит в самом начале, поэтому выходом из сложившейся ситуации может быть использование переменных аппроксимирующих временных интервалов, более коротких в самом начале расчёта и увеличивающихся к концу (рисунок 4.1). Для этого можно принять распределение аппроксимирующих интервалов по времени как в соответствии с логарифмическим законом, так и основанным на геометрической прогрессии.

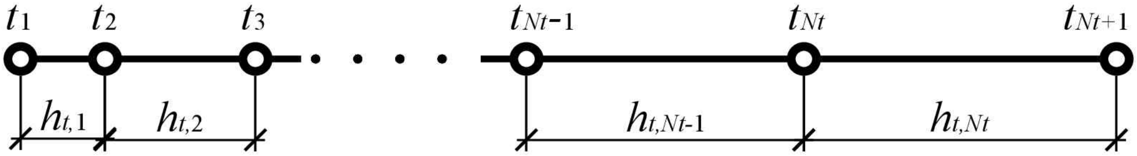


Рисунок 4.1 — Аппроксимация пошагового метода при переменных интервалах по времени: t — время на текущем шаге; Δt_i — длина i-го временного интервала; N_t — количество аппроксимирующих интервалов по времени

Распределение по логарифмическому закону можно производить в соответствии с выражением [53]:

$$t(i) = \exp\left(\frac{\log(t_{N_t+1})}{N_t(i-1)}\right) - 1, \qquad i = 1 \ldots N_t + 1.$$

Как будет показано дальше, логарифмическое распределение не всегда оптимально.

Альтернативой логарифмического распределения является распределение по закону геометрической прогрессии. В этом случае необходимо задать общее количество интервалов во времени N_t и отношение величины последнего интервала $h_{t,Nt}$ к величине первого интервала $h_{t,1}$.

$$k = \frac{h_{t,Nt}}{h_{t,1}}.$$

Согласно [17] любой член геометрической прогрессии определяется по формуле

$$h_{t,n} = h_{t,1} q^{(n-1)}, \tag{4.1}$$

где $h_{t,1}$ — первый член; q — знаменатель прогрессии; n — номер искомого члена.

Весь период расчёта t_{Nt+1} фактически представляет собой сумму S_n первых n членов

$$S_N = \frac{b_1\,(1-q^n)}{1-q} = t_{Nt+1}. \tag{4.2}$$

Из формулы (4.1) определяем знаменатель прогрессии:

$$q = k^{\left(\frac{1}{n-1}\right)}$$

и, подставляя в выражение (4.2), окончательно первый член определяем как:

$$h_{t,1} = t_{Nt+1}\frac{1-q}{1-q^n}.$$

4.2 Оптимизация определения центральной точки конечного элемента

В выражении матрицы жёсткости, а также вектора нагрузок, входит параметр r (см. рисунок 3.2, с. 75), т. е. координата некоторой точки, находящейся внутри конечного элемента. Обычно параметр r принимают в середине элемента, как в выражении (3.39), с. 95. Однако, это может быть справедливо при решении задач в декартовой системе координат, когда этот параметр соответствует положению центра тяжести конечного элемента. Иное дело, если имеет место осесимметричная постановка, или решение задачи производится в сферических координатах, в этом случае предлагается иной подход.

Определим такое положение точки r, при котором внутренний объём конечного элемента (основание r–R_i) был бы равен внешнему объёму конечного элемента (основание R_j–r).

Для удобства вычисления рассмотрим конечный элемент при θ от 0 до 360 градусов. Тогда площадь внутреннего основания элемента должна быть равна площади внешнего основания элемента:

$$\pi\left(r^2 - R_i^2\right) = \pi\left(R_j^2 - r^2\right).$$

Отсюда положение центра тяжести конечного элемента при равенстве объёма его внешней и внутренней частей определяется выражением:

$$r = \sqrt{\frac{R_j^2 + R_i^2}{2}}. \tag{4.3}$$

4.3 Решение задач и анализ полученных данных

Полученные данные анализируют в случае постоянного шага, двумя методами: конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР). В данной главе вопрос оптимизации положения центральной точки не рассматривается, так как основной упор делается именно на оптимизацию по времени. Анализ оптимизации центральной точки будет проводится в главе, посвящённой решению двумерных задач.

Проводится анализ задачи, подробно рассмотренной в параграфе 3.3.3, на с. 97. В таблицах 4.1 и 4.2 приведены результаты расчёта плоской осесимметричной задачи методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) при равномерном, логарифмическом шагах по времени и при шагах по времени в соответствии с геометрической прогрессией. Варьируемые параметры: количество конечных элементов N_r по радиусу (МКЭ) или количество узлов (МКР) и количество интервалов по времени N_t.

В качестве искомого параметра приводится окружное напряжение σ_θ. Связано это с тем, что окружное напряжение зависит дифференциально от перемещений в методе конечных элементов и дифференциально от радиальных напряжений в методе конечных разностей. Таким образом, стремление значения окружного напряжения к некоторому конечному значению позволяет говорить и о сходимости решения.

Анализ результатов решения показывает, что при максимальном количестве интервалов (узлов) по радиусу и времени результаты расчёта по всем методикам разбиения временного интервала стремятся к некоторому конечному значению $\sigma_{\theta,i=1} = -3.80$ МПа на внутренней поверхности и $\sigma_{\theta,i=Nr} = 5.40$ МПа на внешней поверхности цилиндра.

Кроме того, с первого взгляда может показаться, что поведение изменения напряжения в случае постоянного количества интервалов более стабильно по отношение к величине в конце расчётного периода. Однако это ощущение ложное и связано с развитием неустановившейся ползучести и образованием «черпаков», отчётливо наблюдаемых изменений напряжений во времени (рисунок 3.7), изменения упругих деформаций во времени (рисунок 3.8) и изменения деформаций ползучести во времени (рисунок 3.9). На приведенных рисунках процесс неустановившейся ползучести занимает значительное время, поэтому равномерное разбиение по времени даёт приемлемый результат. В случае же рассмотрения весьма длительных процессов (месяцы и годы) равномерное распределение по времени не способно даже отразить хоть какой-то этап неустановившейся ползучести (данная ситуация будет рассмотрена в главе 6 при исследовании длительной прочности адгезионного соединения).

Таким образом, максимально достоверным является результат с применением разбиения временных интервалов в соответствии с геометрической прогрессией.

4.4 Выводы по главе

1. Проведён ряд оптимизационных подходов к повышению точности результатов: использование непостоянных интервалов по времени, а также применены координаты центра тяжести сечения вместо координаты срединной точки.
2. Показано, что в случае длительных временных процессов необходимо использовать разбиение времени в соответствии с геометрической прогрессией для возможности учёта неустановившейся ползучести; равномерный шаг по времени более точен при описание кратковременных процессов.

Таблица 4.1 — Результаты расчёта плоской осесимметричной задачи методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) при *равномерном* и *логарифмическом* шагах по времени: N_r — количество конечных элементов по радиусу (МКЭ) или количество узлов (МКР); N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_t, шт.	Напряжение	МКЭ		МКР	
			$i = 1$	$i = N_r$	$i = 1$	$i = N_r$
Равномерный шаг по времени						
21	20	σ_θ	−4.0727	5.2225	−3.7680	4.9653
51			−3.8759	5.3313	−3.7033	5.2242
101			−3.7911	5.3684	−3.6962	5.3141
501			−3.7151	5.3983	−3.6949	5.3874
21	50	σ_θ	−4.1307	5.2295	−3.8316	4.9729
51			−3.9378	5.3384	−3.7684	5.5316
101			−3.8545	5.3756	−3.7612	5.3215
501			−3.7798	5.4056	−3.7599	5.3946
21	100	σ_θ	−4.1490	5.2317	−3.8518	4.9753
51			−3.9574	5.3407	−3.7890	5.2340
101			−3.8746	5.3779	−3.7818	5.3238
501			−3.8003	5.4079	−3.7805	5.3969
21	500	σ_θ	−4.1635	5.2335	−3.8678	4.9773
51			−3.9728	5.3424	−3.8052	5.2358
101			−3.8904	5.3797	−3.7981	5.3256
501			−3.8164	5.4097	−3.7967	5.3988
Логарифмический шаг по времени						
21	20	σ_θ	−4.0362	5.2036	−3.7287	4.9467
51			−3.8377	5.3120	−3.6639	5.2051
101			−3.7524	5.3491	−3.6568	5.2949
501			−3.6758	5.3789	−3.6555	5.3679
21	50	σ_θ	−4.1147	5.2220	−3.8139	4.9655
51			−3.9209	5.3307	−3.7508	5.2240
101			−3.8373	5.3679	−3.7437	5.3138
501			−3.7623	5.3978	−3.7423	5.3869
21	100	σ_θ	−4.1414	5.2281	−3.8434	4.9718
51			−3.9493	5.3370	−3.7806	5.2303
101			−3.8664	5.3742	−3.7734	5.3201
501			−3.7919	5.4041	−3.7721	5.3932
21	500	σ_θ	−4.1619	5.2328	−3.8661	4.9765
51			−3.9712	5.3417	−3.8035	5.2351
101			−3.8888	5.3789	−3.7964	5.3249
501			−3.8147	5.4090	−3.7950	5.3980

Таблица 4.2 — Результаты расчёта плоской осесимметричной задачи методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) при шагах по времени в соответствии с *геометрической прогрессией*: N_r — количество конечных элементов по радиусу (МКЭ) или количество узлов (МКР); N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_t, шт.	Напряжение	МКЭ		МКР	
			$i = 1$	$i = N_r$	$i = 1$	$i = N_r$
Степенной шаг по времени $k_g = 10^2$						
21	20	σ_θ	-3.8580	5.1470	-3.5378	4.8898
51			-3.6495	5.2545	-3.4677	5.1474
101			-3.5603	5.2912	-3.4604	5.2369
501			-3.4803	5.3207	-3.4591	5.3097
21	50	σ_θ	-4.0527	5.2027	-3.7462	4.9461
51			-3.8553	5.3111	-3.6823	5.2044
101			-3.7704	5.3481	-3.6752	5.2940
501			-3.6941	5.3780	-3.6738	5.3670
21	100	σ_θ	-4.1106	5.2186	-3.8094	4.9623
51			-3.9166	5.3273	-3.7463	5.2207
101			-3.8330	5.3645	-3.7392	5.3104
501			-3.7579	5.3944	-3.7379	5.3835
21	500	σ_θ	-4.1560	5.2310	-3.8596	4.9747
51			-3.9649	5.3399	-3.7969	5.2333
101			-3.8823	5.3771	-3.7898	5.3230
501			-3.8081	5.4071	-3.7884	5.3961
Степенной шаг по времени $k_g = 10^4$						
21	20	σ_θ	-2.8545	4.9797	-2.3110	4.7092
51			-2.6265	5.0819	-2.4145	4.9702
101			-2.5267	5.1162	-2.4136	5.0596
501			-2.4354	5.1437	-2.4109	5.1323
21	50	σ_θ	-3.9306	5.1669	-3.6128	4.9099
51			-3.7262	5.2747	-3.5474	5.1678
101			-3.6387	5.3115	-3.5406	5.2573
501			-3.5602	5.3411	-3.5393	5.3302
21	100	σ_θ	-4.0541	5.2027	-3.7475	4.9462
51			-3.8567	5.3112	-3.6837	5.2044
101			-3.7718	5.3482	-3.6766	5.2941
501			-3.6956	5.3781	-3.6753	5.3671
21	500	σ_θ	-4.1453	5.2280	-3.8478	4.9718
51			-3.9535	5.3369	-3.7850	5.2303
101			-3.8707	5.3741	-3.7779	5.3200
501			-3.7963	5.4041	-3.7765	5.3931

Глава 5. Задачи термовязкоупругости в осесимметричной двумерной постановке

Рассмотрим цилиндр (рисунок 5.1), внутренний радиус которого R_a, внешний — R_b, имеющий конечную длину l. Граничные условия, вследствие их большой вариации, будут приведены далее в процессе выкладки разрешающих уравнений.

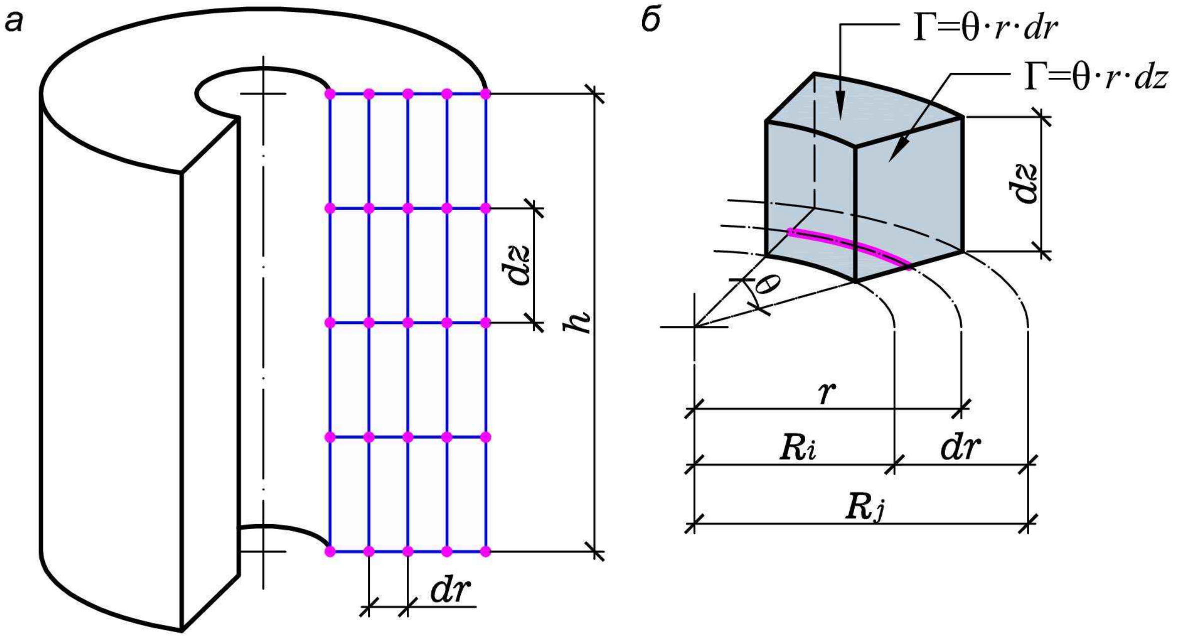


Рисунок 5.1 — Исходная схема двумерной осесимметричной задачи:
а — исходный цилиндр; *б* — конечный прямоугольный элемент

В случае двумерных задач конечный элемент может быть представлен в виде четырёхугольника или, наиболее часто используемый вариант, треугольника. Далее при рассмотрении сечения цилиндра будем изучать *прямоугольный плоский* конечный элемент как наиболее удобный для данного класса осесимметричных задач.

5.1 Получение аппроксимирующей функции формы прямоугольного конечного элемента

Интерполяционный полином запишем в виде выражения (рисунок 5.2):

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy. \tag{5.1}$$

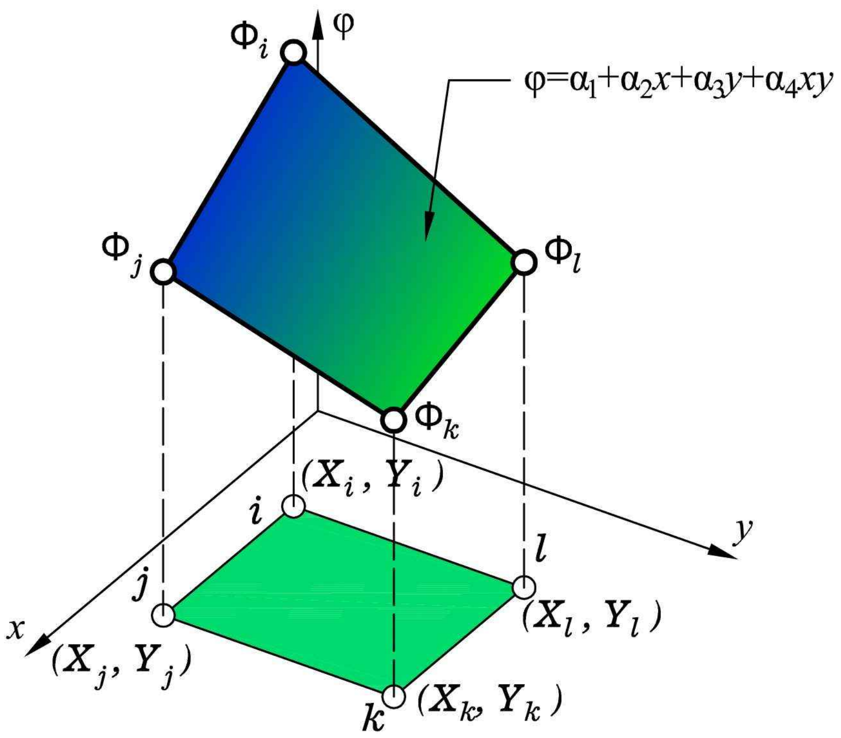


Рисунок 5.2 — Двумерный прямоугольный конечный элемент

Необходимо отметить, что так как рассматривается прямоугольный элемент, то для дальнейших выкладок можно сделать некоторые упрощения: $X_l = X_i$; $X_j = X_k$; $Y_j = Y_i$; $Y_l = Y_k$.

Тогда условия в узлах записываются:

$$\begin{aligned}
&\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i, \quad y = Y_i;\\
&\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_k, \quad y = Y_i;\\
&\varphi = \Phi_k \quad \text{при} \quad x = X_k, \quad y = Y_k.\\
&\varphi = \Phi_l \quad \text{при} \quad x = X_i, \quad y = Y_k.
\end{aligned}$$

Тогда интерполяционный полином в матричном представлении имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & X_iY_i \\ 1 & X_k & Y_i & X_kY_i \\ 1 & X_k & Y_k & X_kY_k \\ 1 & X_i & Y_k & X_iY_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}.$$

Для упрощения представления в дальнейшем результатов можно ввести замену:

$$A = (X_k - X_i)(Z_k - Z_i), \tag{5.2}$$

где A — фактически площадь прямоугольной грани конечного элемента.

Тогда коэффициенты полинома (5.1) определяем так:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} X_k Y_k & -X_i Y_k & X_i Y_i & -X_k Y_i \\ -Y_k & Y_k & -Y_i & Y_i \\ -X_k & X_i & -X_i & X_k \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}.$$

Далее значения коэффициентов подставляем в выражение исходного полинома (5.1) и приводим его виду

$$\varphi = \begin{Bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}, \tag{5.3}$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{A}(X_k Y_k - Y_k x - X_k y + xy); \\ N_j &= \frac{1}{A}(-X_i Y_k + Y_k x + X_i y - xy); \\ N_k &= \frac{1}{A}(X_i Y_i - Y_i x - X_i y + xy); \\ N_l &= \frac{1}{A}(-X_k Y_i + Y_i x + X_k y - xy). \end{aligned}$$

При минимизации выражения (5.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_k & \Phi_l \end{Bmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{A} \begin{Bmatrix} -Y_k + y & Y_k - y & -Y_i + y & Y_i - y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_k & \Phi_l \end{Bmatrix}^T; \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad \frac{\partial N_k}{\partial y} \quad \frac{\partial N_l}{\partial y} \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T =$$
$$= \frac{1}{A} \cdot \left\{ -X_k + x \quad X_i - x \quad -X_i + x \quad X_k - x \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T . \quad (5.5)$$

В случае осесимметричной задачи функция формы (5.3) и соответствующие её производные (5.4) и (5.5) принимают вид:

$$\varphi = \left\{ N_i \quad N_j \quad N_k \quad N_l \right\} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}, \quad (5.6)$$

где

$$N_i = \frac{1}{A} \left(R_k Z_k - Z_k r - R_k z + rz \right);$$
$$N_j = \frac{1}{A} \left(-R_i Z_k + Z_k r + R_i z - rz \right);$$
$$N_k = \frac{1}{A} \left(R_i Z_i - Z_i r - R_i z + rz \right);$$
$$N_l = \frac{1}{A} \left(-R_k Z_i + Z_i r + R_k z - rz \right);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad \frac{\partial N_j}{\partial r} \quad \frac{\partial N_k}{\partial r} \quad \frac{\partial N_l}{\partial r} \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T =$$
$$= \frac{1}{A} \left\{ -Z_k + z \quad Z_k - z \quad -Z_i + z \quad Z_i - z \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T ; \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad \frac{\partial N_j}{\partial z} \quad \frac{\partial N_k}{\partial z} \quad \frac{\partial N_l}{\partial z} \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T =$$
$$= \frac{1}{A} \left\{ -R_k + r \quad R_i - r \quad -R_i + r \quad R_k - r \right\} \left\{ \Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_l \right\}^T . \quad (5.8)$$

5.2 Определение температурного поля

Для определения температурного поля используем уравнение теплопроводности Фурье (1.10), которое во времени будем аппроксимировать согласно методике, приведённой в параграфе (3.2.2.1) (см. с. 80). Тогда уравнение Фурье можно записать в виде:

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) = q_T - \frac{\rho c}{h_t}\left(T_\varrho - T_{\varrho-1}\right), \tag{5.9}$$

где h_t — интервал времени между исследуемым моментом и предыдущим; T_ϱ и $T_{\varrho-1}$ — температуры в узле элемента соответственно в текущий момент времени и в предыдущий.

Для возможности нахождения функционала с помощью выражения (1.16), уравнение (5.9) приводим к виду (1.12):

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) + \frac{\rho c}{h_t} T = f, \tag{5.10}$$

где $f = q_T + \dfrac{\rho c}{h_t} T_{\varrho-1}$.

С учётом (1.16), функционал уравнения (5.10) запишем:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(T) = \int\limits_V \left[\lambda \left(\operatorname{grad} T\right)^2 + \frac{\rho c}{h_t} T^2\right] dV + \int\limits_{\Gamma 3} \alpha T^2 \, d\Gamma - \\ - 2\int\limits_{\Gamma 3} \alpha T_0 T \, d\Gamma + 2\int\limits_{\Gamma 2} Q T \, d\Gamma - 2\int\limits_V f T \, dV.\end{aligned} \tag{5.11}$$

С учётом выражений, приведённых в приложении А.1:

$$\operatorname{grad} T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2}.$$

Температуру и её градиент по элементу определяют согласно выражениям (5.6)–(5.8):

$$T = \{N\}\{T\}; \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}\{T\}; \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\{T\}.$$

Тогда

$$T^2 = \{T\}^T\{N\}^T\{N\}\{T\}; \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)^2 = \{T\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}\{T\}.$$

Далее с учётом правил минимизации (А.6) и (А.7) производим минимизацию функционала по температуре:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Im}(T)}{\{T\}} = 0 = \underbrace{2\int\limits_V \lambda \left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}^T \left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}\{T\}\,dV +}_{S^{\mathrm{I}}} \\ \underbrace{+\,2\int\limits_V \lambda \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\{T\}\,dV}_{S^{\mathrm{II}}} \underbrace{+\,2\int\limits_V \frac{\rho c}{h_t}\{N\}^T\{N\}\{T\}\,dV +}_{S^{\mathrm{III}}} \\ \underbrace{+\,2\int\limits_{\Gamma 3} \alpha\{N\}^T\{N\}\{T\}\,d\Gamma}_{S^{\mathrm{IV}}} \underbrace{-\,2\int\limits_{\Gamma 3} \alpha T_0\{N\}^T\,d\Gamma +}_{S^{\mathrm{V}}} \\ \underbrace{+\,2\int\limits_{\Gamma 2} Q\{N\}^T\,d\Gamma}_{S^{\mathrm{VI}}} \underbrace{-\,2\int\limits_V f\{N\}^T\,dV}_{S^{\mathrm{VII}}} \end{aligned} \qquad (5.12)$$

и выражение приводим к виду:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(T)} & k_{1,2}^{(T)} & k_{1,3}^{(T)} & k_{1,4}^{(T)} \\ k_{2,1}^{(T)} & k_{2,2}^{(T)} & k_{2,3}^{(T)} & k_{2,4}^{(T)} \\ k_{3,1}^{(T)} & k_{3,2}^{(T)} & k_{3,3}^{(T)} & k_{3,4}^{(T)} \\ k_{4,1}^{(T)} & k_{4,2}^{(T)} & k_{4,3}^{(T)} & k_{4,4}^{(T)} \end{bmatrix}}_{\left[k^{(T)}\right]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} T_i^{(T)} \\ T_j^{(T)} \\ T_k^{(T)} \\ T_l^{(T)} \end{Bmatrix}}_{\left\{T^{(T)}\right\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{(T)} \\ f_2^{(T)} \\ f_3^{(T)} \\ f_4^{(T)} \end{Bmatrix}}_{\left\{f^{(T)}\right\}}.$$

Для этого перегруппируем члены выражения (5.12) S^{I}–S^{VII} с последующим интегрированием их членов:

$$\left[k^{(T)}\right] = S^{\mathrm{I}} + S^{\mathrm{II}} + S^{\mathrm{III}} + S^{\mathrm{IV}}; \qquad \left\{f^{(T)}\right\} = -\left(S^{\mathrm{V}} + S^{\mathrm{VI}} + S^{\mathrm{VII}}\right).$$

После интегрирования слагаемые S^{I}–S^{VII} принимают вид:
слагаемое S^{I}:

$$S^{\mathrm{I}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(\lambda\left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial r}\right\}\right) dr\,dz =$$

$$= \frac{\lambda\left(R_k + R_i\right)\left(Z_k - Z_i\right)}{6\left(R_k - R_i\right)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ & 2 & 1 & -1 \\ & & 2 & -2 \\ \text{сим.} & & & 2 \end{bmatrix};$$

слагаемое S^{II}:

$$S^{\mathrm{II}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(\lambda\left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T\left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\right) dr\,dz =$$

$$= \frac{\lambda\left(R_k - R_i\right)}{6\left(Z_k - Z_i\right)} \begin{bmatrix} 3R_i + R_k & R_i + R_k & -(R_i + R_k) & -(3R_i + R_k) \\ & R_i + 3R_k & -(R_i + 3R_k) & -(R_i + R_k) \\ & & R_i + 3R_k & R_i + R_k \\ \text{сим.} & & & 3R_i + R_k \end{bmatrix};$$

слагаемое S^{III}:

$$S^{\mathrm{III}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(\frac{c\rho}{h_t}\left\{N\right\}^T\left\{N\right\}\right) dr\,dz =$$

$$= \frac{c\rho A}{36h_t} \begin{bmatrix} 2(3R_i + R_k) & 2(R_i + R_k) & R_i + R_k & 3R_i + R_k \\ & 2(R_i + 3R_k) & R_i + 3R_k & R_i + R_k \\ & & 2(R_i + 3R_k) & 2(R_i + R_k) \\ \text{сим.} & & & 2(3R_i + R_k) \end{bmatrix};$$

слагаемое S^{IV} на вертикальных и горизонтальных гранях:

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{верт}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k} r\alpha\{N\}^T\{N\}\,dz =$$

$$= \frac{r\alpha\,(r-R_k)\,(Z_i-Z_k)}{3\,(R_i-R_k)^2}\begin{bmatrix} 2(R_k-r) & 2(r-R_i) & r-R_i & R_k-r \\ & -\dfrac{2(r-R_i)^2}{r-R_k} & -\dfrac{(r-R_i)^2}{r-R_k} & r-R_i \\ & & -\dfrac{2(r-R_i)^2}{r-R_k} & 2(r-R_i) \\ \text{сим.} & & & 2(R_k-r) \end{bmatrix};$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор}} = 2\int\limits_{R_i}^{R_k} r\alpha\{N\}^T\{N\}\,dr;$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(1,1)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_k)^2(3R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(1,2)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(2,1)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_k)^2(R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(1,3)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(3,1)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(4,2)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(2,4)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)\,(z-Z_i)(z-Z_k)\,(R_i+R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2};$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(1,4)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(4,1)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[((z-Z_i)(z-Z_k)(3R_i+R_k))\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(2,2)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_k)^2(R_i+3R_k)\right)\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(2,3)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(3,2)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[((z-Z_i)(z-Z_k)(R_i+3R_k))\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(3,3)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_i)^2(R_i+3R_k)\right)\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(3,4)} = S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(4,3)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_i)^2(R_i+R_k)\right)\right];$$

$$S^{\mathrm{IV}}_{\text{гор},(4,4)} = \frac{\alpha\,(R_i-R_k)}{6\,(Z_i-Z_k)^2}\left[-\left((z-Z_i)^2(3R_i+R_k)\right)\right];$$

слагаемое S^{V} на вертикальных и горизонтальных гранях:

$$S^{\mathrm{V}}_{\text{верт}} = -2\int\limits_{Z_i}^{Z_k} r\alpha T_0\{N\}^T\,dz = -\frac{r\alpha T_0\,(Z_i - Z_k)}{(R_i - R_k)}\begin{bmatrix} R_k - r \\ r - R_i \\ r - R_i \\ R_k - r \end{bmatrix};$$

$$S^{\mathrm{V}}_{\text{гориз}} = -2\int\limits_{R_i}^{R_k} r\alpha T_0\{N\}^T\,dr = \frac{\alpha T_0\,(R_i - R_k)}{3\,(Z_i - Z_k)}\begin{bmatrix} (z - Z_k)(2R_i + R_k) \\ (z - Z_k)(R_i + 2R_k) \\ -(z - Z_i)(R_i + 2R_k) \\ -(z - Z_i)(2R_i + R_k) \end{bmatrix};$$

слагаемое S^{VI} на вертикальных и горизонтальных гранях:

$$S^{\mathrm{VI}}_{\text{верт}} = 2\int\limits_{Z_i}^{Z_k} rQ\{N\}^T\,dz = \frac{rQ\,(Z_i - Z_k)}{(R_i - R_k)}\begin{bmatrix} R_k - r \\ r - R_i \\ r - R_i \\ R_k - r \end{bmatrix};$$

$$S^{\mathrm{VI}}_{\text{гориз}} = 2\int\limits_{R_i}^{R_k} rQ\{N\}^T\,dr = \frac{Q\,(R_i - R_k)}{3\,(Z_i - Z_k)}\begin{bmatrix} -(z - Z_k)(2R_i + R_k) \\ -(z - Z_k)(R_i + 2R_k) \\ (z - Z_i)(R_i + 2R_k) \\ (z - Z_i)(2R_i + R_k) \end{bmatrix};$$

слагаемое S^{VII}, где $\beta = \dfrac{\rho c}{h_t}$:

$$S^{\mathrm{VII}} = -2\int\limits_{Z_i}^{Z_k}\int\limits_{R_i}^{R_k} r\left(q_T + \frac{c\rho}{h_t}\{T_{\varrho-1}\}\right)\{N\}^T\,dr\,dz;$$

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{VII}}_1 = -\frac{A}{36}\big[&6R_i(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + 2R_i(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) + \\ &+ R_i(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + 2R_k(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + 3R_i(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l}) + \\ &+ 2R_k(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) + R_k(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + R_k(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l})\big]; \end{aligned}$$

$$S_2^{\mathrm{VII}} = -\frac{A}{36}\big[2R_i(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + 2R_i(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) +$$
$$+ R_i(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + 2R_k(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + R_i(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l}) +$$
$$+ 6R_k(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) + 3R_k(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + R_k(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l})\big];$$

$$S_3^{\mathrm{VII}} = -\frac{A}{36}\big[R_i(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + R_i(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) +$$
$$+ 2R_i(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + R_k(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + 2R_i(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l}) +$$
$$+ 3R_k(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) + 6R_k(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + 2R_k(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l})\big];$$

$$S_4^{\mathrm{VII}} = -\frac{A}{36}\big[3R_i(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + R_i(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) +$$
$$+ 2R_i(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + R_k(q_i + \beta T_{\varrho-1,\,i}) + 6R_i(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l}) +$$
$$+ R_k(q_j + \beta T_{\varrho-1,\,j}) + 2R_k(q_k + \beta T_{\varrho-1,\,k}) + R_k(q_l + \beta T_{\varrho-1,\,l})\big].$$

5.3 Определение напряжённо-деформированного состояния

При решении двумерной осесимметричной задачи из шести компонент деформаций (закон Гука в прямой форме (1.4), с. 19) остаётся четыре: ε_r, ε_θ, ε_z и γ_{rz}. При этом, как говорилось ранее, в случае ПДС полная осевая деформация равна нулю:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{el}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} \\ \varepsilon_{cr,\,\theta} \\ \varepsilon_{cr,\,z} \\ \gamma_{cr,\,rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}},$$

откуда можно выразить вектор напряжений:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} \\ \varepsilon_{cr,\,\theta} \\ \varepsilon_{cr,\,z} \\ \gamma_{cr,\,rz} \end{Bmatrix} \right). \qquad (5.13)$$

Окончательно, в результате ряда алгебраических операций, вектор напряжений определяем:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} \\ \varepsilon_{cr,\,\theta} \\ \varepsilon_{cr,\,z} \\ \gamma_{cr,\,rz} \end{Bmatrix} \right). \qquad (5.14)$$

Введём замену

$$[D] = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{bmatrix}, \qquad (5.15)$$

тогда выражение (5.14) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} \\ \varepsilon_{cr,\,\theta} \\ \varepsilon_{cr,\,z} \\ \gamma_{cr,\,rz} \end{Bmatrix} \right). \qquad (5.16)$$

Выражение (5.16) приводим к виду:

$$\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\right).$$

Окончательно выражение (5.16) принимает вид:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = [D] \cdot \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_T}_{\{\varepsilon_T\}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{cr,\,r} \\ \varepsilon_{cr,\,\theta} \\ \varepsilon_{cr,\,z} \\ \gamma_{cr,\,rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{cr}\}} \right). \qquad (5.17)$$

Полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела $\mathit{П}$ и работой внешних сил A_W:

$$Э = \mathit{П} - A_W,$$

где энергия упругой деформации тела записывается:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,\,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,\,z} + \tau_{rz}\varepsilon_{el,\,rz}\right) dV = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_V \left\{\sigma\right\}^T \cdot \left\{\varepsilon_{el}\right\} dV, \quad (5.18)$$

где $\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}\right)$; $\{\varepsilon_{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{cr}\}$; $dV = rdrdz$.

Полная деформация $\{\varepsilon\}$ определяется через выражения Коши (1.1):

$$\left\{\varepsilon\right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ u/r \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}.$$

Аппроксимация перемещений u по элементы описывается выражением (1.19):

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} u_i & w_i & u_j & w_j & u_k & w_k & u_l & w_l \end{Bmatrix}^T,$$

следовательно, полная деформация определяется соотношениями (1.1):

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & \frac{N_j}{r} & 0 & \frac{N_k}{r} & 0 & \frac{N_l}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial r} & \frac{\partial N_l}{\partial z} & \frac{\partial N_l}{\partial r} \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_k \\ w_k \\ u_l \\ w_l \end{Bmatrix}}_{\{U\}}, \tag{5.19}$$

Минимизируя потенциальную энергию упругой деформации (5.18) по перемещениям $\{U\}$, получаем выражение:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \int\limits_V [B]^T [D][B]\{U\}\, dV - \int\limits_V [B]^T [D]\{\varepsilon_T\}\, dV - \int\limits_V [B]^T [D]\{\varepsilon_{cr}\}\, dV = 0, \tag{5.20}$$

где объём конечного элемента $dV = r\, dr\, dz$.

Следующим шагом выражение (5.20) приводим к виду:

$$[K]\{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ — глобальные матрица жёсткости; $\{U\}$ — глобальный вектор нагрузки, которые определяются соотношениями

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} [k^{(e)}]; \qquad \{F\} = \sum_{e=1}^{E} \{f^{(e)}\}.$$

Здесь

$$\left[k^{(e)}\right] = \int\limits_{Z_i}^{Z_k} \int\limits_{R_i}^{R_k} r[B]^T[D][B]\, dr\, dz;$$

$$\{f^{(e)}\} = \int\limits_{Z_i}^{Z_k} \int\limits_{R_i}^{R_k} r[B]^T[D]\{\varepsilon_T\}\, dr\, dz + \int\limits_{Z_i}^{Z_k} \int\limits_{R_i}^{R_k} r[B]^T[D]\{\varepsilon_{cr}\}\, dr\, dz.$$

В результате интегрирования матрица $\left[k^{(e)}\right]$ и вектор $\{f^{(e)}\}$ имеют структуру:

$$\left[k^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} & k_{17}^{(e)} & k_{18}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} & k_{27}^{(e)} & k_{28}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} & k_{37}^{(e)} & k_{38}^{(e)} \\ k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} & k_{47}^{(e)} & k_{48}^{(e)} \\ k_{51}^{(e)} & k_{52}^{(e)} & k_{53}^{(e)} & k_{54}^{(e)} & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} & k_{57}^{(e)} & k_{58}^{(e)} \\ k_{61}^{(e)} & k_{62}^{(e)} & k_{63}^{(e)} & k_{64}^{(e)} & k_{65}^{(e)} & k_{66}^{(e)} & k_{67}^{(e)} & k_{68}^{(e)} \\ k_{71}^{(e)} & k_{72}^{(e)} & k_{73}^{(e)} & k_{74}^{(e)} & k_{75}^{(e)} & k_{76}^{(e)} & k_{77}^{(e)} & k_{78}^{(e)} \\ k_{81}^{(e)} & k_{82}^{(e)} & k_{83}^{(e)} & k_{84}^{(e)} & k_{85}^{(e)} & k_{86}^{(e)} & k_{87}^{(e)} & k_{88}^{(e)} \end{bmatrix}; \qquad (5.21)$$

$$\left\{f^{(e)}\right\} = \left\{f_1^{(e)} \quad f_2^{(e)} \quad f_3^{(e)} \quad f_4^{(e)} \quad f_5^{(e)} \quad f_6^{(e)} \quad f_7^{(e)} \quad f_8^{(e)}\right\}^T. \qquad (5.22)$$

При этом значения коэффициентов уравнения (5.21) симметричны относительно главной диагонали, т. е.

$$k_{ij}^{(e)} = k_{ji}^{(e)} \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

или в полном виде

$$\left[k^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} & k_{17}^{(e)} & k_{18}^{(e)} \\ & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} & k_{27}^{(e)} & k_{28}^{(e)} \\ & & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} & k_{37}^{(e)} & k_{38}^{(e)} \\ & & & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} & k_{47}^{(e)} & k_{48}^{(e)} \\ & & & & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} & k_{57}^{(e)} & k_{58}^{(e)} \\ & & \text{сим.} & & & k_{66}^{(e)} & k_{67}^{(e)} & k_{68}^{(e)} \\ & & & & & & & k_{78}^{(e)} \\ & & & & & & & \end{bmatrix}. \qquad (5.23)$$

Значения членов матрицы $\left[k^{(e)}\right]$ и вектора $\left\{f^{(e)}\right\}$ приведены в приложении А.3, на с. 212.

5.4 Проверка достоверности полученного решения

Оценка достоверности полученного аналитического решения может быть проведена с соответствующим численным решением. Однако в этом случае произведём повышение точности 4-точечного шаблона, превратив его в 9-точечный с узлами i, j, k, l, m, n, o, p, q (рисунок 5.3). При этом узлы m, n, p, q расположены на серединах ребер конечного элемента, а узел o — на пересечении линий, соединяющих центры противоположных рёбер.

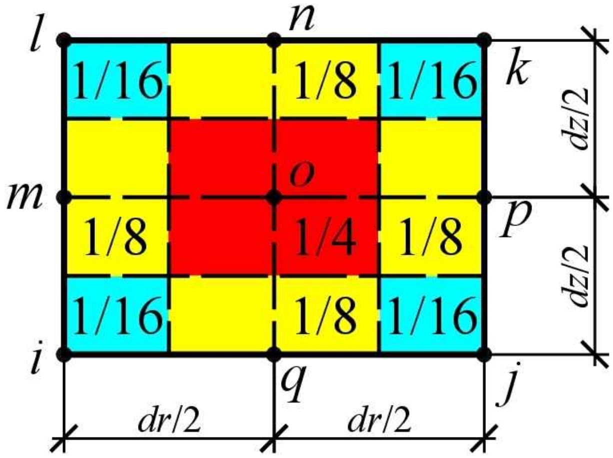


Рисунок 5.3 — 9-точечный уточнённый весовой шаблон

Использование многоточечного шаблона отличается от использования шаблона обычного симплекс-элемента тем, что в симплекс-элементе значение функции определяется в одной точке, как правило, в центре тяжести сечения, т. е. $f = [N]\{\Phi\}$. В случае 9-точечного шаблона происходит суммирование значения функции, определённой в каждом узле со своим «весовым» коэффициентом.

Согласно [98] численно интеграл может быть определён по формуле трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i\left(y_{i-1}+y_i\right) \approx h\left(\frac{y_0+y_2}{2}+y_1\right), \tag{5.24}$$

где $h_i = h = X_1 - X_0 = X_2 - X_1$ — шаг между узлами. В девятиточечном шаблоне расстояние между узлами соответственно равно $dr/2$ и $dz/2$.

Определим «весовые» коэффициенты каждого узла девятиточечного шаблона, с учётом, что $\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \mathrm{d}A$:

$$\begin{aligned}\int f(r,z)\,\mathrm{d}A = \iint f(r,z)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \approx&\\ \approx \int\left[\frac{f_m(z)+f_o(z)}{2}\frac{\mathrm{d}r}{2}+\frac{f_o(z)+f_n(z)}{2}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right]\mathrm{d}z =&\\ = \int \mathrm{d}r\left[\frac{f_m(z)}{4}+\frac{2f_o(z)}{4}+\frac{f_n(z)}{4}\right]\mathrm{d}z \approx&\\ \approx \mathrm{d}r\left[\left(\frac{f_i+2f_m+f_l}{2}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{f_q+2f_o+f_p}{2}\right)\frac{2}{4}+\left(\frac{f_j+2f_n+f_l}{2}\right)\frac{1}{4}\right]\frac{\mathrm{d}z}{2} =&\\ = \mathrm{d}A\left(\frac{f_o}{4}+\frac{f_m}{8}+\frac{f_q}{8}+\frac{f_p}{8}+\frac{f_n}{8}+\frac{f_i}{16}+\frac{f_l}{16}+\frac{f_j}{16}+\frac{f_k}{16}\right).&\end{aligned} \tag{5.25}$$

Для оценки достоверности предложенной методики расчёта двумерной задачи произведём вычисление задачи, рассмотренной ранее в параграфе 3.3.3, на с. 97 и параграфе 4.3, на с. 110. Поскольку в указанных параграфах рассматривали задачи при плоском деформированном состоянии, то примем длину цилиндра двумерной задачи равной 1 м, по торцам раскрепив подвижными шарнирами в направлении оси z. В такой постановке результаты расчёта двумерной задачи должны совпасть с результатами решения задачи при плоском деформированном состоянии. Результаты расчёта приведены в таблицах 5.1–

5.4, в которых: N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени.

Первоначально сравнивают решения задач при постоянном шаге разбиения по времени, полученные численно по 9-точечному шаблону, рассмотренному в настоящем параграфе, и полученном численно-аналитически по коэффициентам, подробно рассмотренным в параграфе 5.3 (таблица 5.1 и таблица 5.2). Результаты обоих решений хорошо согласуются как между собой, так и с решением при плоском деформированном состоянии. Однако численно-аналитическое решение более точное и позволяет получить решение даже при малом количестве интервалов при времени $N_t = 10$ шт. При этом матрица численного решения 9-точечного шаблона вырождается, и решение не может быть найдено.

Анализируя таблицы 5.1 и 5.2, делаем вывод, что результаты при уточнённом центре тяжести конечного элемента хоть и практически совпадают с результатами, когда центр тяжести конечного элемента принимается усреднённым по конечному элементу, но, тем не менее, ближе к результатам одномерных задач, что говорит о большей точности этой методики.

В таблицах 5.3 и 5.4 приводятся результаты решения задачи при помощи численно-аналитического решения при переменном шаге: логарифмическом (таблица 5.3) и по геометрической прогрессии (таблица 5.4). Наибольшую точность при этом имеет решение, при котором интервалы времени делятся по геометрической прогрессии при отношении величины последнего интервала к первому $k_g = 10^4$.

При этом во всех случаях видно, что увеличение количества интервалов по высоте цилиндра N_z никак не сказывается на точности полученного решения.

5.5 Выводы по главе

1. Впервые получены коэффициенты матрицы жесткости и вектора нагрузок, учитывающие температурные деформации и деформации ползучести полимерного материала, непосредственным интегрированием для заданной функции формы прямоугольного конечного элемента.

Таблица 5.1 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при *постоянном* шаге во времени, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	Фактор	Центр тяжести		Середина элемента	
				$i = 1$	$i = N_r$	$i = 1$	$i = N_r$
21	11	20	σ_r	−0.4426	−0.0882	−0.4452	−0.0923
			σ_θ	−4.6964	5.0646	−4.7172	5.0531
51			σ_r	−0.1338	−0.0365	−0.1345	−0.0372
			σ_θ	−4.1800	5.1674	−4.1827	5.1654
101			σ_r	−0.0576	−0.0185	−0.0578	−0.0187
			σ_θ	−3.9816	5.2083	−3.9822	5.2078
21	11	50	σ_r	−0.4468	−0.0883	−0.4494	−0.0925
			σ_θ	−4.7812	5.0732	−4.8019	5.0618
51			σ_r	−0.1357	−0.0366	−0.1365	−0.0373
			σ_θ	−4.2675	5.1760	−4.2701	5.1740
101			σ_r	−0.0586	−0.0185	−0.0589	−0.0187
			σ_θ	−4.0698	5.2169	−4.0704	5.2164
21	11	100	σ_r	−0.4482	−0.0884	−0.4507	−0.0925
			σ_θ	−4.8079	5.0759	−4.8286	5.0646
51			σ_r	−0.1364	−0.0366	−0.1371	−0.037473
			σ_θ	−4.2953	5.1787	−4.2979	5.1767
101			σ_r	−0.0590	−0.0185	−0.0592	−0.0187
			σ_θ	−4.0980	5.2196	−4.0986	5.2191

2. Достоверность полученных коэффициентов доказана сравнением решения одномерной задачи с двумерной, искусственно приведённой к плоскому деформированному состоянию.

3. Доказана эффективности применения переменного шага по времени и уточнённого положения центра тяжести конечного элемента по сравнению с «классическим» усреднённым по координатам узлов.

4. В результате предложенных оптимизационных подходов достигается лучшая точность определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел с учётом наличия температурного поля и высокоэластических деформаций материала.

Таблица 5.2 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при *постоянном* шаге во времени, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно-аналитически*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	Фактор	Центр тяжести		Середина элемента	
				$i = 1$	$i = N_r$	$i = 1$	$i = N_r$
21	11	10	σ_r	−0.3052	−0.0884	−0.4003	−0.0926
			σ_θ	−4.4432	5.0378	−4.5346	5.0296
51			σ_r	−0.0999	−0.0365	−0.1185	−0.0372
			σ_θ	−3.7821	5.1410	−3.7976	5.1396
101			σ_r	−0.0383	−0.0184	−0.0443	−0.0186
			σ_θ	−2.9375	5.1791	−2.9400	5.1787
21	11	20	σ_r	−0.3138	−0.0887	−0.4083	−0.0929
			σ_θ	−4.6041	5.0574	−4.6951	5.0494
51			σ_r	−0.1089	−0.0366	−0.1273	−0.0374
			σ_θ	−4.1612	5.1662	−4.1780	5.1648
101			σ_r	−0.0510	−0.0185	−0.0559	−0.0187
			σ_θ	−3.9765	5.2080	−3.9809	5.2077
21	21	20	σ_r	−0.3138	−0.0887	−0.4083	−0.0929
			σ_θ	−4.6041	5.0574	−4.6951	5.0494
51			σ_r	−0.1089	−0.0366	−0.1273	−0.0374
			σ_θ	−4.1612	5.1662	−4.1780	5.1648
101			σ_r	−0.0510	−0.0185	−0.0559	−0.0187
			σ_θ	−3.9765	5.2080	−3.9809	5.2077
21	11	50	σ_r	−0.3184	−0.0889	−0.4127	−0.0931
			σ_θ	−4.6890	5.0660	−4.7798	5.0580
51			σ_r	−0.1109	−0.0367	−0.1293	−0.0374
			σ_θ	−4.2486	5.1747	−4.2654	5.1733
101			σ_r	−0.0520	−0.0186	−0.0570	−0.0187
			σ_θ	−4.0647	5.2163	−4.0691	5.2162
21	11	100	σ_r	−0.3198	−0.0889	−0.4141	−0.0931
			σ_θ	−4.7158	5.0688	−4.7158	5.0608
51			σ_r	−0.1116	−0.0367	−0.1300	−0.0374
			σ_θ	−4.2764	5.1774	−4.2932	5.1761
101			σ_r	−0.0524	−0.0186	−0.0573	−0.0188
			σ_θ	−4.0929	5.2193	−4.0973	5.2189

Таблица 5.3 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при *логарифмическом* шаге во времени, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно-аналитически*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	σ_r, МПа		σ_θ, МПа	
			$i = 1$	$i = N_r$	$i = 1$	$i = N_r$
21	11	7	-0.2778	-0.0864	-3.9306	$+4.9251$
51			$+0.0613$	-0.0354	$+2.9673$	$+4.9856$
101			$+9.2304$	-0.0086	$+754.65$	$+2.4098$
21	11	10	-0.2963	-0.0875	-4.2788	$+4.9883$
51			-0.1010	-0.0361	-3.8268	$+5.0958$
101			-0.0468	-0.0183	-3.6357	$+5.1374$
21	11	20	-0.3116	-0.0884	-4.5640	$+5.0386$
51			-0.1079	-0.0365	-4.1209	$+5.1471$
101			-0.0505	-0.0185	-3.9359	$+5.1889$
21	21	20	-0.3116	-0.0884	-4.5640	$+5.0386$
51			-0.1079	-0.0365	-4.1209	$+5.1471$
101			-0.0505	-0.0185	-3.9359	$+5.1889$
21	11	50	-0.3173	-0.0887	-4.6688	$+5.0584$
51			-0.1104	-0.0366	-4.2282	$+5.1669$
101			-0.0518	-0.0185	-4.0441	$+5.2087$
21	11	100	-0.3193	-0.0888	-4.7062	$+5.0651$
51			-0.1113	-0.0367	-4.2667	$+5.1737$
101			-0.0523	-0.0186	-4.0831	$+5.2155$

Таблица 5.4 — Результаты расчёта двухмерной осесимметричной задачи при шаге во времени *по геометрической прогрессии*, матрица жёсткости и вектор нагрузок получены *численно-аналитически*; N_r — количество конечных элементов по радиусу; N_z — количество конечных элементов по высоте цилиндра; N_t — количество интервалов по времени

N_r, шт.	N_z, шт.	N_t, шт.	σ_r, МПа		σ_θ, МПа	
			$i = 1$	$i = N_r$	$i = 1$	$i = N_r$
$k_g = 10^2$						
21	11	7	+0.3355	−0.0675	+7.0244	+3.8314
51			+0.1263	−0.0280	+5.0478	+3.9396
101			−0.7818	−0.0148	−64.555	+4.1528
21	11	10	+9.9247	−0.1578	+175.04	+9.0654
51			+6.1868	−0.0800	+257.68	+11.327
101			+3.6604	−0.0415	+298.97	+11.690
21	11	20	−0.2994	−0.0874	−4.3406	+4.9806
51	(21)		−0.1025	−0.0361	−3.8927	+5.0886
101			−0.0477	−0.0183	−3.7060	+5.1302
21	11	50	−0.3128	−0.0884	−4.5873	+5.0383
51			−0.1085	−0.0365	−4.1451	+5.1466
101			−0.0508	−0.0185	−3.9604	+5.1884
21	11	100	−0.3170	−0.0887	−4.6646	+5.0551
51			−0.1103	−0.0366	−4.2241	+5.1637
101			−0.0517	−0.0185	−4.0401	+5.2054
$k_g = 10^4$						
21	11	7	+1.7872	−0.0815	+33.689	+4.6391
51			+1.4867	−0.0330	+63.008	+4.6446
101			+0.9397	−0.0166	+77.317	+4.6696
21	11	10	+27.353	+0.1377	+498.93	−8.0629
51			+19.668	+0.0657	+828.11	−9.3675
101			+11.883	+0.0339	+975.16	−9.5731
21	11	20	−0.0552	−0.0816	+0.0719	+4.6452
51	(21)		+0.0699	−0.0338	+3.3457	+4.7668
101			+0.0563	−0.0171	+4.8182	+4.8071
21	11	50	−0.3034	−0.0877	−4.4130	+4.9988
51			−0.1041	−0.0362	−3.9585	+5.1065
101			−0.0483	−0.0183	−3.7614	+5.1481
21	11	100	−0.3129	−0.0884	−4.5886	+5.0382
51			−0.1085	−0.0365	−4.1464	+5.1464
101			−0.0508	−0.0185	−3.9617	+5.1883

Глава 6. Расчёт адгезионного соединения

6.1 Постановка задачи

Среди самых известных работ, посвящённых исследованиям в области адгезионных соединений, можно выделить труды проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова [95, 96, 97, 100]. Однако, необходимо отметить, что расчёт адгезионного соединения выполнялся при помощи метода пограничного слоя, с использованием некоторых усреднённых параметров. Произведём уточненный расчёт при помощи метода конечных элементов с использованием всех оптимизационных решений, приведённых в прошлых главах.

Проводится исследование прочности адгезионого соединения двух цилиндрический тел (субстрактов), постановка задачи представлена на рисунке 6.1. Алгоритм моделирования адзегионного соединения реализован в пакете прикладных программ, на которое получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [66] (приложение С.3, на с. 286)

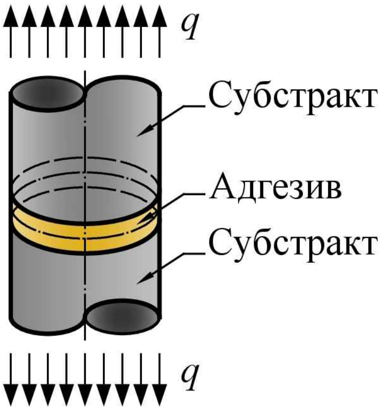


Рисунок 6.1 — Постановка задачи расчёта адгезивного соединения

Исходная условия задачи следующие:

- **Субстракт** — стальные диски толщиной 1.2 мм;
- **Адгезив** — сетчатый полимер — эпоксидная смола ЭДТ-10, компонентами которой являются КДА/ТЭАТ/Спирт/Ацетон в весовых частях 50/5/30/15.

Расчётная схема поставленной задачи представлена на рисунке 6.2. Красным цветом показан конечный элемент, в котором по результатам последующих расчётов возникают наибольшие касательные напряжения. Поскольку задача симметрична относительно середины адгезива, рассчётная схема состоит только из одной половины.

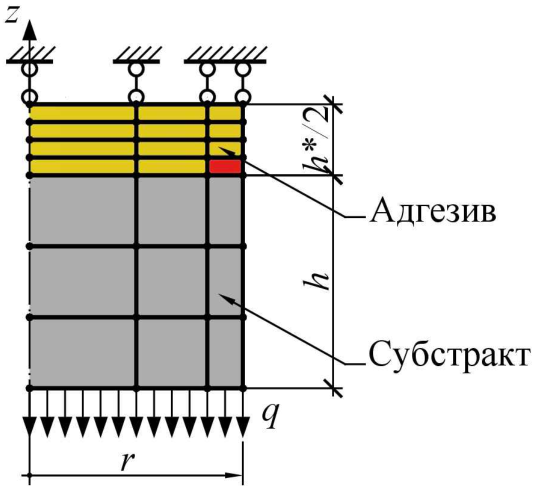


Рисунок 6.2 — Расчётная схема расчёта адгезивного соединения

Физико-механические параметры субстракта и адгезива:

Адгезив — изменение физико-механических параметров принято согласно [11, 95], где T_K — температура в градусах Кельвина:

$$E(T) = -18.2T_K + 8\,200\,\text{МПа};$$

$$E_{\infty 1}(T) = \begin{cases} 2.4 \cdot 10^6 \dfrac{1}{T_K} - 6120\,\text{МПа для } T_K < 370\,K; \\ 2.23T_K - 640\,\text{МПа для } T_K \geq 370\,K; \end{cases}$$

$$E_{\infty 2}(T) = 0.1E_{\infty 1}(T);$$

$$m_1^*(T) = m_2^*(T) = -0.0155T_K + 7.73\,\text{МПа};$$

$$\eta_{01}^*(T) = 36\,000 \exp\left(\frac{9\,500}{T_K} - 20\right)\,\text{МПа} \cdot \text{с};$$

$$\eta_{02}^*(T) = 36\,000 \exp\left(\frac{35\,400}{T_K} - 90\right)\,\text{МПа} \cdot \text{с};$$

$$\nu(T) = \text{const} = 0.37.$$

Субстракт

$$E(T) = \text{const} = 2 \cdot 10^5\,\text{МПа};$$
$$\nu(T) = \text{const} = 0.33.$$

Как видно из представленных физико-механических параметров адгезива, учёт ползучести полимера ведётся при помощи двух спектров времён релаксации, «старшего» $\varepsilon_{cr,I}$ и «младшего» $\varepsilon_{cr,II}$:

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr,I} + \varepsilon_{cr,II}.$$

Расчётные параметры поставленной задачи: температура субстракта и адгезива $T = 30\,^\circ C$; растягивающее напряжение на поверхностях металлических пластин $q = 70\,\text{МПа}$; внешний радиус соединения $r = 12\,\text{мм}$; высота субстракта $h = 1.2\,\text{мм}$; половина высоты адгезива $h^*/2 = 0.09 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = 0.09\,\text{мм}$; весь расчётный период представлен 251 узлом (количество интервалов по времени $N_t = 250$); расчёт проводился от $t_1 = 0\,\text{ч}$ до $t_{251} = 18\,518.5167\,\text{ч} = 771.6\,\text{сут} \approx$ 2 года 42 дня; отношение последнего интервала времени к самому первому принято $k_t = \dfrac{t_{Nt} - t_{Nt-1}}{t_2 - t_1} = 10^6$; половина толщины адгезива представлена 20-прямоугольными конечными элементами; субстракт — 10-прямоугольными конечными элементами; отношение ширины конечного элемента, находящегося вблизи торца цилиндра, к ширине конечного элемента, находящегося в центре рассчитываемого объекта, $k_r = \dfrac{r_{N_r} - r_{Nr-1}}{r_2 - r_1} = 0.1$; по высоте в пределах каждого слоя конечные элементы имеют одинаковую высоту.

Результаты расчёта задачи представлены на рисунках 6.3–6.8. Анализ результатов показывает, что наибольшие касательные напряжения, как и говорилось ранее, возникают в конечном элементе, выделенном красным цветом на рисунке 6.2.

По дальнейшему анализу делаем вывод, что максимальные касательные напряжения (по абсолютной величине), наблюдаются в узле времени с индексом 134, что соответствует 28.0581 ч. График изменения касательных напряжений представлен в таблице 6.1.

Таблица 6.1 — Результаты расчёта адгезионного соединения: изменение касательных напряжений во времени

Фактор	Индекс узла времени		
	1	134	251
t, ч	0	28.0581	$1.8519 \cdot 10^4$
τ_{rz}, МПа	26.5572	30.3204 (max)	29.3632

В результате анализа наблюдается основное различие между настоящей работой и результатами в работах [95, 96, 97, 100]. Объясняется это тем, что в настоящей работе адгезионное соединение моделируется максимально полно методом конечных элементов, в то время, как в вышеуказанных работах используется метод «пограничного слоя».

Анализируя графики 6.3–6.5, видим, что и в радиальных, и в окружных, и в осевых напряжениях также наблюдаются явления, связанные с явлением реологии полимера, однако, наличие деформаций ползучести приводит к росту вышеперечисленных напряжений.

Выводы в работах [95, 96, 97, 100] показывают, что с течением времени разрушение образца произойдёт в результате значительного роста касательных напряжений, доходящих до уровня растягивающих усилий $q = 70$, однако, моделирование при помощи метода конечных элементов показывает, что в некоторый момент времени уровень касательных напряжений достигает своего максимума и происходит его снижение за счёт роста сдвиговых деформаций ползучести (деформации по спектрам времён релаксации полимера приводятся на рисунке 6.7). Так, максимальный уровень касательных напряжений даже не дотягивает до половины растягивающего усилия, т.е.

$$\tau_{rz,max} < \frac{q}{2}.$$

Интересен результат анализа графиков на рисунке 6.8, согласно которым упругая деформация ε_{el} на протяжении всего периода времени меняется несущественно, создавая основной уровень касательных напряжений в самом начале. Полная деформация ε_{full} растёт за счёт деформаций ползучести ε_{cr}, максимальный уровень которых примерно на 80 % оказывается больше, чем упругие деформации. Если же говорить о высокоэластических, то деформации второго спектра времён релаксации значительно вырастают к концу расчётного периода, но при этом их вклад в общую деформацию ползучести, по сравнению с высокоэластическими деформациями первого спектра, остаётся слишком малым, чтобы как-то влиять на напряжённо-деформированное состояние.

6.2 Сравнение полученных результатов с иными теориями

Главное сравнение полученных результатов нужно проводить с работами [95, 96, 97, 100]. Для удобства наложения графиков из диссертации и полученных проф. Р. А. Турусовым аппроксимируем результаты вышеуказанных работ при помощи функции вида

$$f(x) = ax^b + c.$$

Результатом аппроксимации данных проф. Р. А. Турусова с достоверностью 0.9977 является зависимость

$$\tau_{rz} = 14.13 \cdot t^{0.09306} + 13.57\,\text{МПа}, \tag{6.1}$$

где t — время, ч.

Совпадение результатов решения проф. Р. А. Турусова с апросимирующей функцией представлено в таблице 6.2.

Таблица 6.2 — Результаты решения проф. Р. А. Турусова с аппроксимирующей функцией (6.1)

Напряжение τ_{rz}, МПа	Время, мин				
	1	111	11 111	1 111 111	111 111 111
Проф. Р. А. Турусов	23.9400	27.6500	35.9700	49.8900	67.3500
Аппроксимация (6.1)	23.2231	28.5325	36.5402	48.8303	67.6960

С другой стороны, одним из показателей достоверности полученных результатов может быть сравнение с решением по линеаризованной теории, при которой коэффициент начальной релаксационной вязкости не зависит от функции напряжений, а является постоянной величиной:

$$\eta_s^* = \eta_0, s^* = \text{const}.$$

На рисунке 6.9 представлено сравнение результатов с иными теориями: а — сравнение результата, полученного с использованием нелинейного уравнения связи Максвелла-Гуревича, с результатом, полученным с применением линеаризованного уравнения; б — эффект неустановившейся ползучести, наблюдаемый с использованием нелинейного уравнения связи Максвелла-Гуревича; в — сравнение результата, полученного с использование нелинейного и линеаризованного уравнений с результатом проф. Р. А. Турусова.

Совпадение решений, полученных при помощи нелинейного уравнения и линеаризованного выражения, представленных на рисунке 6.9а в конце процесса ползучести, свидетельствует, в том числе, о работоспособности предложенной методики. Несовпадение этих графиков в самом начале объясняется неустановившейся ползучестью (рисунок 6.9б), учитываемой нелинейным уравнением Максвелла-Гуревича и неучитываемой линеаризованным уравнением.

На рисунке 6.9в видно значительное отличие между решениями в настоящей диссертационной работе и решением проф. Р. А. Турусова. Необходимо отметить, что на рисунке 6.9в фиолетовая кривая на участке времени до 1 мин носит теоретический характер в соответствие с выражением (6.1). Анализ результатов в конце периода показывает, что кривая касательных напряжений в соответствии с решением проф. Р. А. Турусова не отражает какую-либо возможную релаксацию напряжений, в результате чего возможно разрушение адгезионного соединения. Предлагаемая в диссертационной работе методика, наоборот, полностью отражает возможную релаксацию напряжений и даёт прогноз, по которому разрушения адгезионного соединения при оценке длительной прочности не произойдёт.

6.3 Прочность адгезионного соединения при различных температурах

Поскольку физико-механические параметры адгезива, согласно выражению (6.1), являются значительными функциями температуры, был проведен расчет напряженно-деформированного состояния адгезионного соединения при следующих неизменных во времени температурных режимах: 0, 10, 20 и 30 $^\circ C$. При больших температурах происходило значительное снижение физико-механических параметров, в результате чего задача приобретала геометрическую нелинейность, которую в рамках диссертационной работы не учитывают. Результаты расчёта изменения касательных напряжений в адгезиве в нелинейной и линеаризованной постановках с течением времени представлены на рисунке 6.10

Хорошо видно, что расчёт по нелинейной и линеаризованным теориям даёт хорошее совпадение в конце процесса ползучести, однако линеаризованный подход может быть использован для облегчения процесса расчёта.

Изменение температуры от 0 до 30 $^\circ C$ практически не сказывается на величине максимального напряжения, однако влияет на период, когда стабилизируется максимальное касательное напряжение; при росте температуры напряжение стабилизируется при меньшей температуре. Так, при температуре 0 $^\circ C$ время стабилизации напряжения даже выходит за исследуемый период времени.

6.4 Экспериментальная апробация расчётной модели

Для апробации расчётной конечно-элементной модели проведены опытные исследования. Из алюминиевой болванки изготовлено 10 пар заготовок для соединения их адгезивом (рисунок 6.11, а). Узкая часть образцов принята такой же, как и в работах проф. А. С. Фрейдина и проф. Р. А. Турусова [95, 96, 97, 100], а также во время конечно-элементного моделирование в параграфе 6.2, т. е. $d = 2.4$ см (рисунок 6.11, б).

Поскольку толщина адгезива очень мала (примерно $h^*/2 = 0.09 \cdot 10^{-3}$ м = 0.09 мм), то необходимо оценить шероховатость поверхности алюминиевых образцов. Для этого использовался профилометр модели 130 (рисунок 6.12, а). Испытания показали среднее арифметическое из абсолютных значений отклонений профиля в пределах базовой длины $Ra = 1.9295$ мкм (рисунок 6.12, б). Значение параметра Ra более чем на порядок меньше толщины слоя адгезива, что позволяет говорить о работоспособности применённой конечно-элементной модели и пренебрежения учёта шероховатости в ней.

В качестве адгезива использована эпоксидная смола ЭДТ-10, компонентами которой являются КДА/ТЭАТ/Спирт/Ацетон в весовых частях 50/5/30/15 (рисунок 6.13).

Для испытания подготовленных образцов на нормальный отрыв использовалась универсальная испытательная машина WP-300 с компьютерной системой сбора и обработки данных GUNT (рисунок 6.14). Для обеспечения постоянства внешних факторов испытания проводились в климатической камере HTKK-1.8/2/2 при постоянной температуре 20 °C. Изготовлены 10 алюминиевых болванок, залитых эпоксидной смолой (рисунок 6.15).

Выполнена серия испытаний 10 образцов на растяжение, в результате которой получена средняя нагрузка, приводящая к разрушению адгезионного соединения, равная 4.9 кН (рисунок 6.16, а), что соответствует среднему напряжению в образцах на месте соприкосновения алюминия с эпоксидной смолой равному $p = 10.8314$ МПа. Исследование образца после испытания демонстрирует явное адгезионное разрушение (рисунок 6.16, б). Математическое моделирование показало, что разрушающее напряжение при этом составляет $\tau_{adhezive} = 4.10$ МПа.

Произведён прогноз теоретического времени разрушения. Полученный уровень напряжения $\tau_{adhezive}$ был принят за допускаемый уровень, превышение которого приводит к разрушению адгезионного соединения. Далее от уровня нагружения, приводящего к моментальному разрушению адгезионного соединения $F = 4.9$ кН происходило постепенное снижение нагрузки с шагом 0.05 кН. Параллельно путем математического конечно-элементного моделирования определялось теоретическое время разрушения образца. Снижение нагрузки продолжалось до тех пор, пока согласно математической модели или время разрушения не превысит 24 часа, или в результате релаксации максимальные касательные напряжения через некоторый момент времени начнут уменьшать свой уровень в результате чего разрушение не произойдёт вовсе. Имею теоретическое время разрушения были проведены испытания над реальными образцами, результаты которых приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3 — Результаты проведения испытаний адгезионного соединения на нормальный отрыв

Приложенная растягивающая нагрузка, кН	Теоретическое время разрушения, ч	Фактическое среднее время разрушения, ч	Проведённое количество испытаний, шт	$\delta, \%$
4.90	0.00	0.00	10	0
4.85	2.00	2.10	10	5
4.80	4.50	4.75	10	6
4.75	8.00	8.40	5	5
4.70	11.80	12.50	5	6
4.65	16.50	18.00	3	9
4.60	22.30	24.75	3	11

Анализ полученных результатов показывает, что моделирование адгезионного соединения в пределах 24 часов даёт весьма хорошее согласование теории и эксперимента.

Погрешность определения времени разрушения адгезионного соединения выросла при увеличении теоретического времени разрушения соединения, что может быть связано с многими причинами: снижением количества проводимых испытаний, отличием реальных физико-механических параметров адгезива от заложенных в математической модели, погрешностью в образцах при их заливке, времени отверждения и т.д.

Необходимо отметить и явные недостатки проведенных испытаний и дать рекомендации будущим исследователям к их устранению.

Математическая модель учитывает два спектра времён релаксации полимера: «старший» и «младший». При этом второй спектр начинает проявляться лишь при длительных периодах испытаний — свыше 100 часов. Таким образом в эксперименте оценена прочность адгезионного соединения исключительно на основании развития высокоэластических деформаций полимера «старшего» спектра.

Имеющаяся зависимость физико-механических параметров полимера позволяет учитывать высокоэластические деформации в широком спектре температур. Описанные выше испытания проводились при постоянной температуре окружающей среды 20 °C. Представляет большой научный интерес исследование прочности адгезионного соединения и при других температурных режимах, в том числе и непостоянных во времени.

Прочность адгезионного соединения оценивалась только по одному параметру — предполагаемому времени разрушения. Провести сопоставление теории с экспериментом можно и по иным параметрам: развитию перемещений в адгезиве, оценке уровня напряжений в полимере, в том числе и поляризационным методом. Однако для этого требуются специализированная лаборатория и в рамках типового лабораторного оборудования не может быть реализовано.

6.5 Выводы по главе

1. Уточнено решение адгезионного соединения при помощи метода конечных элементов, в результате чего оценка длительной прочности имеет иной результат, нежели при решении, полученном при помощи метода пограничного слоя.

2. Доказано, что при оценке прочности адгезионного соединения допускается использовать линеаризованное уравнение вместо нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича для снижения времени и трудозатрат на получения решения.

3. Сделан вывод, что изменение температур не влияет на максимальное значение максимального касательного напряжения, однако значительно сказывается на времени, когда касательное напряжения приходит к некоторому конечному значению.

4. Экспериментально доказана работоспособность предложенной математической конечно-элементной модели по расчёту длительной прочности адгезионного соединения на нормальный отрыв.

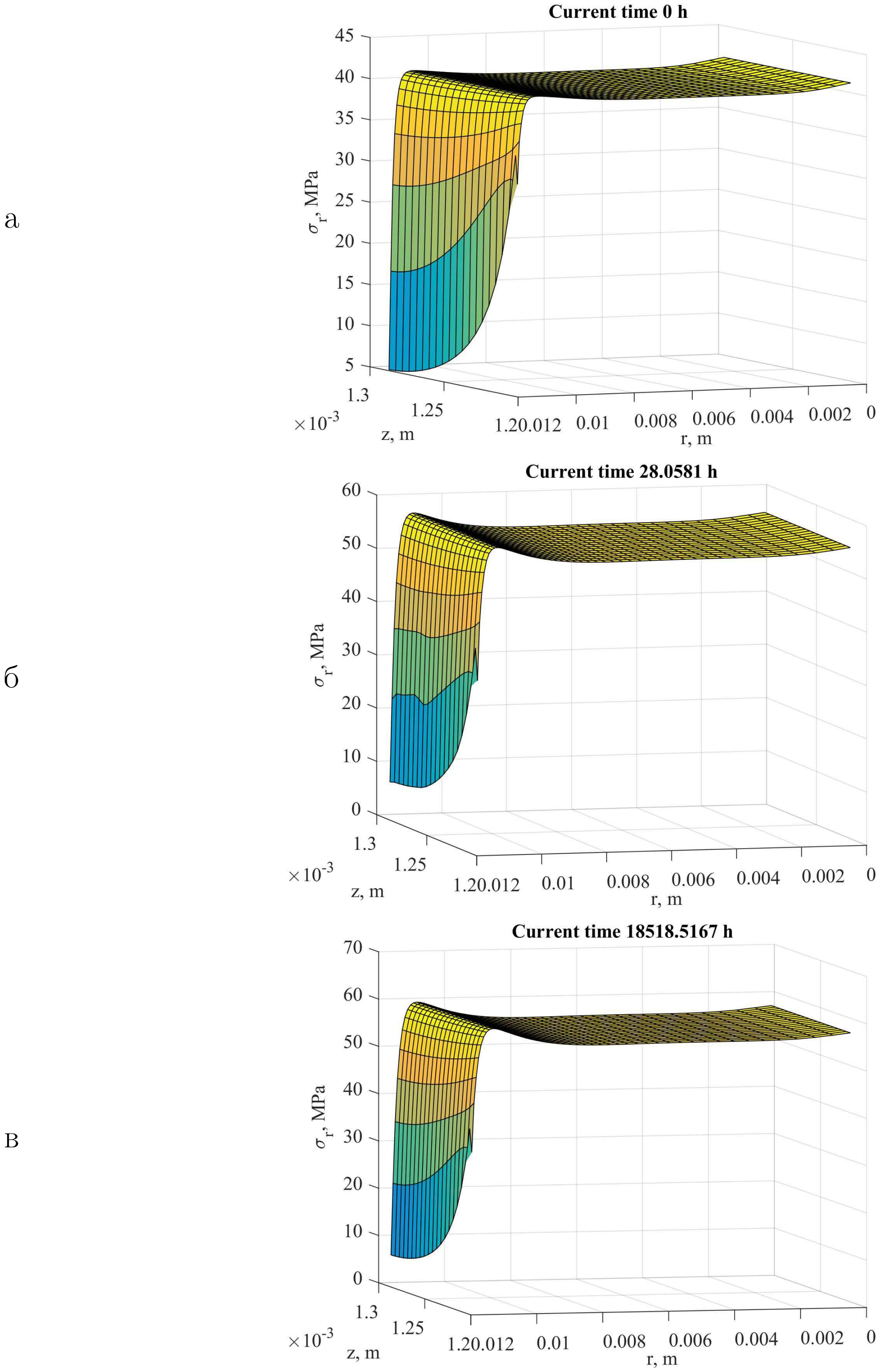


Рисунок 6.3 — Изменение радиальных напряжений σ_r в адгезиве с течением времени

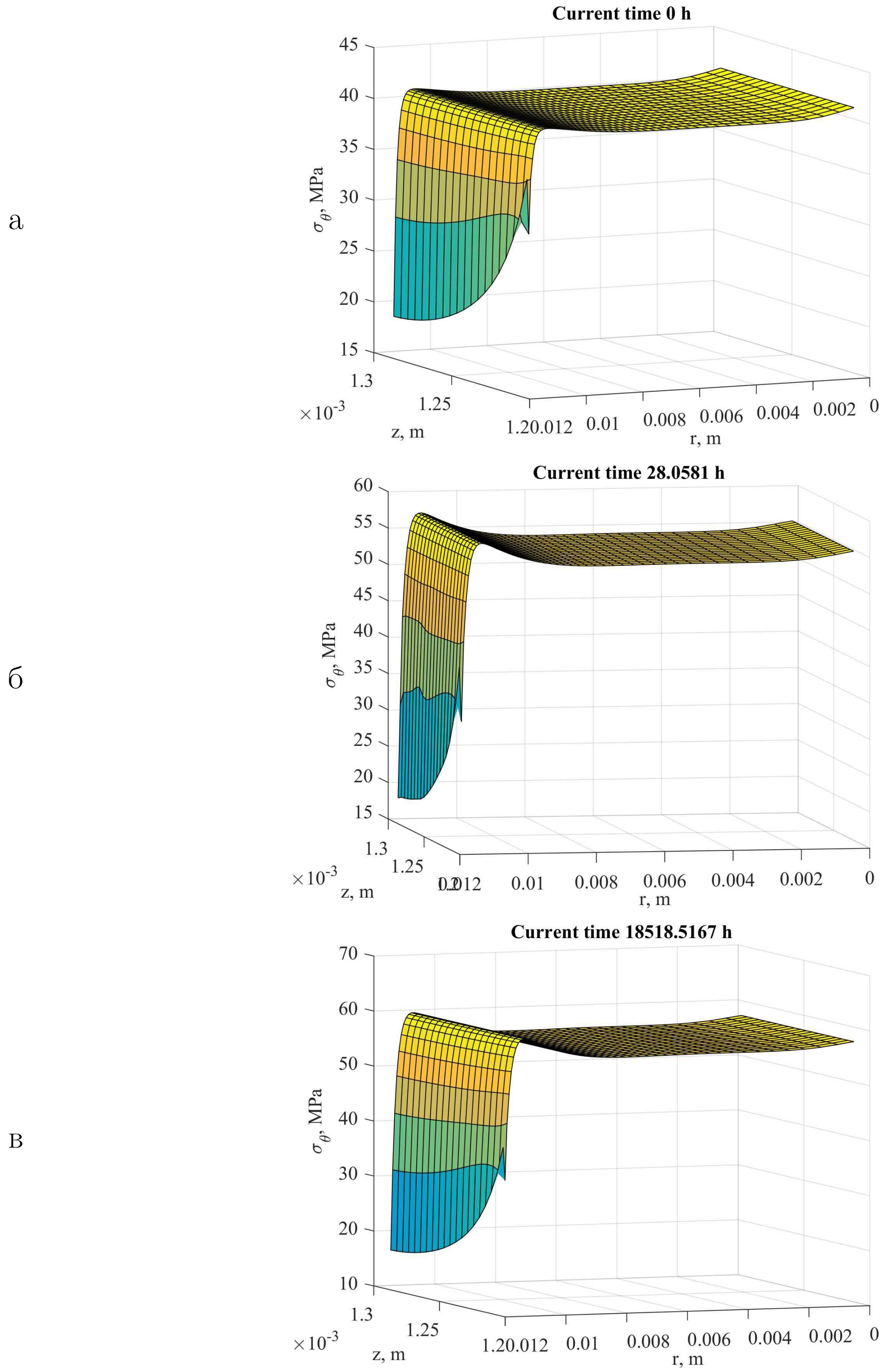


Рисунок 6.4 — Изменение окружных напряжений σ_θ в адгезиве с течением времени

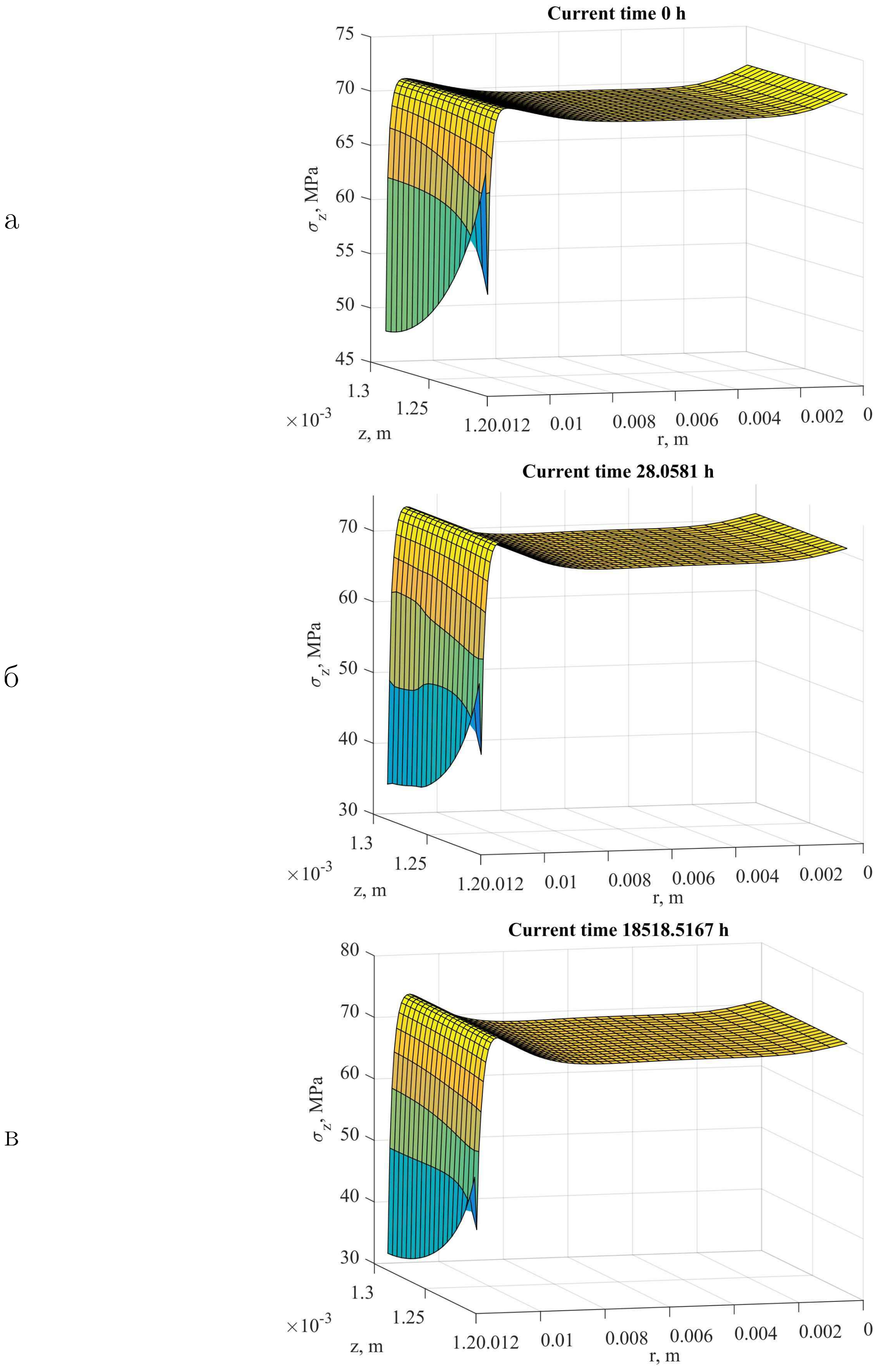


Рисунок 6.5 — Изменение осевых напряжений σ_z в адгезиве с течением времени

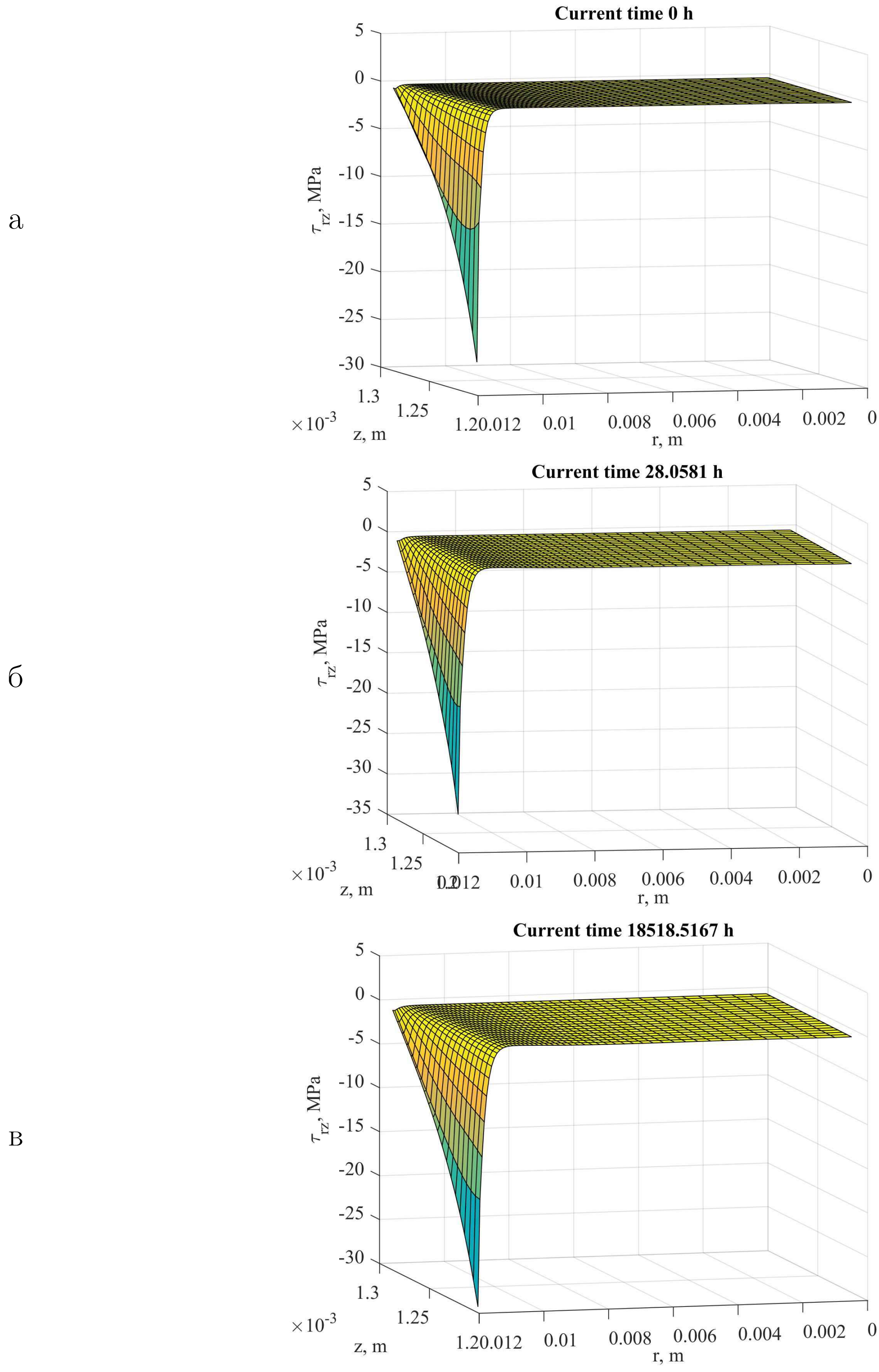


Рисунок 6.6 — Изменение касательных напряжений τ_{rz} в адгезиве с течением времени

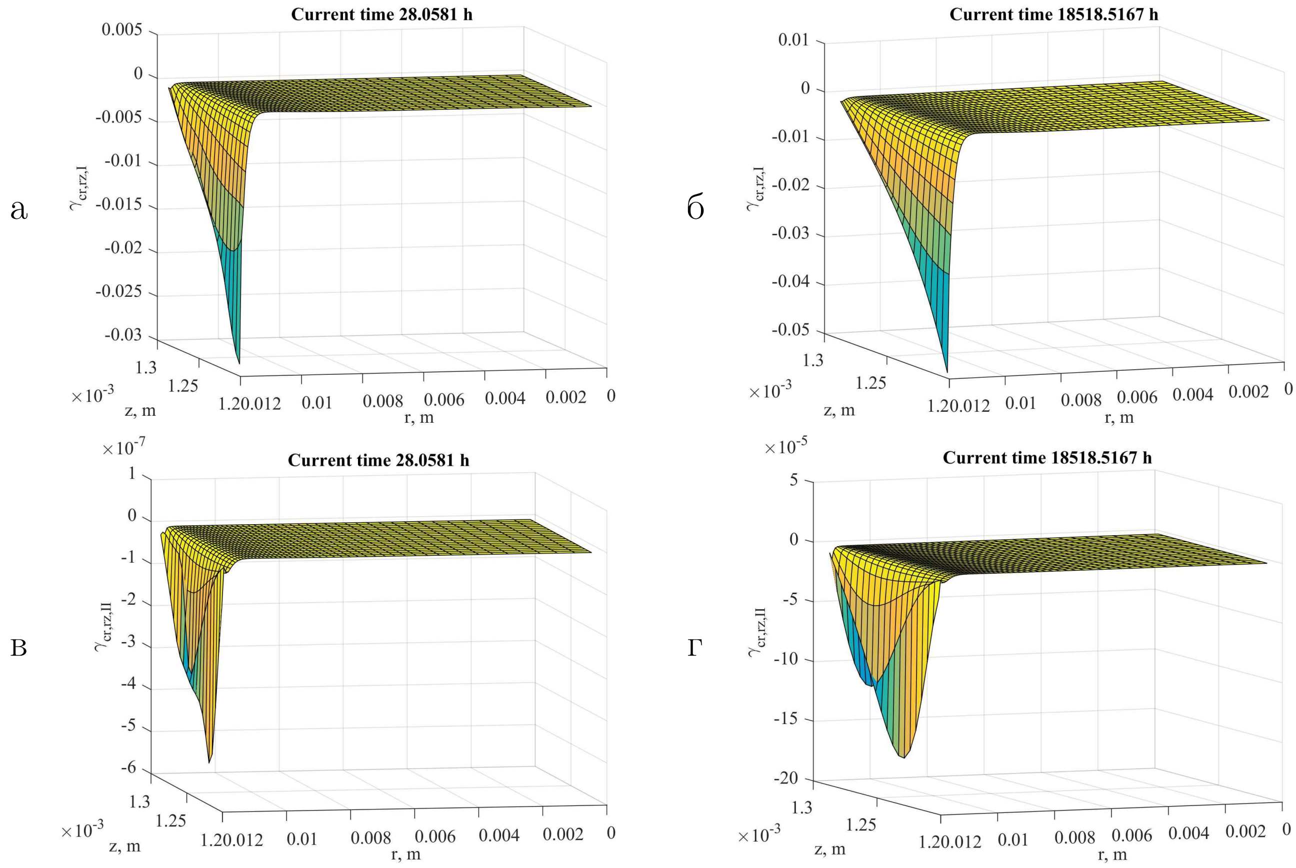


Рисунок 6.7 — Изменение сдвиговых деформаций ползучести в различные моменты времени: а, б — деформации I спектра; в, г — деформации II спектра

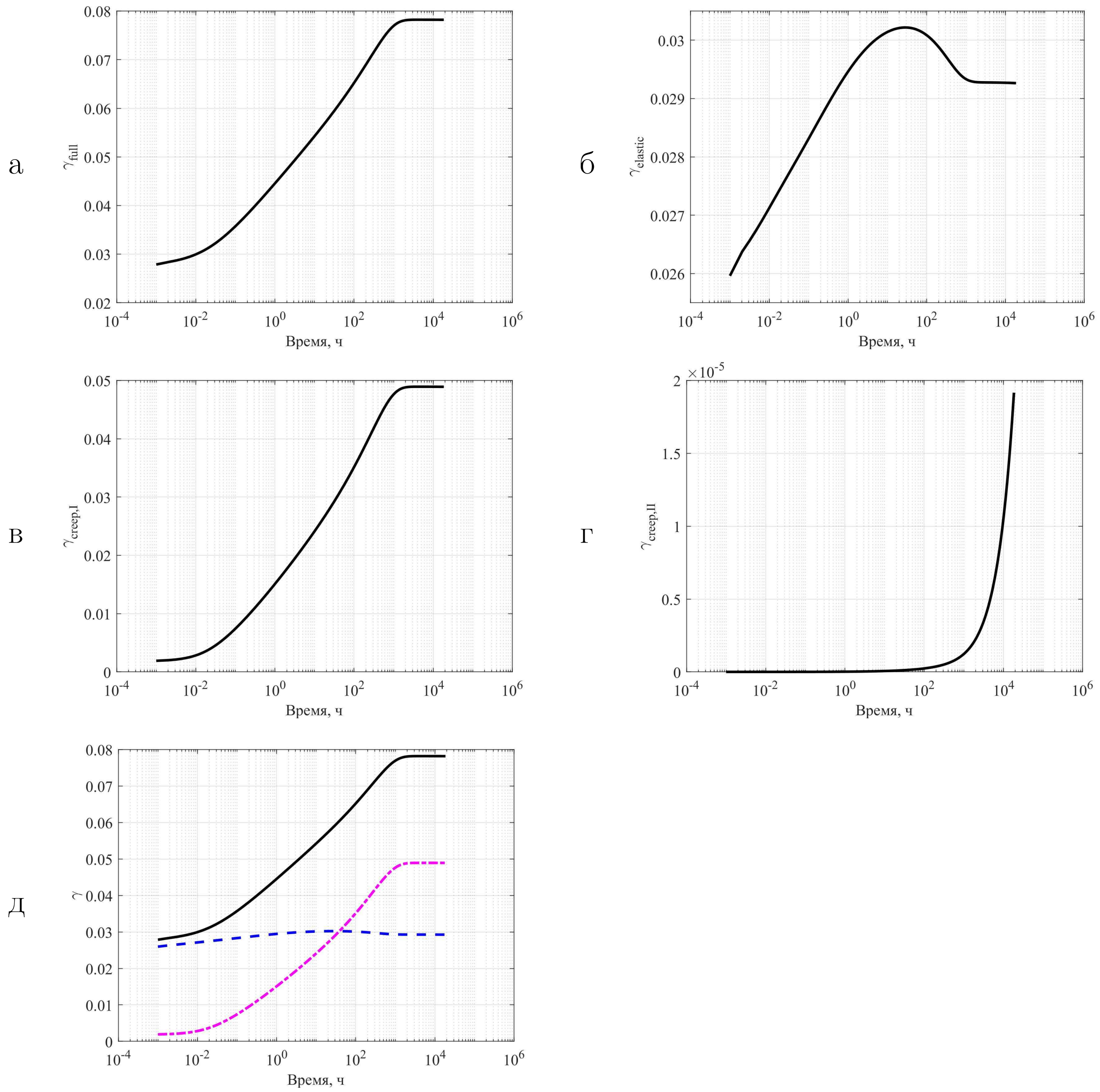


Рисунок 6.8 — Изменение сдвиговых деформаций во времени: а — полные деформации; б — упругие составляющие; в — высокоэластическая деформация, I спектр; г — высокоэластическая деформация, II спектр; д — сравнение составляющих деформаций: сплошная чёрная линия — полная деформация; пунктирная синяя — упругая составляющая, штрих-пунктирная фиолетовая — суммарная деформация ползучести

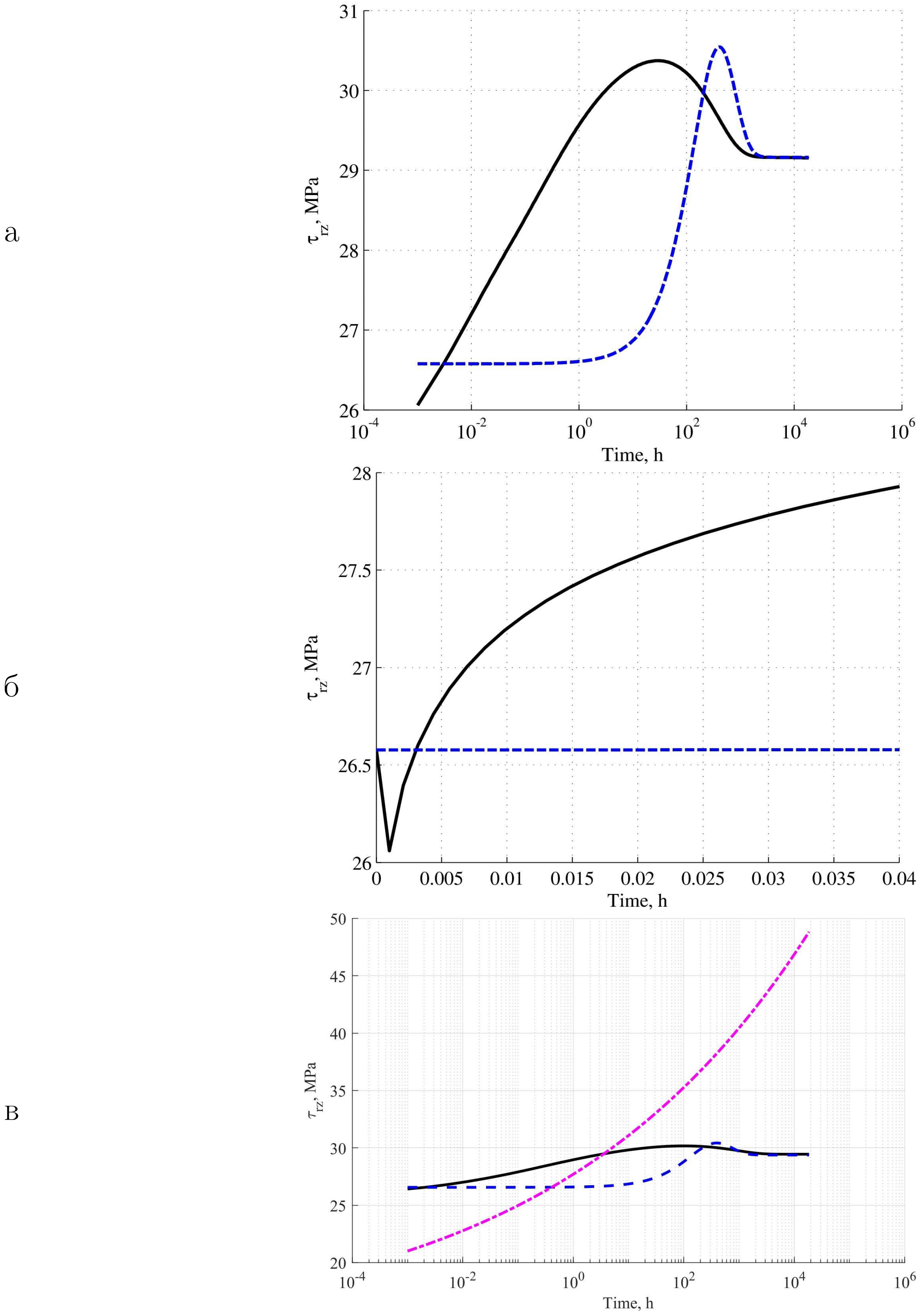


Рисунок 6.9 — Сравнение полученных результатов с иными теориями: черная сплошная линия — решение с использованием уравнения Максвелла-Гуревича; голубая пунктирная линия — решение по линеаризованной теории; фиолетовая штрих-пунктирная линия — решение проф. Р. А. Турусова

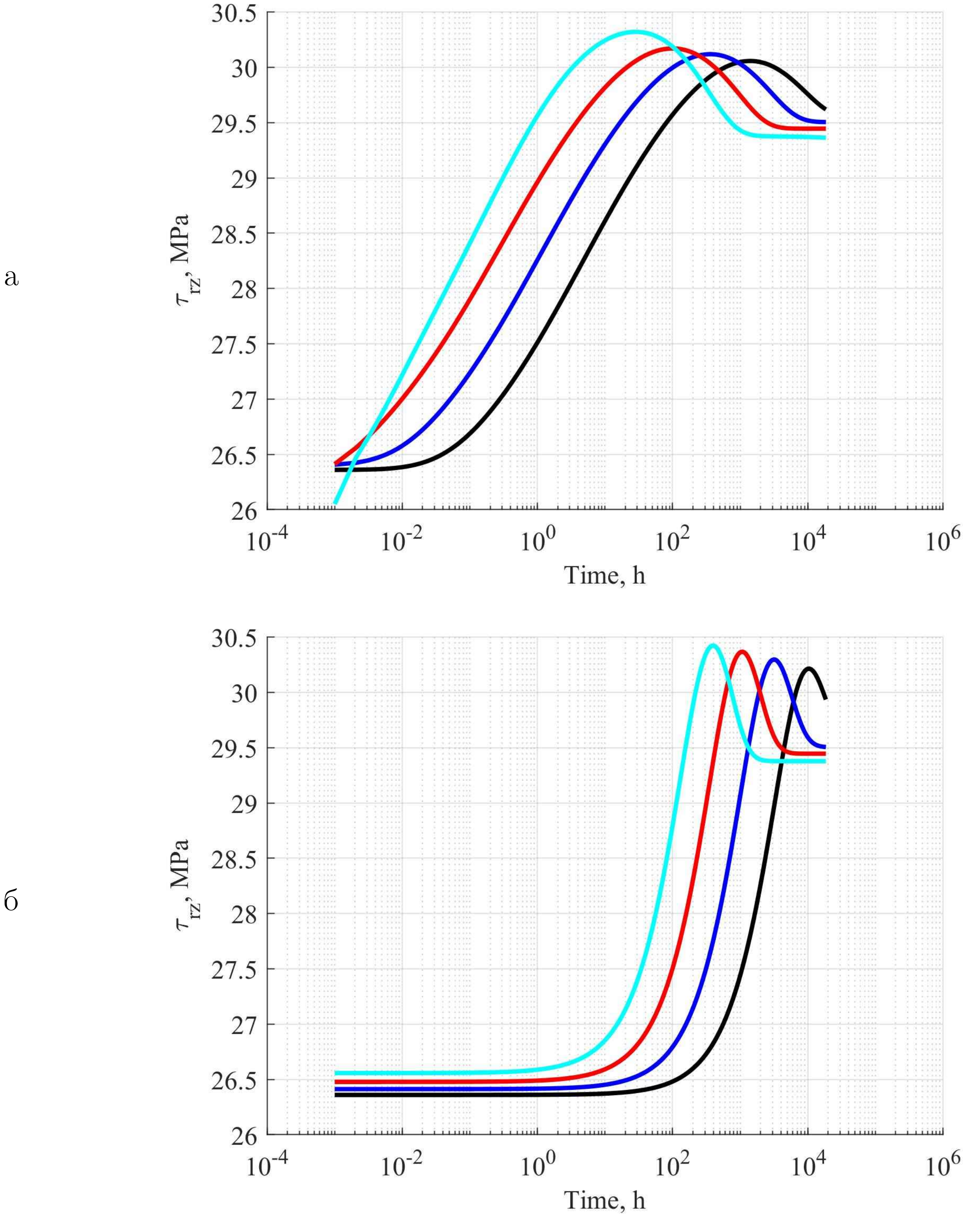


Рисунок 6.10 — Сравнение результатов решения при различных температурах: черная линия соответствует решению при температуре $0\,^{\circ}C$; синяя линия — при температуре $10\,^{\circ}C$; красная линия — при температуре $20\,^{\circ}C$; голубая линия — при температуре $30\,^{\circ}C$

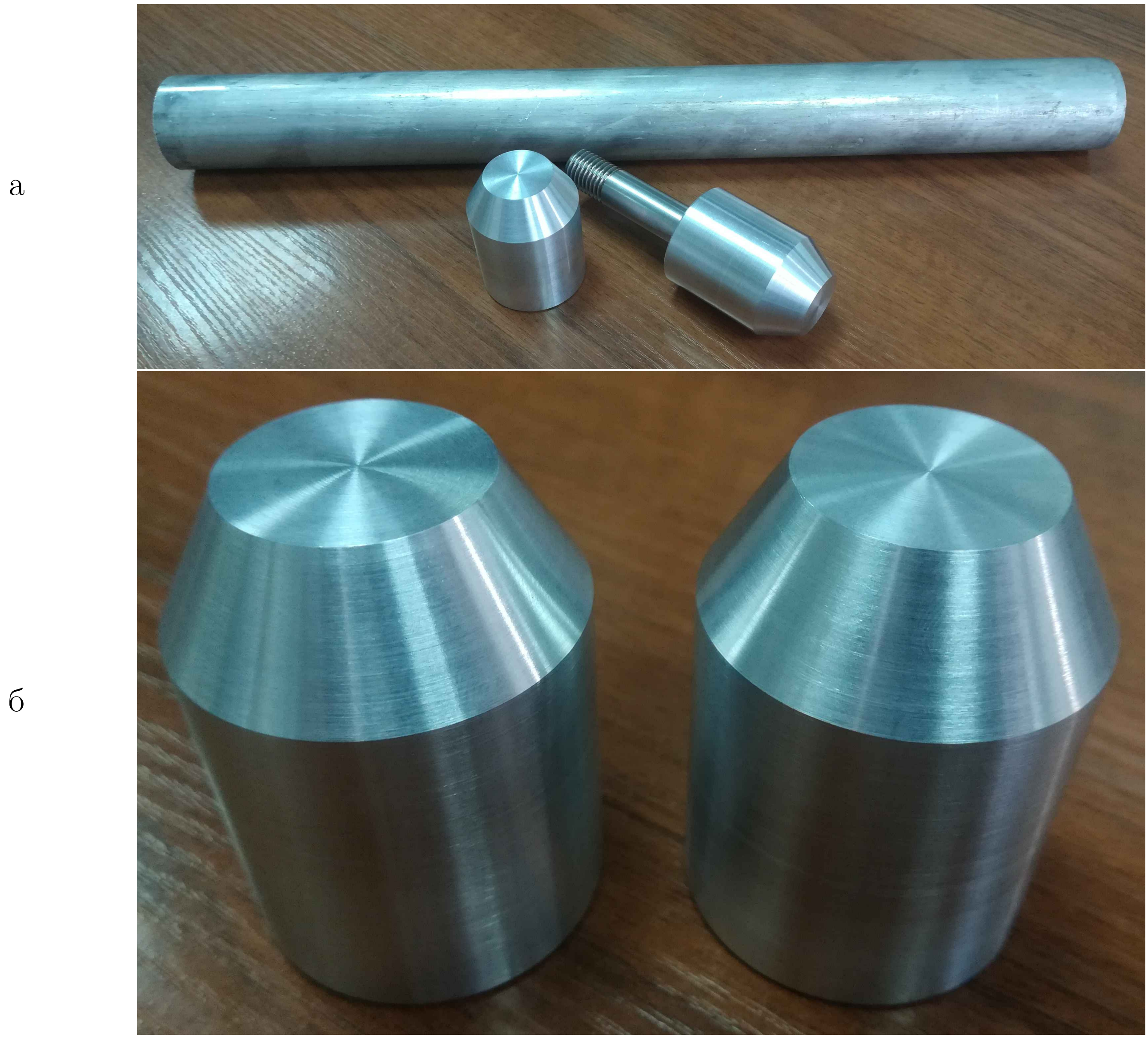


Рисунок 6.11 — Алюминиевая болванка (а) и заготовки из неё (б)

а

б

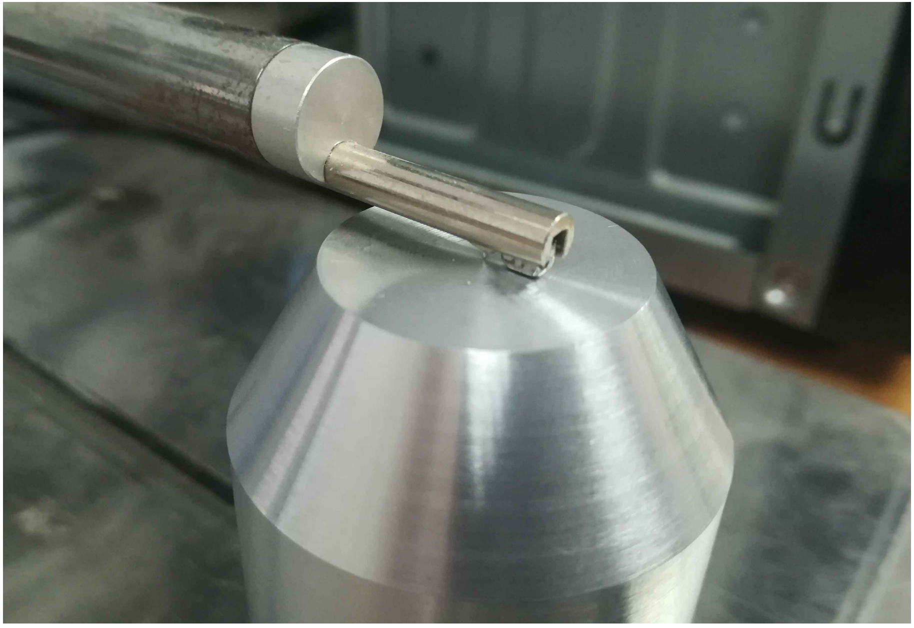


Рисунок 6.12 — Определение шероховатости поверхности цилиндрических образцов: а — профилометр модели 130; б — проведение испытания

Рисунок 6.13 — Эпоксидная смола и отвердитель для проведения испытания

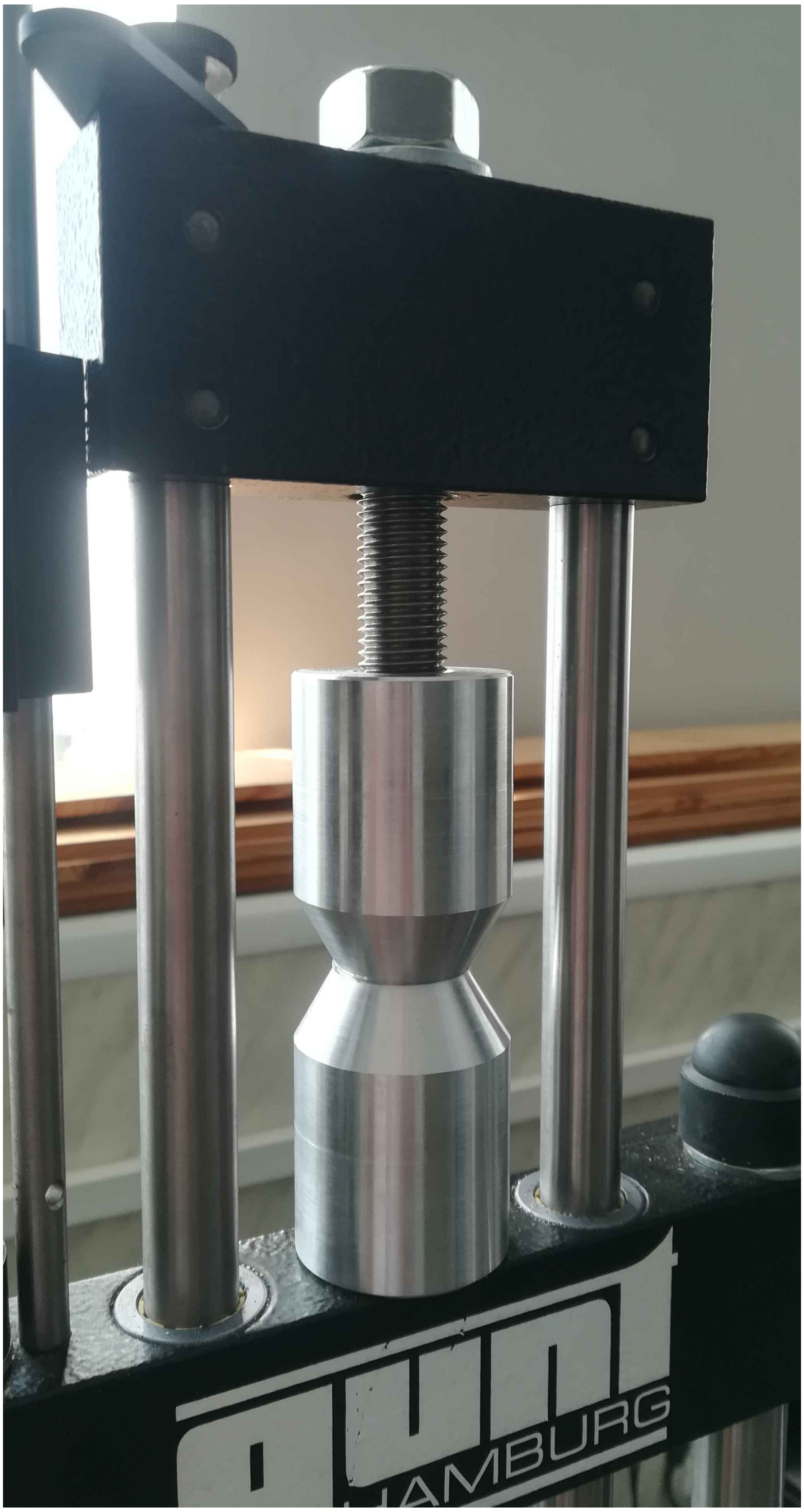


Рисунок 6.14 — Универсальная испытательная машина WP-300 с компьютерной системой сбора и обработки данных GUNT

Рисунок 6.15 — Начало проведения эксперимента

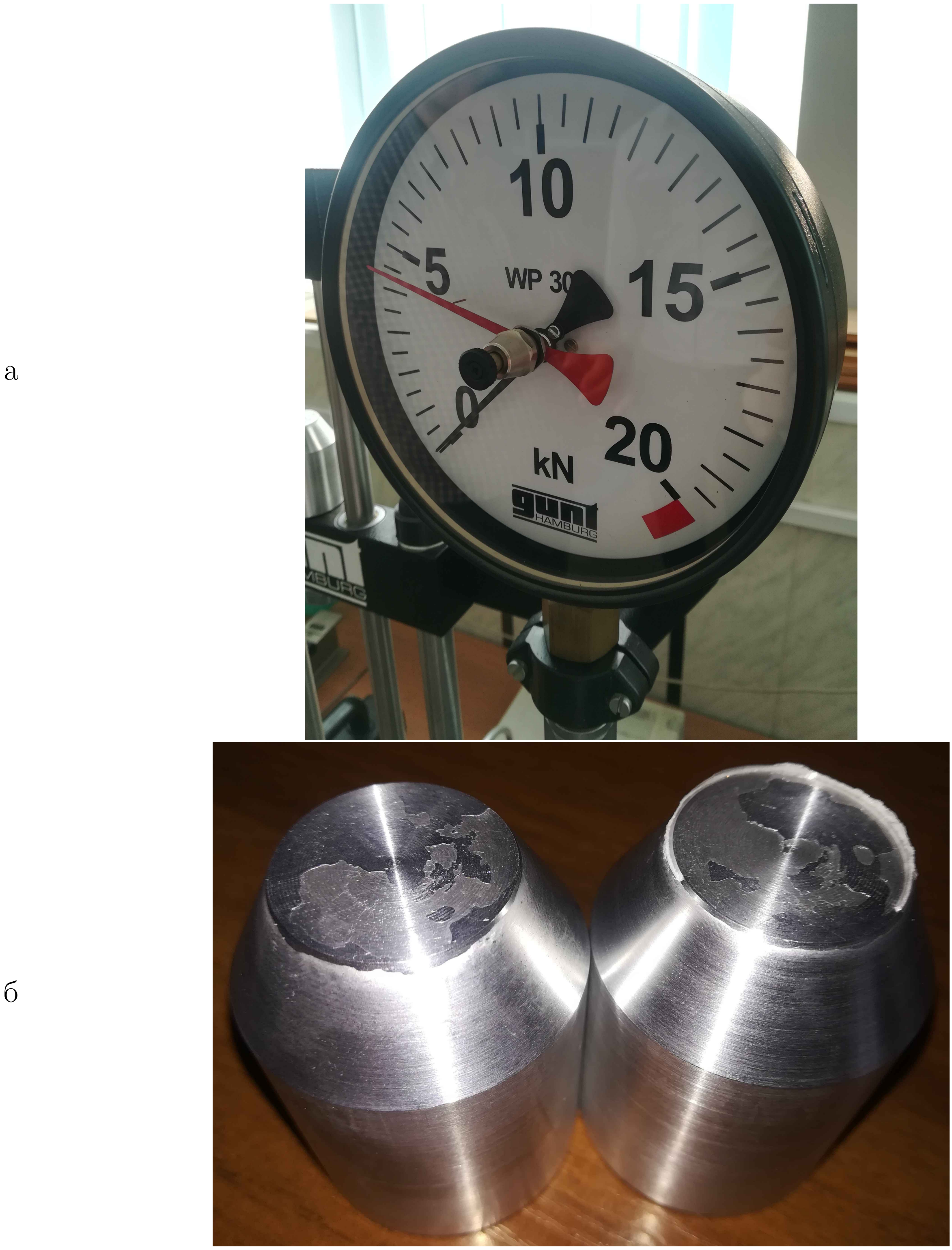


Рисунок 6.16 — Результат проведения эксперимента: уровень нагрузки в момент разрушения, кН (а) и адгезионное разрушение на поверхности алюминиевых образцов (б)

Глава 7. Изменение упругих и реологических параметров полиэтилена высокой плотности под действием гамма-излучения

Полиэтилен высокой плотности (ПЭВП) является одним из самых часто используемых полимеров в медицине. При этом низкий модуль упругости, его вязкоупругое поведение и низкая биологическая активность — накладывают ограничение на его применимость. Выходом может служить введение частиц гидроксиапатита (ГА) для улучшения свойств ПВП, в результате чего полученный композит может выступать альтернативой использованию металлических изделий для заменителей костей и ортопедических имплантов.

7.1 О влиянии радиационного излучения на полимерные материалы

Представителями полимеров являются, с точки зрения химической природы, углеводороды, хлор- и фторпроизводные, эфиры, кислоты и т. д. Молекулы полимеров представляют собой длинные цепочки атомов. Подавляющее большинство полимеров делят на три класса [10]:

1. Карбоцепные полимеры — атомы углерода слагают скелет макромолекулы полимера: полиэтилен, полипропилен, поливиниловый спирт и т. д. Фрагмент макромолекулы полиэтилена:

$$-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-;$$

2. Гетероцепные полимеры — макромолекулы в основной цепи кроме атомов углерода содержат гетероатомы (азот, сера, кислород и т. д.): полиэфиры, полиуретаны, полиамиды и т.д. Фрагмент макромолекулы полиэтиленоксида:

$$-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{O}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{O}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{O}-;$$

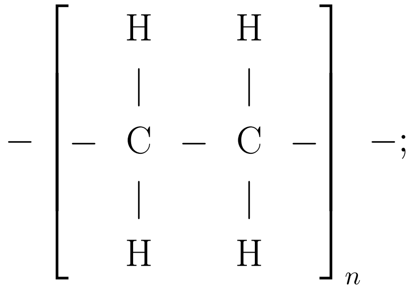
3. Высокомолекулярные соединения с сопряжённой системой связей: полинитрилы, полиацителены, полифенилены и т. д.

$$-\mathrm{CH}=\mathrm{CH}-\mathrm{CH}=\mathrm{CH}-\mathrm{CH}=\mathrm{CH}-;$$

Одним из главных свойств полимеров является величина молекулы, поэтому представляют большой интерес для изучения те реакции от действия ионизирующего излучения на полимеры, которые могут как разрушать их молекулы, так и укрупнять. В 1953 г. Чарльсби и Лаутон предложили классификацию полимеров в зависимости от их отношения к ионизирующему излучению: структурирующиеся, в которых образуются поперечные связи, и деструктурирующие, в которых происходит деструкция (разрыв молекул):

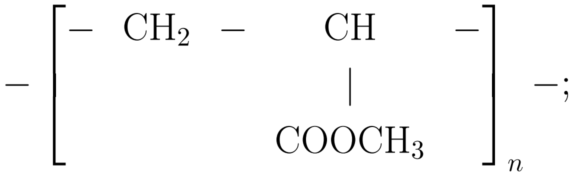
— Структурирующиеся

полиэтилен



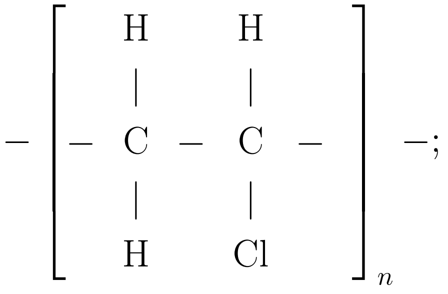
$$-\left[\begin{array}{ccccc} & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & \\ & | & & | & \\ - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - \\ & | & & | & \\ & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & \end{array}\right]_n-;$$

полиметилакрилат



$$-\left[\begin{array}{ccccc} - & \mathrm{CH_2} & - & \mathrm{CH} & - \\ & & & | & \\ & & & \mathrm{COOCH_3} & \end{array}\right]_n-;$$

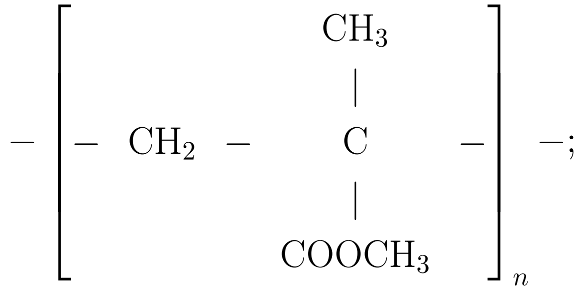
поливинилхлорид



$$-\left[\begin{array}{ccccc} & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & \\ & | & & | & \\ - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - \\ & | & & | & \\ & \mathrm{H} & & \mathrm{Cl} & \end{array}\right]_n-;$$

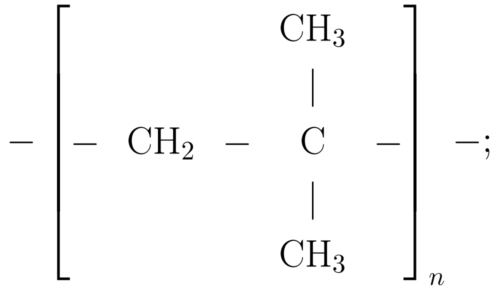
— Деструктурирующие

полиметилметакрилат



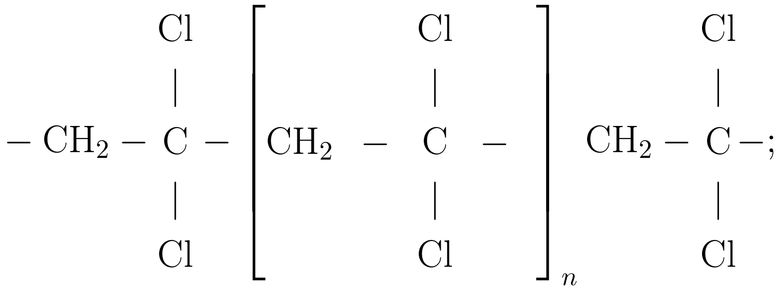
$$-\left[-CH_2-\underset{COOCH_3}{\underset{|}{\overset{CH_3}{\overset{|}{C}}}}-\right]_n-;$$

полиизобутилен



$$-\left[-CH_2-\underset{CH_3}{\underset{|}{\overset{CH_3}{\overset{|}{C}}}}-\right]_n-;$$

поливинилденхлорид



$$-CH_2-\underset{Cl}{\underset{|}{\overset{Cl}{\overset{|}{C}}}}-\left[CH_2-\underset{Cl}{\underset{|}{\overset{Cl}{\overset{|}{C}}}}-\right]_n CH_2-\underset{Cl}{\underset{|}{\overset{Cl}{\overset{|}{C}}}}-;$$

Следовательно, можно сделать вывод о связи изменения свойств полимера под действием излучения: деструктурируются полимеры, в которых рядом с атомом углерода атомы водорода заменены на иные группы; структурируются — когда каждый атом углерода цепи имеет хотя бы по одному атому водорода. Данная закономерность описывает поведение подавляющего большинства существующих полимеров.

Схему образования поперечных связей в полимере представили в 1958 году С. С. Медведевым [64] и сотрудники по мирному использованию атомной энергии на Женевской конференции, согласно которой на примере полиэтилена на первом этапе молекула теряет атом водорода

$$\ldots CH_2-CH_2-CH_2-CH_2\ldots \longrightarrow \ldots CH_2-CH-CH_2-CH_2-\ldots + H,$$

который имеет избыток энергии, достаточный для отрыва другого, находящегося поблизости атома водорода

$$\ldots \mathrm{CH_2} - \mathrm{CH_2} - \mathrm{CH_2} - \mathrm{CH_2} - \ldots + \ldots \dot{\mathrm{H}} \ldots$$
$$\ldots \mathrm{CH_2} - \dot{\mathrm{C}}\mathrm{H} - \mathrm{CH_2} - \mathrm{CH_2} - \ldots \mathrm{CH_2} - \dot{\mathrm{C}}\mathrm{H} - \mathrm{CH_2} - \mathrm{CH_2} - \ldots \longrightarrow$$
$$\ldots \mathrm{H}_2^+ \ldots \mathrm{CH_2} - \dot{\mathrm{C}}\mathrm{H} - \mathrm{CH_2} - \mathrm{CH_2} - \ldots$$

Итогом является возникновение находящихся в непосредственной близости друг от друга двух высокомолекулярных свободных радикалов и выделение молекулы водорода. В дальнейшем происходит сшивание путём соединения свободных радикалов. При этом процесс может окончиться на первом этапе в случае выделения атома водорода без избытка энергии; тогда свободные радикалы могут существовать весьма значительное время.

Несмотря на то, что выход реакции сшивания относительно мал (порядка несколько молекул на 100 эВ), благодаря значительному размеру молекулы исходных полимеров достаточно небольшого числа связей для соединения молекул полимера в единую сетку, образующую гигантскую молекулу. Естественно, данный процесс сшивания приводит к изменению свойств полимеров.

Первое изменение влияет на растворимость полимера. Довольно много растворителей может растворять несшитый полимер вследствие относительно лёгкого разъединения полимерных цепей молекулами растворителей. Данный процесс перехода молекул полимера в раствор затрудняется при росте числа поперечных связей, при этом он прекращается, начиная с некоторого момента, определяемого дозами ионизирующего облучения, в зависимости от молекулярного веса полимера. Таким образом, возможно приблизительно оценить дозу, полученную раствором. Так, облучённые дозой 10^{19}–10^{20} эВ/г образцы полиэтилена полностью растворяются в горячем толуоле, как и необлучённые. Увеличение интенсивности облучения приводит к образованию некоторого нерастворённого материала, количество которого растёт пропорционально дозе облучения до некоторого момента, когда начинает увеличиваться вес образцов облучённого полимера после выдерживания, т. е. полимер набухает. При этом свободные несшитые участки между молекулами полимера заполняются молекулами растворителя. Дальнейшее облучение полимера приводит к такому сгущению его сетки, что уровень набухания полимера резко падает.

Второе изменение свойств— это проявление существующей пространственной сетки полимера при его нагреве до расплавления. Так, при температуре свыше 105–115 $^{\circ}C$ необлучённый полимер представляет собой вязкую жидкость. В случае производства из этого полимера изделий они превращаются в бесформенную массу. Под действием излучения такой полимер приобретает свойство резины благодаря сшивке его молекул. В результате под действием механического нагружения исключается скольжение молекул полимера друг относительно друга благодаря поперечным связям. Так, при растяжении, подобно пружине, происходит распрямление отдельных звеньев сетки и наблюдается удлинение изделий из этого полимера вместо растекания. При исчезновении механического нагружения происходит восстановление прежней формы сетки. В случае её значительной густоты поведение полимера под действием внешнего нагружения может ухудшаться, т. к. исключается возможность распрямления отдельных звеньев и тогда даже при относительно небольшом механическом нагружении изделие теряет эластичность и способность к растяжению, оно становится хрупким.

В технике широко применяется процесс вулканизации, т. е. сшивание полимеров, при котором создаётся пространственная сетка. Для этого, как правило, используют химические методы, при которых вводят в полимер некоторые вещества (серу, органические перекисные соединения и т. д.) с последующим подогревом. Происходит связывание молекул полимера присоединением введённых веществ к двум соседним его молекулам. Данная реакция возможна только, если в составе молекул полимера имеются группы, способные реагировать с вулканизирующими веществами. При отсутствии подобных групп в полимере, например в полиэтилене, становится весьма затруднительно проводить вулканизацию химическими приёмами. В таком случае становится очевидным преимущество проведения радиационной вулканизации, применимой к весьма широкому кругу вулканизирующих материалов.

Таким образом, в настоящее время радиационная вулканизация находит применение в практике. Так, изделия из полиэтилена, задача которых работать в условиях повышенных температур, предварительно облучают. В 1959 году в

США на одном из предприятий было произведено 400 тонн плёнки из облучённого полиэтилена. В результате при незначительных затратах, по сравнению с плёнкой из обычного полиэтилена, удалось добиться увеличения прочности плёнки в 5 раз, а способности к растяжению — в 2 раза. При этом подобные изделия из облучённого полиэтилена способны работать при температурных режимах до $250\,^{\circ}C$. В. Л. Карпов [39] с сотрудниками предложили использовать облучённый полиэтилен для изготовления изоляции проводов, эксплуатируемых в условиях повышенной температуры. Если же сравнивать облучённый полиэтилен и необлучённый в условиях обычных температур, то сшитый полимер, по сравнению с обычным, обладает повышенной механической прочностью.

7.2 Использование полимерных материалов в медицине

В мировой практике для использования в качестве заменителей костей биоактивный нано-керамический армированный полимер изучается с 1980-х годов [115, 118, 122, 123, 130, 131, 147, 151, 154]. Одним из главных показателей создаваемого материала для замены кости является его жёсткость. Так, на ремоделировании кости сказываются условия приложения усилий на саму кость; жёсткость импланта сказывается на переносимые с импланта усилия на кости [124, 127]. Для исключения возможности развития при использовании имплантов остеопороза необходимо использовать биосовместимые материалы, по свойствам сходным со свойствами естественной кости [143].

Как говорилось ранее, ПЭВП в медицине является одним из наиболее распространённых материалов в качестве заменителей костей и ортопедических протезов, при этом на возможность его применения сказываются реология, низкие модуль упругости и низкая биологическая активность. В работах [116, 133, 144, 148, 153] были предприняты попытки улучшения вышеуказанных свойств.

Для получения композитной полимерной матрицы можно использовать различные керамические наночастицы. Данную матрицу можно применять как альтернативу металлам для заменителей костей и ортопедических имплантов [116, 125, 128]. В качестве наполнителей используют различные виды керамических материалов таких, как углеродные нановолокна, нано-глины и ГА [125, 128, 129]. ГА положительно сказывается на композитной жёсткости и биологической активности, в то время, как ПЭВП обеспечивает прочность. Вязкоупругое поведение ПЭВП легко описывается во времени под действием нагрузки и позволяет сделать прогноз о длительной прочности материала [125, 126, 128, 129, 142]. Таким образом, использование наночастиц ГА в качестве армирующих элементов полимерного материала благоприятно сказывается и на биологической активности, и на реологическом поведении ПЭВП.

Гамма-излучение представляет собой один из часто используемых способов стерилизации в медицине многих лекарственных препаратов, т. к. оно разлагает молекулы ДНК любых живых организмов. Типичная доза облучения составляет от 25 до 70 кГр [119, 151]. Особенностью данного процесса стерилизации является возможное изменение в молекулярной структуре полимера: гамма-излучение отрицательно влияет на плотность сцепления длинных молекулярных цепей, а также на концентрацию связывающих молекул. При этом стерилизация благоприятно сказывается на процессе сшивки и свойствах композита. Р. Кейн [132] с коллегами изучали влияния гидроксиаппатита (ГА) на поведение армированного полиэтилена высокой плотности, где предположили, что нитевидные ГА благоприятно сказываются на усталостную долговечность армированных полимеров.

На примере результатов экспериментальных данных работы [117] определили и провели анализ изменения упругих и реологических параметров ПЭВП с учётом добавок из ПЭВП и облучением материала до 70 кГр (сила облучения увеличивалась на 5 кГр каждый час).

Экспериментальные изыскания по релаксации напряжений чистого ПЭВП и его нанокомпозитных образцов проводили при постоянной температуре $T = 25\,^{\circ}C$ и постоянной деформации стержня $\varepsilon = 3\,\%$, при этом наблюдали снижение уровня напряжения в течение 3 часов.

Результаты определения экспериментальных данных релаксации напряжений облучённого и необлучённого ПЭВП и его нанокомпозитов, содержащих 30 % ГА приведены на рисунке 7.1. Анализируя полученные кривые, установили, что релаксация нанокомпозитов с ГА и облученных образцов оказывается боле выраженной, чем образцы из чистого ПЭВП. Также уровень начального напряжения и напряжения в конце процесса релаксации имеют более высокие значения по сравнению с необлучёнными образцами. Рост напряжения в начальный момент времени (t=0) объясняется присутствием наночастиц ГА в полимерной матрице ПЭВП и, как следствие, изменением жёсткости. На основании анализа рисунка 7.1делаем вывод, что релаксация напряжения ПЭВП с добавками ГА и облучением через 3 часа проведения испытания составила 37 % от его значения в начальный момент времени, при этом снижение напряжения для ПЭВП без добавок и облучения снизились всего на 24 % от начального значения. Нанокомпозит ПЭВП с ГА способен больше уменьшать напряжения в заменителях кости со временем, что положительно сказывается на его работе совместно с организмом при протезировании.

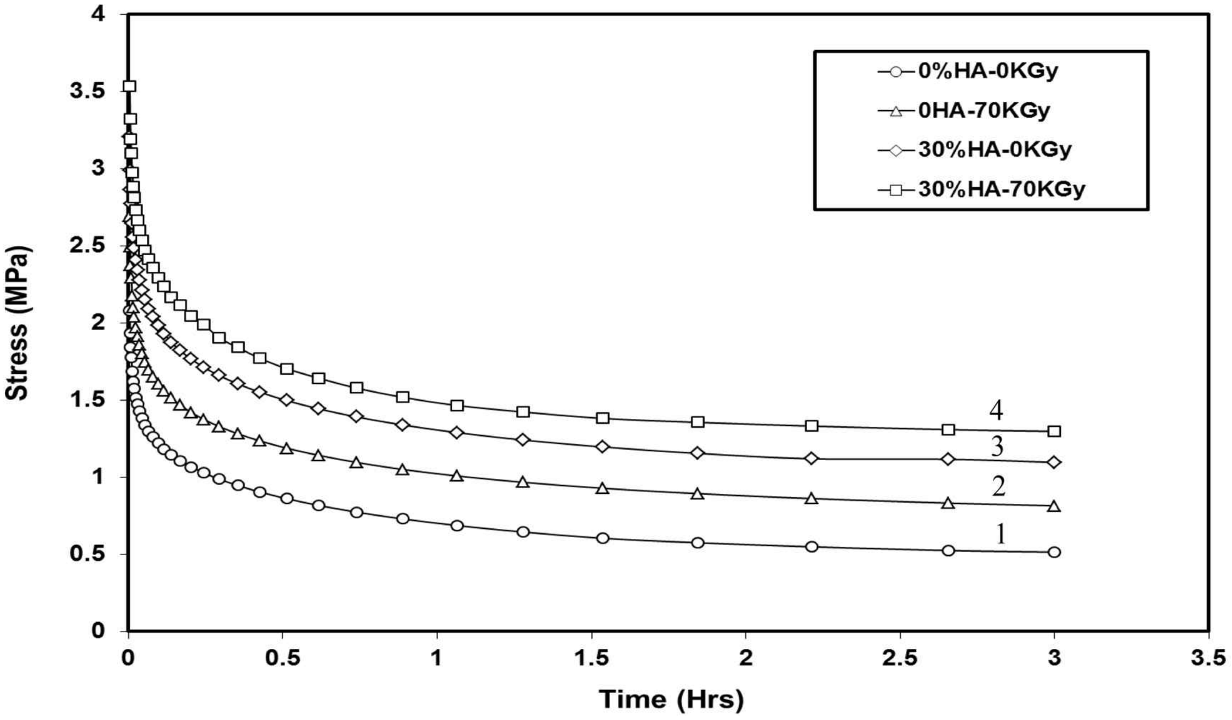


Рисунок 7.1 — Результаты релаксации напряжений ПЭВП: 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

7.3 Определение упругих и реологических постоянных ПЭВП

Дальнейшие выкладки основаны на методике, приведённой в параграфе 2.6 (с. 56), при этом будут использоваться некоторые отличия в методике определения скорости изменения напряжения от времени. Материалы данного параграфа отражены автором в научной публикации [135].

За основу анализа и последующего определения упругих и реологических параметров ПЭВП и его нанокомпозита был использован график 7.1 из работы [117].

В связи с большим количеством точек на графиках напряжения–деформации (σ–ε), их данные в табличной форме в параграфе не приводятся.

Изначально все выкладки из параграфа 2.6 повторяются вплоть до формулы (2.60) включительно.

Следующим этапом предстоит определение скорости изменения функции напряжений во времени. Однако вместо метода неопределённых коэффициентов будет использован другой подход с применением функции **polyfit** из программного комплекса Matlab, которая имеет вид

```
p = polyfit(x, y, n)
```

и находит коэффициенты полинома $p(x)$ степени n, который аппроксимирует функцию $y(x)$ с применением метода наименьших квадратов. Выходом является строка p длины $n+1$, содержащая коэффициенты аппроксимирующего полинома:

$$p(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \cdots + p_n x + p_{n+1}.$$

Происходит подбор коэффициентов аппроксимирующего полинома по трём точкам (квадратный полином или полином 2-й степени), который имеет вид с учётом вида исходных функций

$$\sigma_i = p_1 t^2 + p_2 t + p_3. \tag{7.1}$$

Для определения искомой производной функции в каждой точке, произведём дифференцирование выражения (7.1) по времени:

$$\sigma_i' = 2p_1 t + p_2. \tag{7.2}$$

Напомним, что штрихом «$'$» обозначаем производную по времени.

Таким образом, использование функции polyfit позволяет достаточно быстро и удобно получить необходимые коэффициенты p_1 и p_2, затем при помощи выражения (7.2) — определить скорость роста функции напряжения во времени.

Следующий ход действий не отличается от приведённого в параграфе 2.6. Результаты определения упругих и реологических параметров нелинейного уравнения Максвелла–Гуревича приведены в таблице 7.1

Таблица 7.1 — Упругие и релаксационные параметры ПЭВП

ПЭВП	E, МПа	E_∞, МПа	m^*, МПа	η_0^*, МПа·ч
0 % ГА, 0 кГр	693.9890	228.8515	5.5445	1113.0
0 % ГА, 70 кГр	897.5469	388.1827	6.4429	1734.4
30 % ГА, 0 кГр	1069.3	556.7567	8.0948	1832.5
30 % ГА, 70 кГр	1178.4	684.5894	10.1390	1768.4

Так как в результате определения получаем 4 значения каждого переменного в зависимости от доли ГА (GA, доля изменяется от 0 до 0.3) и уровня облучения полимера Φ, кГр. Для определения переменных при промежуточных значения доли ГА и уровня облучения, произведём интерполяцию при помощи полинома, имеющего вид:

$$f(x, y) = a + bx + cy + dxy. \tag{7.3}$$

Тогда выражение модуля упругости в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график изменения модуля упругости представлен на рисунке 7.2):

$$E(\text{ГА}, \Phi) = 694 + 1251\text{ГА} + 2.908\Phi - 4.498\text{ГА}\Phi \text{ [МПа]}. \tag{7.4}$$

Выражение модуля высокоэластичности в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график изменения модуля высокоэластичности представлен на рисунке 7.3):

$$E_\infty(\text{ГА}, \Phi) = 228.9 + 1093\text{ГА} + 2.276\Phi - 1.5\text{ГА}\Phi \text{ [МПа]}. \tag{7.5}$$

Выражение модуля скорости в зависимости от доли ГА и уровня облучения Ф имеет вид (график изменения модуля скорости представлен на рисунке 7.4):

$$m^*(\text{ГА}, \Phi) = 5.545 + 8.501\text{ГА} + 0.01283\Phi + 0.05456\text{ГА}\Phi \text{ [МПа]}. \tag{7.6}$$

Выражение коэффициента начальной релаксационной вязкости в зависимости от доли ГА и уровня облучения Φ имеет вид (график коэффициента начальной релаксационной вязкости представлен на рисунке 7.5):

$$\eta_0^*(\text{ГА}, \Phi) = 1113 + 2398\text{ГА} + 8.877\Phi - 32.64\text{ГА}\Phi \text{ [МПа} \cdot \text{ч]}. \tag{7.7}$$

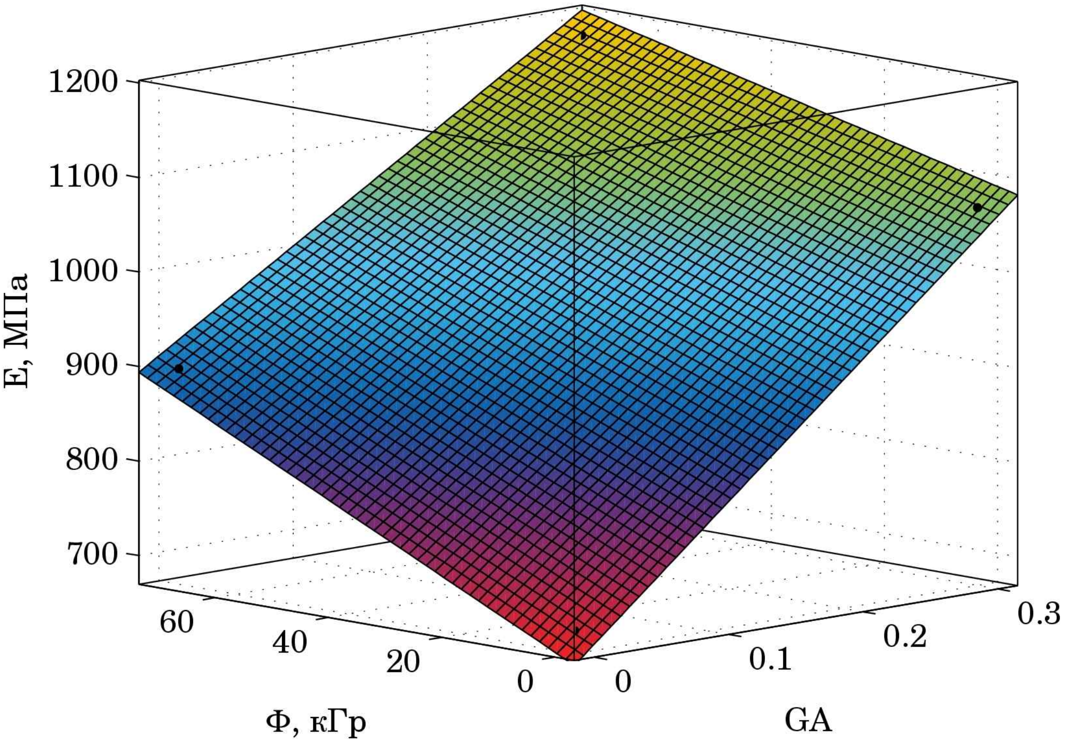


Рисунок 7.2 — Зависимость модуля упругости $E(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Φ

Проанализировав выражения (7.4)–(7.7) и графики 7.2–7.5, делаем вывод, что с ростом доли ГА и уровня излучения все упругие и реологические параметры увеличиваются, некоторое исключение составляет коэффициент начальной релаксационной вязкости, который при одновременном введении ГА и облучением материала имеет величину примерно такую же, как только при введении ГА, или только облучением ПЭВП.

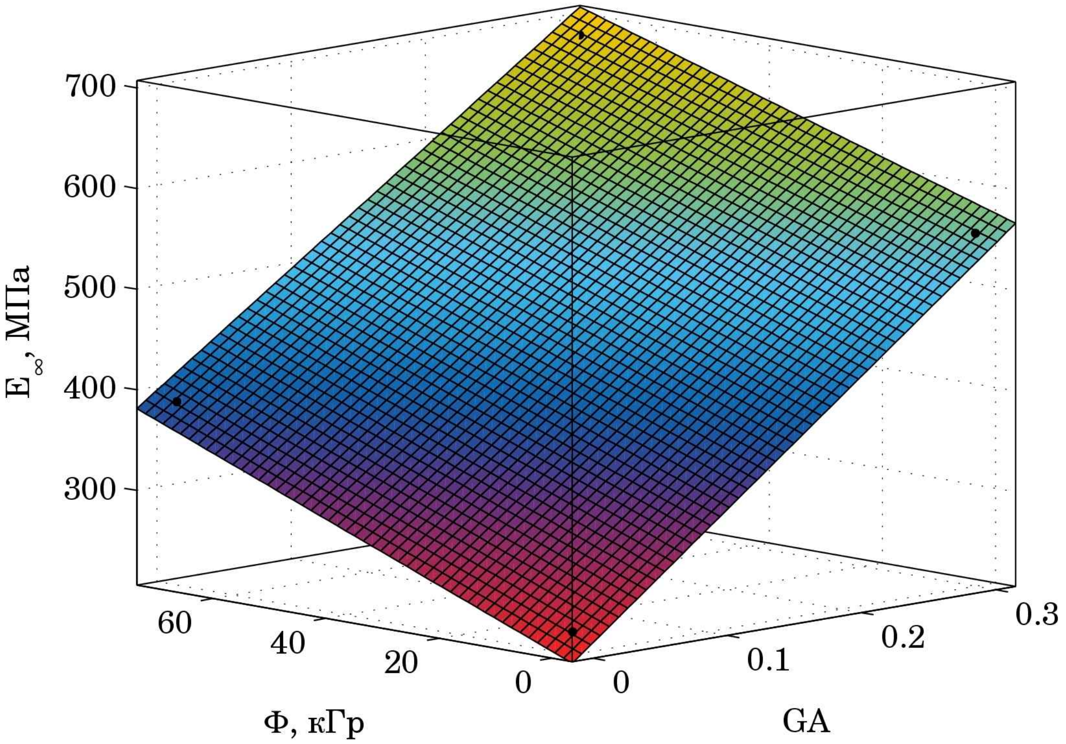


Рисунок 7.3 — Зависимость модуля высокоэластичности $E_\infty(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Φ

7.4 Задача релаксации напряжений

Для оценки достоверности полученных упругих и реологических параметров уравнения Максвелла–Гуревича, получим теоретические кривые релаксации напряжений с использованием полученных зависимостей изменения параметров (7.4)–(7.7) и сравним их с опытными кривыми, по которым они были определены.

Полная деформация испытываемого стержня складывается из упругой и высокоэластической, и равна некоторой постоянной величине (так как в этом случае наблюдается одноосное напряжённое состояние, в дальнейших выкладках индекс оси стержня x писать не будем):

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{cr} = \text{const} = 0.03\,\text{мм}.$$

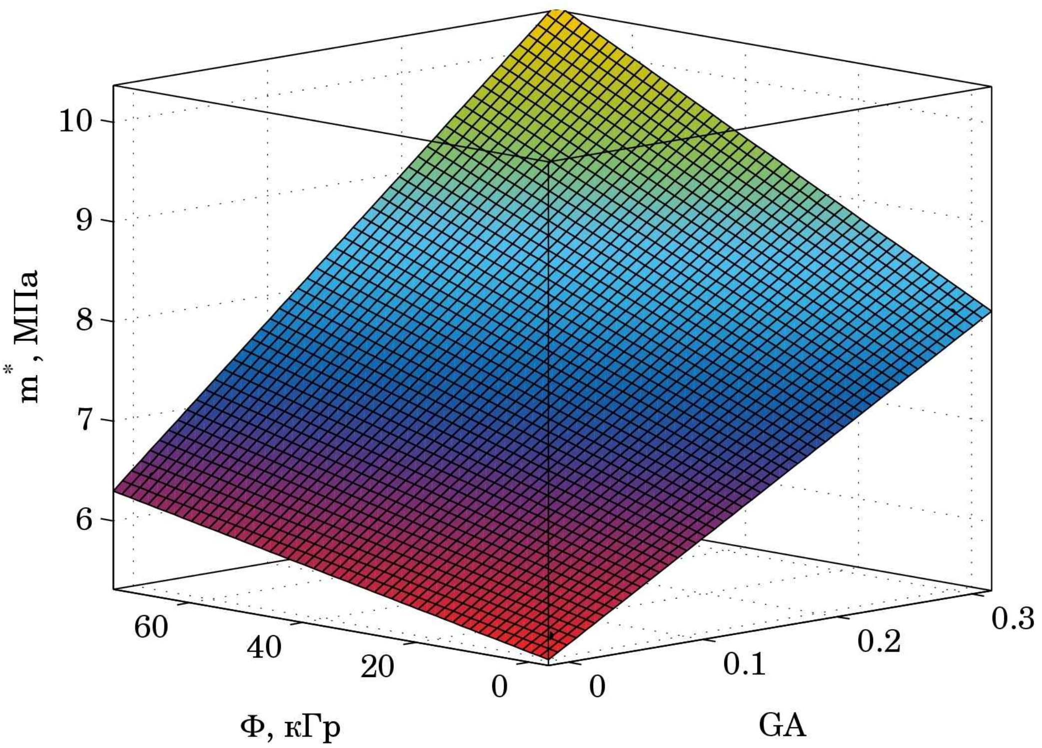


Рисунок 7.4 — Зависимость модуля скорости $m^*(\text{ГА}, \Phi)$ ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Φ

Из этого выражения можно определить напряжение в любой момент времени

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_{cr}\right). \tag{7.8}$$

Напряжение в начальный момент времени может быть определено умножением модуля упругости материала на начальную деформацию, постоянную в течение всего времени проведения опыта

$$\sigma(0) = E\varepsilon.$$

В самом начале эксперимента высокоэластическая деформация равна нулю, таким образом можно определить деформацию ползучести на следующем временном этапе

$$\varepsilon_{cr}(t+1) = \varepsilon_{cr}(t) + \frac{\partial\varepsilon_{cr}(t)}{\partial t}\Delta t;$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{cr}(t)}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}; \qquad f^* = \sigma - E_\infty\varepsilon_{cr}; \qquad \eta^* = \eta_0^*\exp\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right).$$

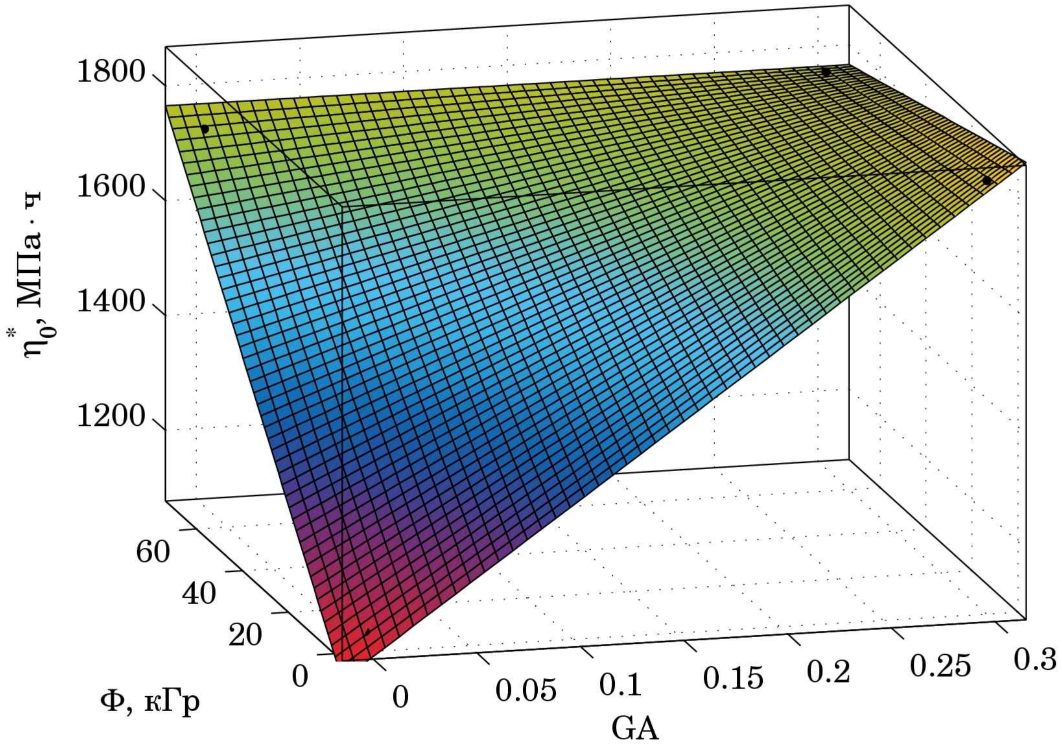


Рисунок 7.5 — Зависимость коэффициента начальной релаксационной вязкости η_0^*(ГА, Φ) ПЭВП в зависимости от доли ГА (GA) и уровня облучения Φ

Как говорилось ранее, на начальном этапе высокоэластическая деформация равна нулю ($\varepsilon_{cr} = 0$), тогда на начальном этапе времени $t = 0$ функция напряжений f^* определяется выражением

$$f^* = \sigma - E_\infty \underbrace{\varepsilon_{cr}}_{=0} = \sigma.$$

Таким образом, определяем высокоэластические деформации на следующем этапе времени $\varepsilon_{cr}(t+1)$; теперь возможно найти напряжения на следующем этапе времени $\sigma(t+1)$ при помощи выражения (7.8). Далее процесс повторяется до достижения последней точки времени проведения эксперимента.

Для оценки достоверности полученных уравнений (7.4)–(7.7), на рисунке 7.6 приводится сопоставление опытных графиков (пунктирные линии) релаксации напряжений с теоретическими (сплошные линии) на основании выражений (7.4)–(7.7). Совпадение опытных и кривых линии очень хорошее, а небольшие расхождения объясняются неточностью обработки данных, полученных из анализа рисунков кривых релаксации напряжений.

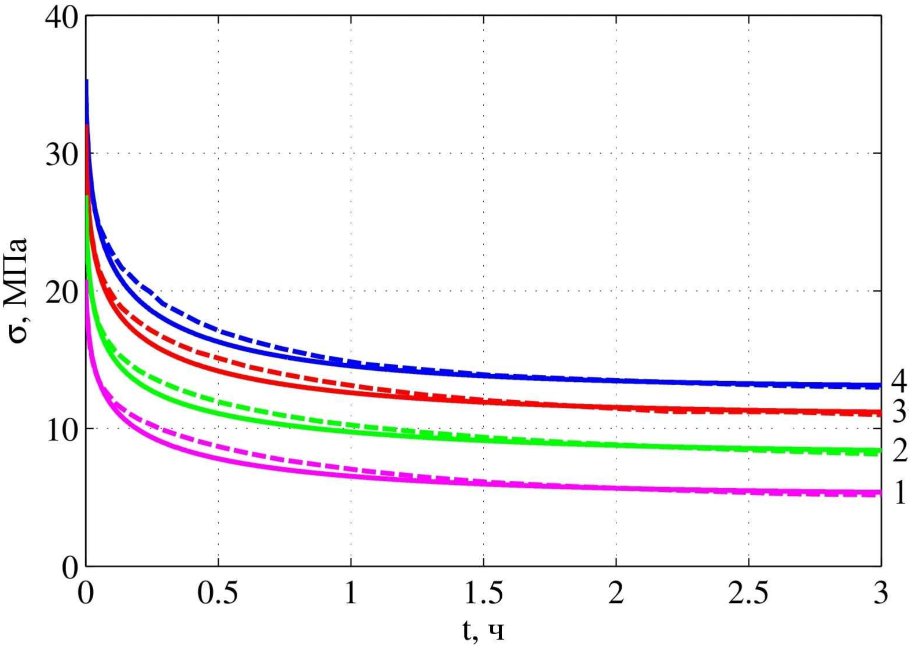


Рисунок 7.6 — Результаты сопоставления экспериментальных кривых (пунктирная линия) с теоретическими (сплошная линия, на основании определённых упругих и реологических параметров): 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

Таким образом, появляется возможность предположить поведение кривых релаксации напряжений при промежуточных значениях долей ГА и уровня облучения. Построим кривые релаксации полиэтилена при следующих значениях ГА и облучения:

$$\text{ГА} = 15\,\% = 0.15; \qquad \Phi = 35\,\text{кГр}.$$

Тогда упругие и реологические параметры для данных уровней ГА и Φ примут следующие значения:

$$\begin{aligned} E(0.15, 35) &= 959.8155\,\text{МПа}; \\ E_\infty(0.15, 35) &= 464.6350\,\text{МПа}; \\ m^*(0.15, 35) &= 7.5556\,\text{МПа}; \\ \eta_0^*(0.15, 35) &= 1.6120 \cdot 10^3\,\text{МПа} \cdot \text{ч}. \end{aligned}$$

Результат расчёта релаксации напряжений облучённого полиэтилена приведен на рисунке 7.7. Анализ кривых показывает, что по сравнению с полиэтиленом без добавок, но подвергшегося облучению, полимер с половинной дозой добавок и половинной дозой облучения даёт лучшие свойства, но хуже по сравнению с необлучённым полимером, но с полной порцией добавки ГА.

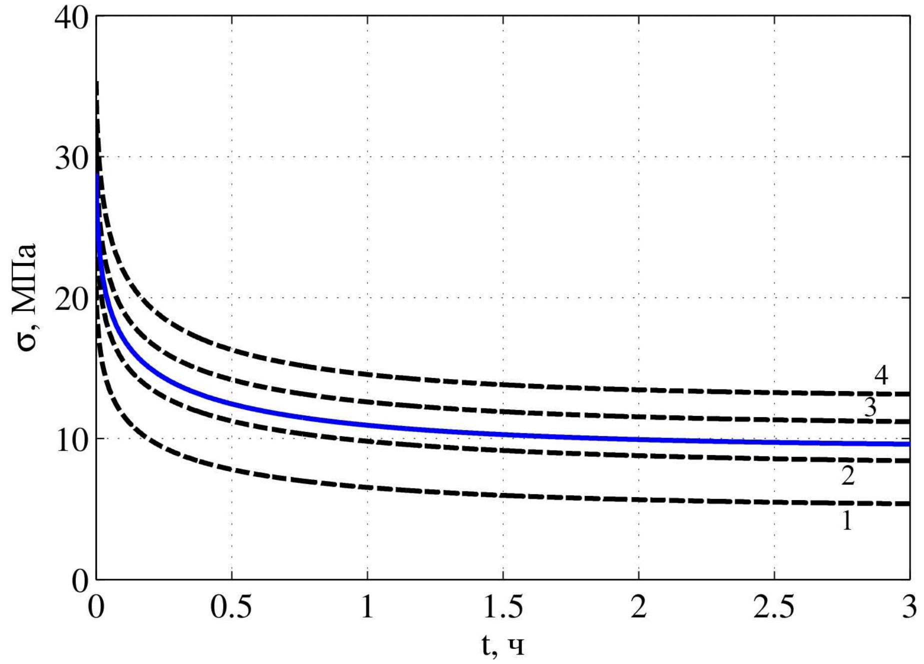


Рисунок 7.7 — Сплошная синяя линия — ГА = 15 %, Φ = 35 кГр; пунктирные линии: 1 — чистый ПЭВП, без облучения; 2 — чистый ПЭВП, облучение 70 кГр; 3 — ПЭВП + 30 % ГА, без облучения; 4 — ПЭВП + 30 % ГА, облучение 70 кГр

Таким образом появляется возможность при анализе опытных данных релаксации напряжений прогнозировать свойства полимерных материалов при промежуточных значениях параметров. Несомненно, данная возможность ведёт к значительной экономии материальных ресурсов и человеко-часов на проведение эксперимента и его последующего анализа.

7.5 Практический расчёт на определение напряжённо-деформированного состояния

Для оценки влияния на напряжённо-деформированное состояние полимерного тела различных сочетаний добавок и ионизирующего излучения, рассматриваем задачу расчёта цилиндрического тела, претерпевающего сжатие (постановка задачи и расчётная схема приводятся на рисунке 7.8).

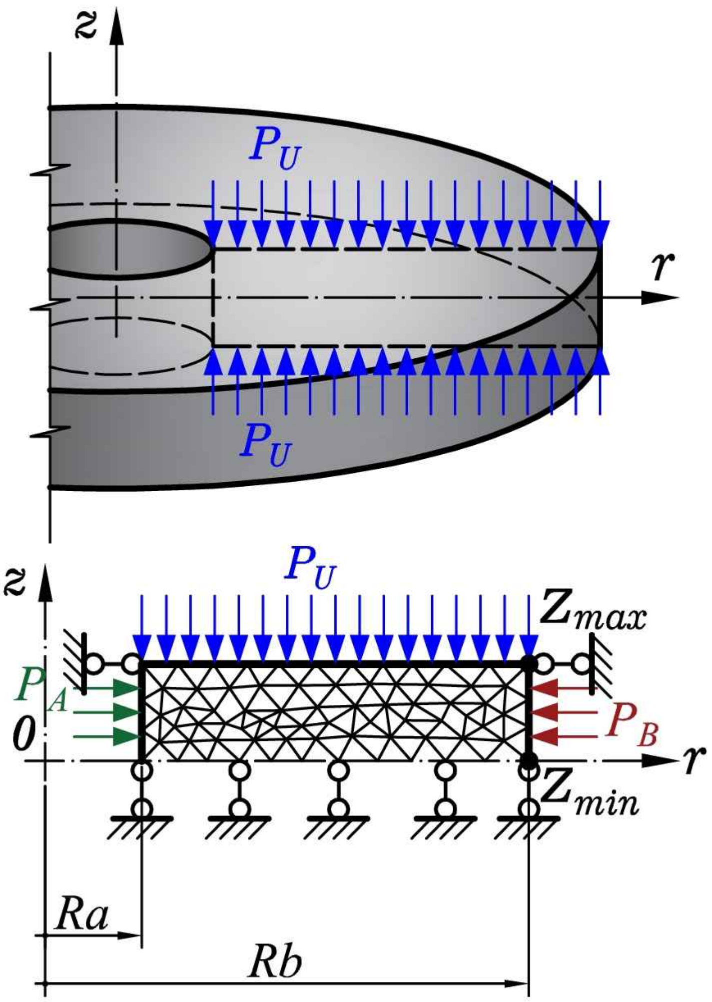


Рисунок 7.8 — Цилиндрическое сжимаемое тело конечной длины: постановка задачи и расчётная схема

Высота тела $h = 1\,\text{см} = 0.010\,\text{м}$. Вследствие того, что тело симметрично относительно горизонтальной оси, достаточно рассмотреть только его половину, в результате чего исходные данные принимают следующий вид: давление на внутренней грани цилиндра $P_A = 0\,\text{МПа}$; давление на внешней грани цилиндра $P_B = 0\,\text{МПа}$; давление на верхнем торце цилиндра $P_U = -10\,\text{МПа}$ (минус — сжатие); внутренний радиус $R_a = 0.010\,\text{м}$; внешний радиус $R_b = 0.050\,\text{м}$; координата нижней точки $Z_{min} = 0\,\text{м}$; координата верхней точки $Z_{max} = \dfrac{h}{2} = 0.005\,\text{м}$; число интервалов разбиения по времени $qnIntT = 20\,\text{шт}$; предел времени, до которого происходит расчёт $limTime = 10\,\text{ч}$. Результаты расчёта задачи представлены на рисунках 7.9–7.16.

На рисунках 7.9–7.14 на первом графике показано решение задачи в самом начале, когда отсутствуют упругие деформации и задача сводится к упругому решению. При решение показано при $GA = 0$, $\phi = 0\,kGr$ — при иных процентах введения GA и наличии ионизирующего излучения решение в начальный момент времени зрительно не отличается, поэтому иные варианты не приводятся.

Если же проводить анализ изменения напряжений σ_r, σ_θ, σ_z и τ_{rz} в конце расчётного периода с начальным, то их максимальный и минимальный уровни увеличиваются в 2–2.5 раз. Однако в любом теле можно выделить элементарный объём таким образом, когда на гранях этого объёма нормальные напряжения будут достигать своих максимальных значений, а касательные — равны нулю (рисунок 7.17). Было принято решение провести дополнительно анализ изменения главных напряжений максимального σ_1 и минимального σ_3.

Из рисунков 7.9–7.14 выделены максимальные и минимальные значения напряжений, затем построены графики изменения этих параметров во времени (рисунки 7.15 и 7.16. Здесь отчётливо видно изменение уровня напряжений с течением времени в 2–2.5 раз. Исключение составляют главные напряжения, которые имеют значительные величины в начальный момент времени и повышаются не более, чем в 1.5 раза к концу расчётного периода.

Отличие между базовыми напряжениями (радиальным, окружным, осевым и касательным) от главных заключается и в разнице проявления реологических процессов. Так, при отсутствии добавок и наличии ионизирующего излучения, базовые напряжения стабилизировались через 7 часов с момента приложения нагрузки, а если проводить анализ изменения главных напряжений, они не стабилизировались и к 10 часам, т. е. к концу расчётного периода. В случае наличия максимальных добавок GA в полимере и облучением его ионизирующим излучением, уровень и базовых, и главных напряжений уменьшается на $\approx 10\,\%$ по сравнению с чистым образцом полимера. Кроме того, стабилизация базовых напряжений наблюдается примерно через 4 часа от начала расчёта, главных — через 6. Образец, в который был добавлен GA и облучённый в половинной дозе, показывал примерно средние свойства между «чистым» и образцом, с полным добавлением GA и полным уровнем ионизирующего излучения.

Результаты приведенного в данной главе исследования опубликованы в работах [61, 136].

7.6 Выводы по главе

1. Впервые получены зависимости физико-механических параметров полимера как функция от двух переменных на основании анализа и аппроксимации кривых его релаксации в различных условиях.

2. Представлено на основе решения тестовой задачи, что несмотря на значительное изменение свойств полимера различными модификаторами, напряжённо-деформированное состояние готового элемента конструкции меняется весьма незначительно (напряжённое состояние изменяется в пределах 10 %). В результате чего судить об эксплуатационных параметрах полимера или улучшении его показателей практического применения без моделирования работы конкретной конструкции нельзя.

3. Доказано, что полноценно о напряжённо-деформированном состоянии полимерной конструкции в процессе реологических явлений возможно судить только по главным напряжениям. То же относится и к прогнозированию прочности изделий из полимерных материалов.

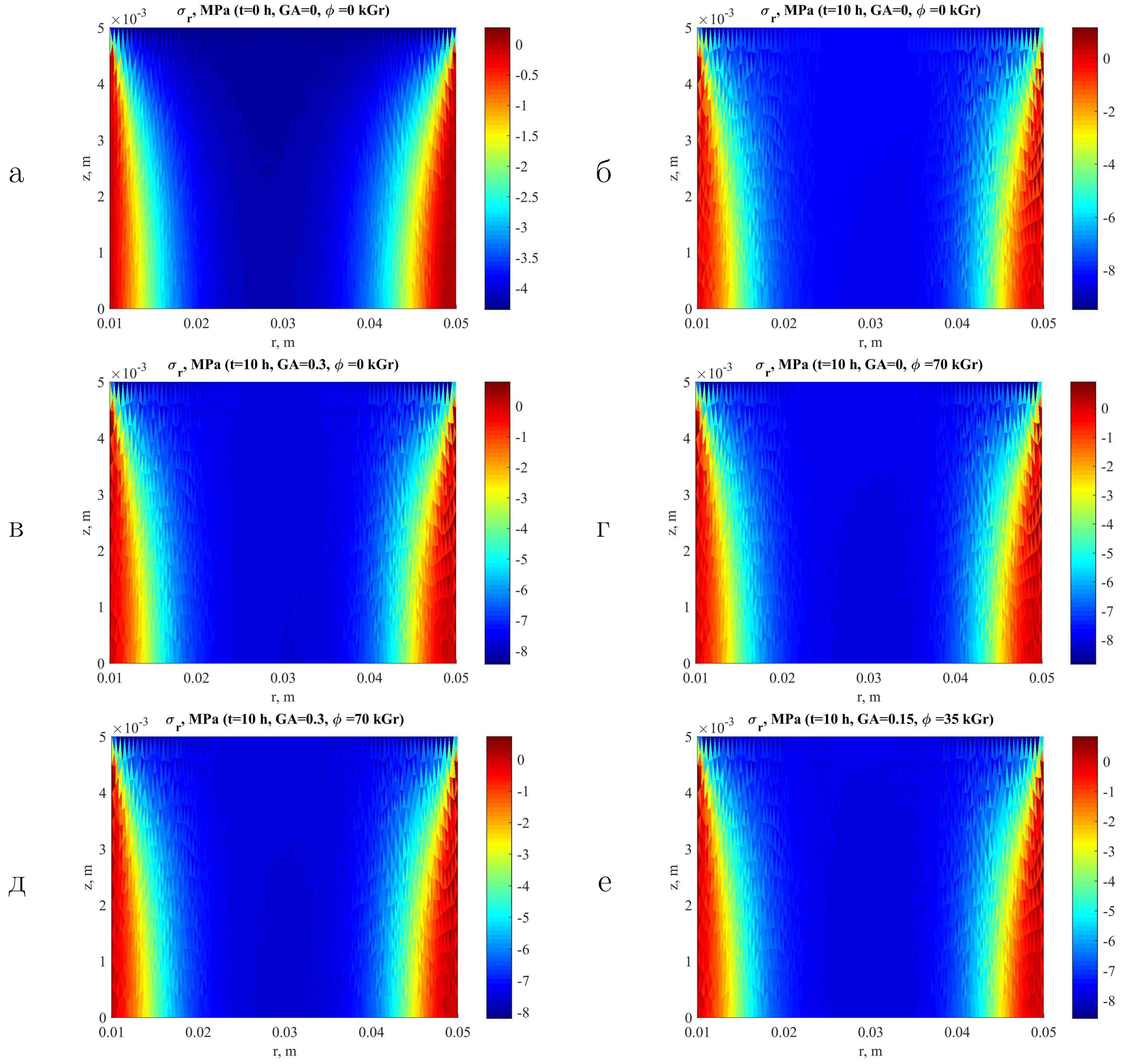


Рисунок 7.9 — Распределение радиальных напряжений σ_r в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр

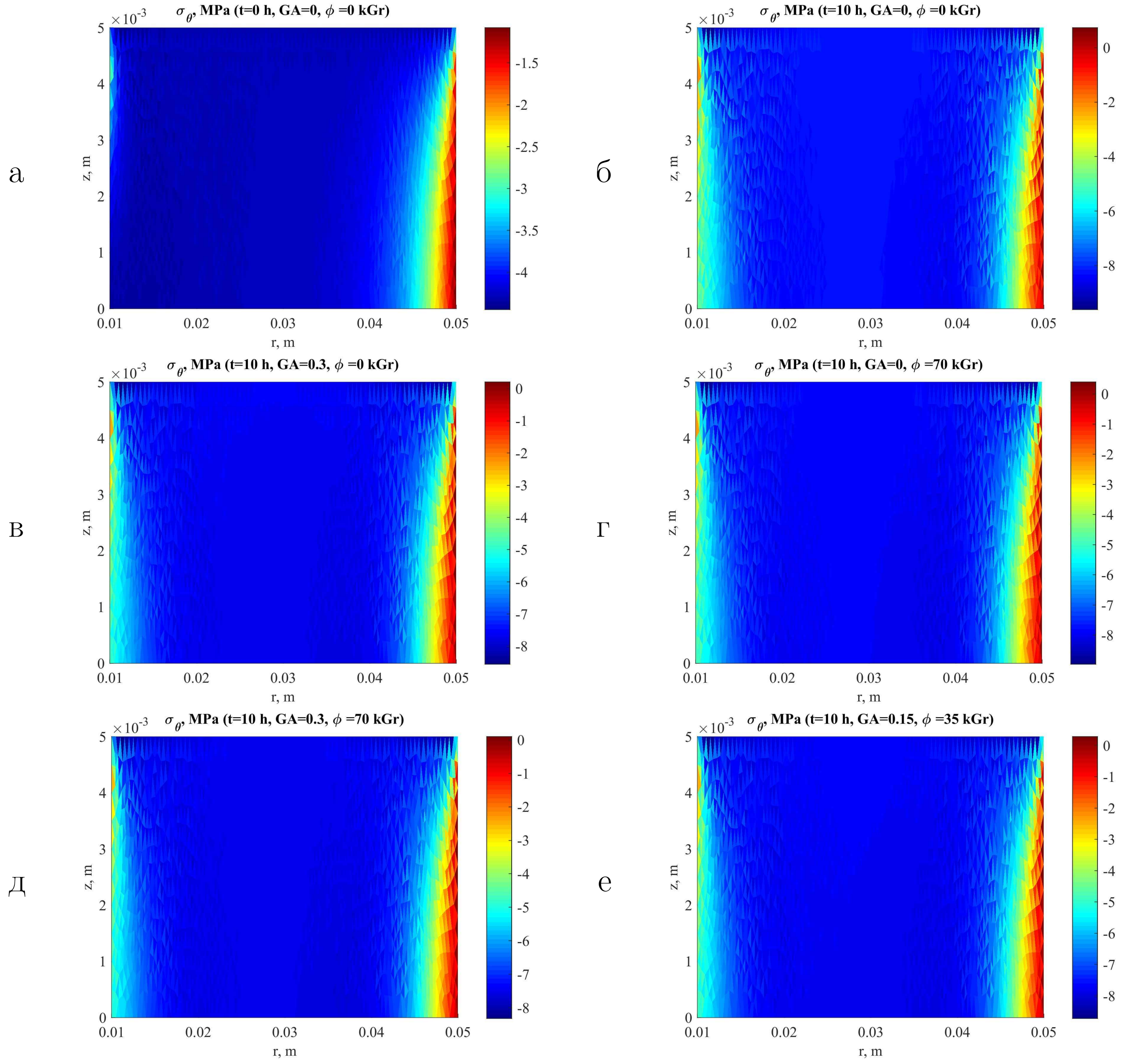


Рисунок 7.10 — Распределение окружных напряжений σ_θ в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15$ %, $\Phi = 35$ кГр

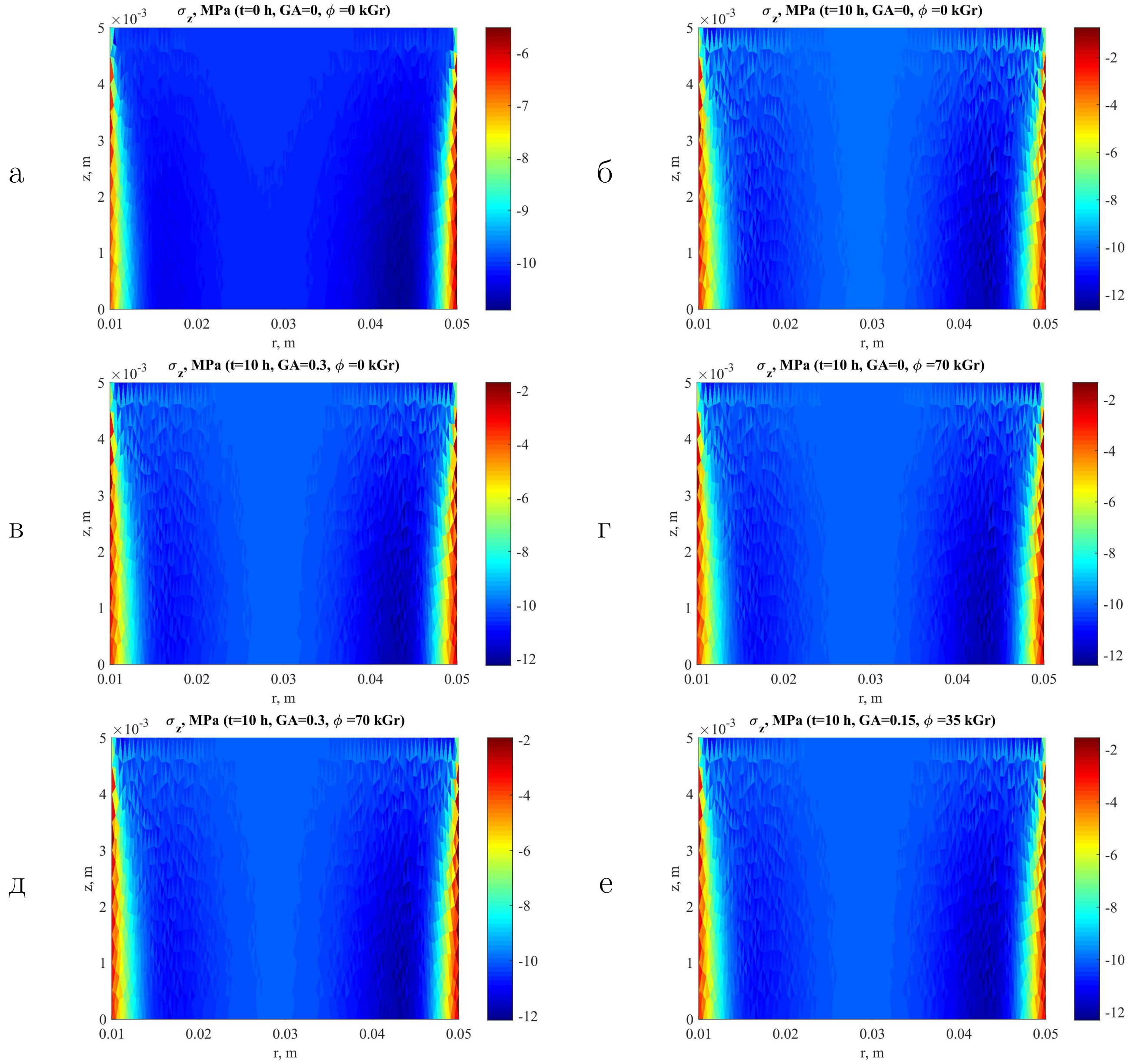


Рисунок 7.11 — Распределение осевых напряжений σ_z в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0$ %, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30$ %, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15$ %, $\Phi = 35$ кГр

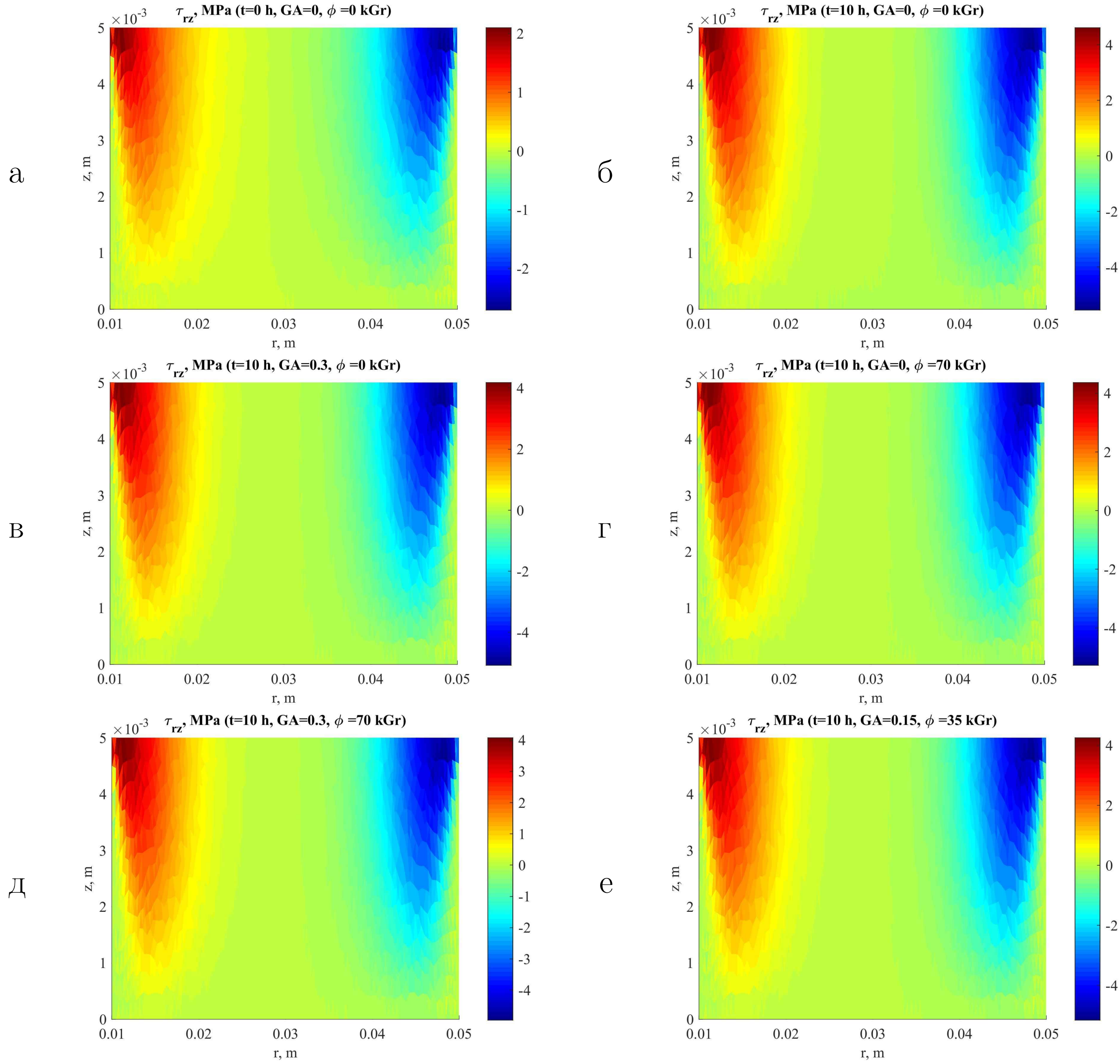


Рисунок 7.12 — Распределение касательных напряжений τ_{rz} в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр

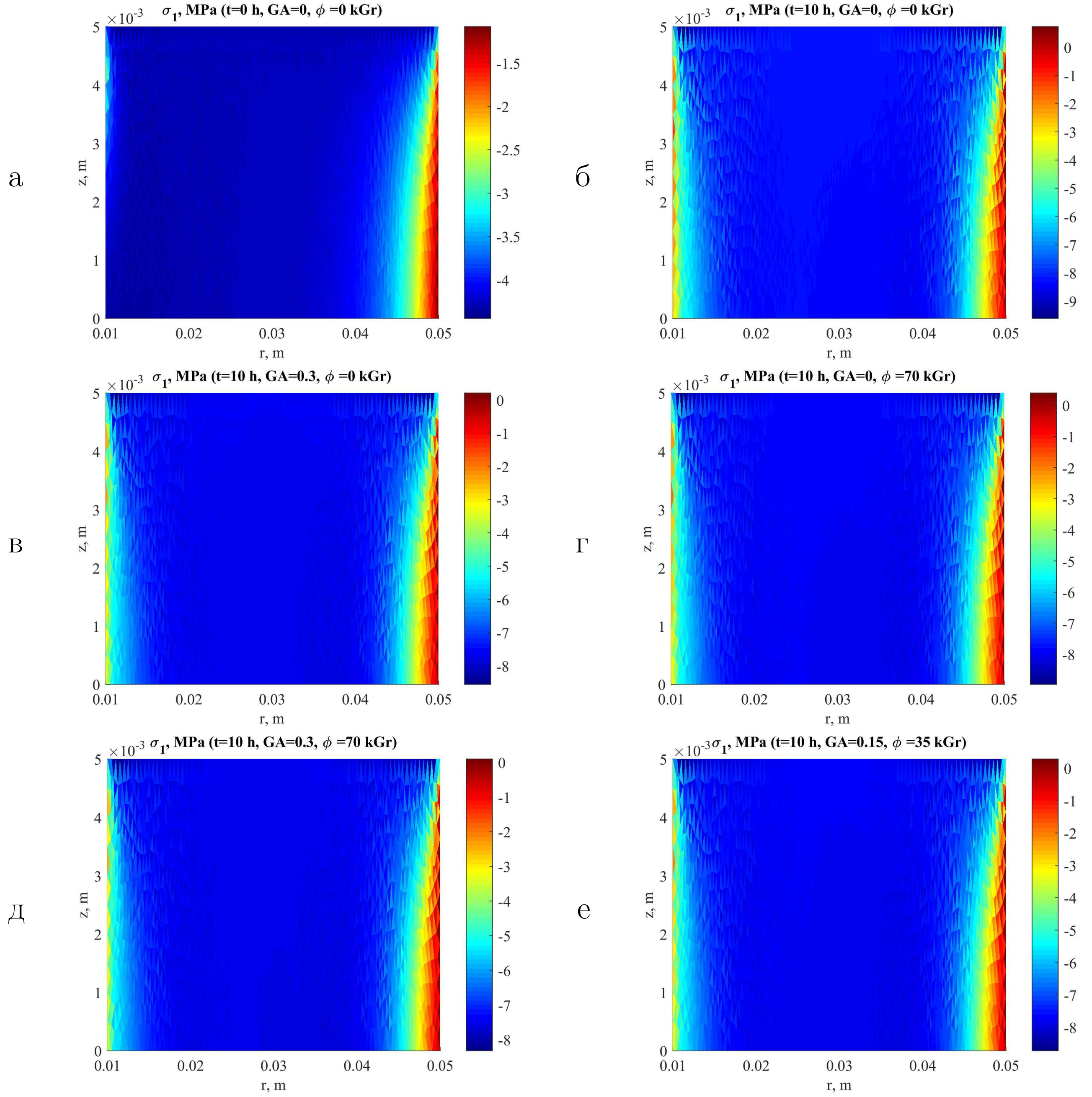


Рисунок 7.13 — Распределение главных наибольших по значению напряжений σ_1 в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА = 0 %, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА = 0 %, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА = 30 %, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА = 0 %, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА = 30 %, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА = 15 %, $\Phi = 35$ кГр

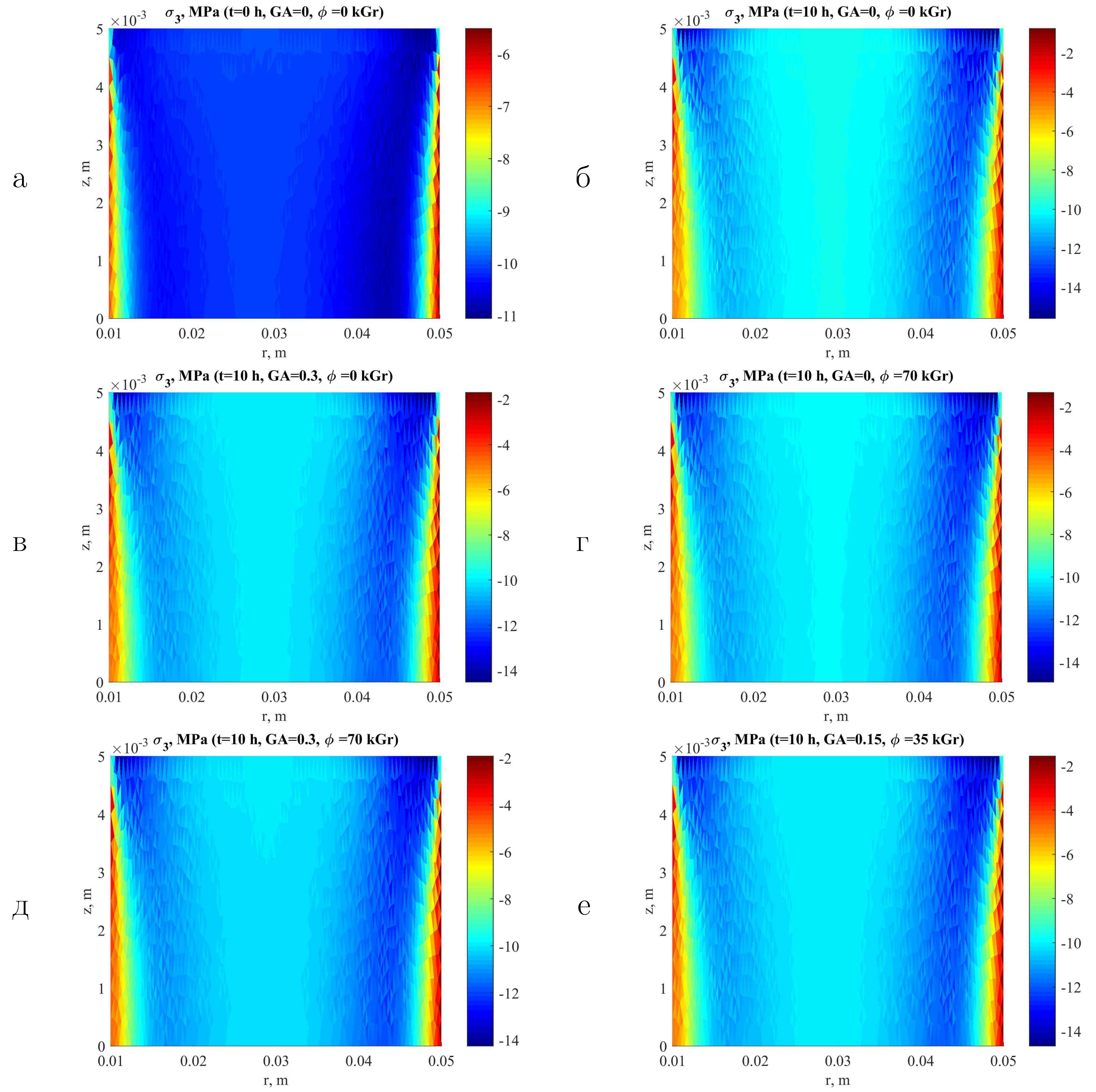


Рисунок 7.14 — Распределение наименьших по значению главных напряжений σ_3 в цилиндрическом полимерном теле в разные моменты времени в зависимости от добавки ГА и наличия ионизирующего излучения: а — $t = 0$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; в — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; г — $t = 10$ ч, ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; д — $t = 10$ ч, ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; е — $t = 10$ ч, ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр

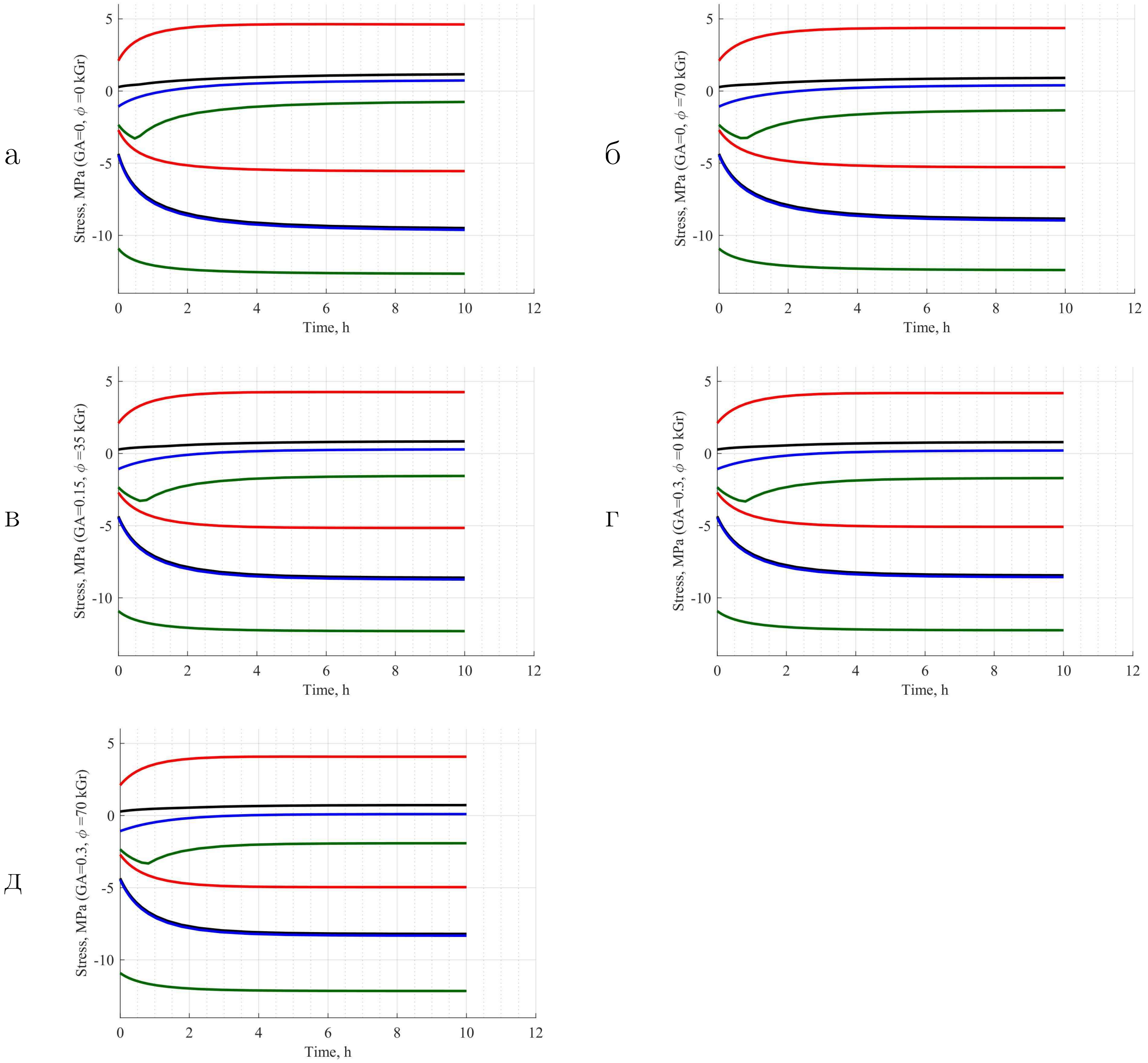


Рисунок 7.15 — Распределение максимальных и минимальных значений радиальных, окружных, осевых и касательных напряжений во времени: а — ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; б — ГА $= 0\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; в — ГА $= 15\,\%$, $\Phi = 35$ кГр; г — ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 0$ кГр; д — ГА $= 30\,\%$, $\Phi = 70$ кГр; чёрная линия — σ_r; синяя — σ_θ; зелёная — σ_z; красная — τ_{rz}

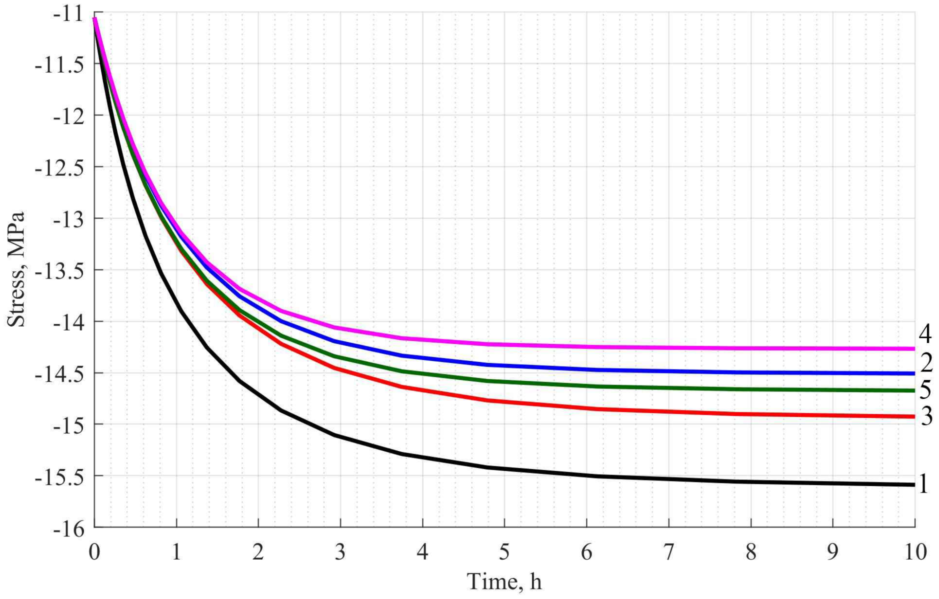


Рисунок 7.16 — Изменение во времени наименьших главных (сжимающих) напряжений σ_3 в теле с течением времени: 1 — ГА = 0 %, Ф = 0 кГр; 2 — ГА = 30 %, Ф = 0 кГр; 3 — ГА = 0 %, Ф = 70 кГр; 4 — ГА = 30 %, Ф = 70 кГр; 5 — ГА = 15 %, Ф = 35 кГр

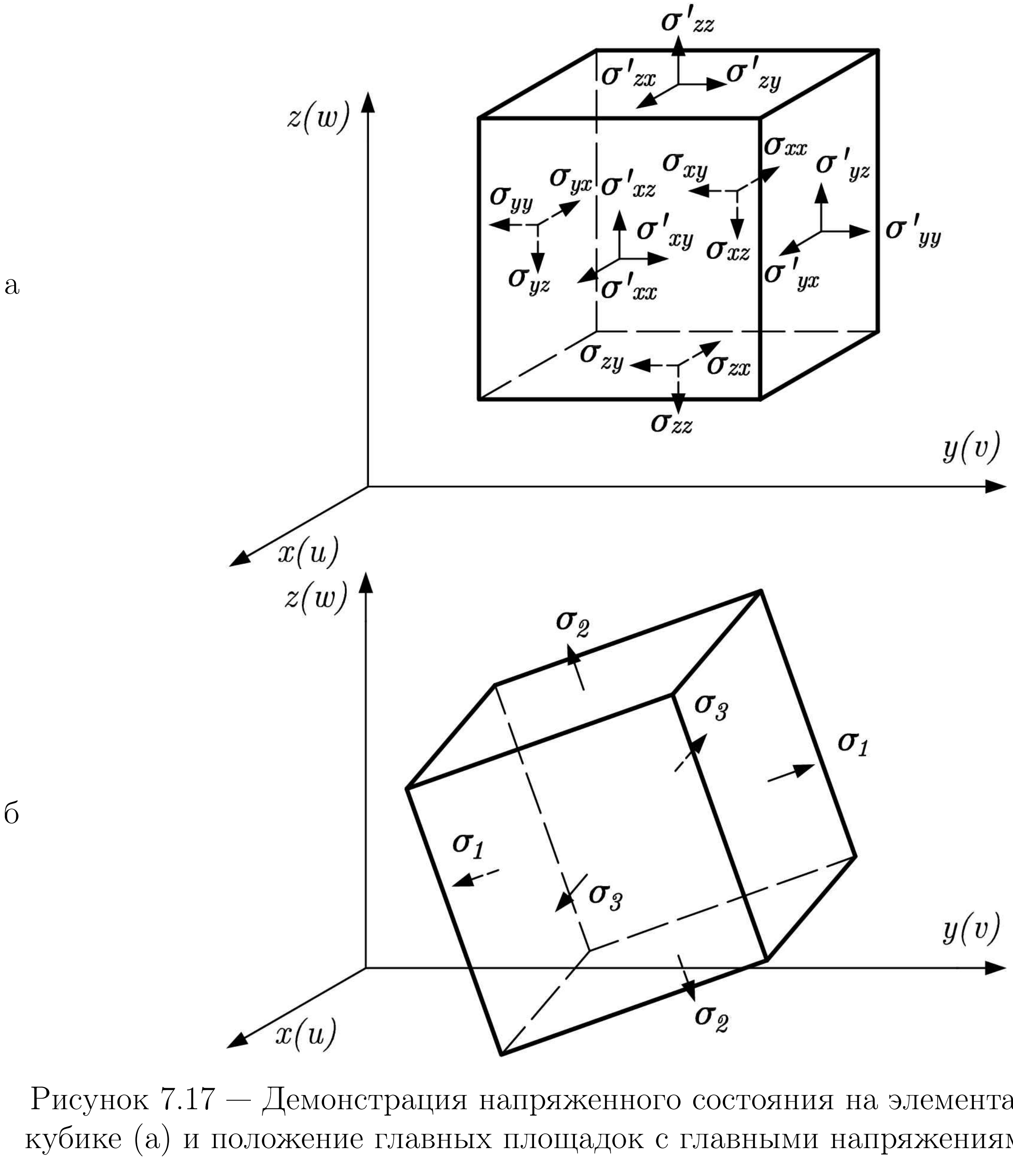


Рисунок 7.17 — Демонстрация напряженного состояния на элементарном кубике (а) и положение главных площадок с главными напряжениями (б)

Заключение

В результате проделанных исследований предложена математическая модель определения напряжённо-деформированного состояния полимерных тел на основании нелинейного обобщённого уравнения Максвелла-Гуревича и с учётом неоднородности материала, вызванной температурным полем. Путём непосредственного конечно-элементного моделирования произведена оценка длительной прочности адгезионного соединения.

На основании приведённых результатов можно сделать следующие выводы:

1. Усовершенствовано научное направление, связанное с методикой расчёта полимерных тел на прочность в термовязкоупругой постановке.
2. Уточнено аппроксимирующее выражение функционала температурного поля во времени.
3. Разработан новый 4-узловой конечный элемент при помощи численно-аналитического решения заданной аппроксимирующей функции, учитывающий температурное воздействие и реологию полимера.
4. Разработана и реализована в виде пакета прикладных программ для программного комплекса MatLab методика расчёта гомогенных и гетерогенных систем в условиях термовязкоупругости при помощи разработанного ранее 4-узлового конечного элемента.
5. Уточнена модель расчёта длительной прочности адгезионного соединения при помощи разработанного 4-узлового конечного элемента.
6. Доказана достоверность расчёта адгезионного соединения путем моделирования в нелинеаризированной и линеаризированной постановках.
7. Доказана необходимость использования полноценного моделирования конечными элементами адгезионного соединения вместо использования таких методов, как метод пограничного слоя.
8. Доказана необходимость использования комплексного подхода к расчёту конструкций и их элементов из полимерных материалов, заключающего-

ся не только в корректном моделировании конечного-элементной сетки по телу, но и во времени, а также использование моделей, учитывающих наличие обратимых деформаций ползучести с определением физико-механических параметров исследуемого полимера.

9. Предложена оптимизация расчёта конструкций из полимерных материалов, заключающаяся в оптимизации: шага времени расчёта, шага механической сетки, принятия положения центра тяжести КЭ.
10. Разработана методика определения физико-механических параметров полимера как в зависимости от температуры, так и от содержания добавок и ионизирующего излучения. При этом физико-механические параметры полимера являются функцией от двух переменных.
11. Доказано, что для полноценной оценки напряжённо-деформированного состояний конструкций из полимера необходимо проведение испытаний с последующим определением физико-механических параметров для данных условий с учётом внешних факторов (температурное поле, химическая усадка, ионизирующее излучение и т.д.). Параметры полимера, полученные при нормальных условиях, могут быть использованы для определения напряжённо-деформированного только в приближённых инженерных расчётах.

Литература

[1] *Александров, А. П.* Изучение полимеров. Высокоэластичная деформация полимеров [Текст] / А. П. Александров, Ю. С. Лазуркин // Журнал технической физики. — 1939. — Т. 9. — № 14.

[2] *Александров, А. П.* Морозостойкость высокомолекулярных соединений [Текст] / А. П. Александров //Труды I и II конф. по высокомолекулярным соединениям. — М.–Л.: Изд-во АН СССР. — 1945. — С. 49–59.

[3] *Александров, К. С.* Упругие свойства кристаллов (обзор) [Текст] / К. С. Александров, Т. В. Рыжова. — Кристаллография, вып. 2, 1961. — С. 289–314

[4] *Алфрей, Т.* Механические свойства высокополимеров [Текст] / Т. Алфрей. — М.–Л.: ИЛ, 1952.

[5] *Аменадзе, Ю. А.* Теория упругости: учебник для университетов [Текст] / Ю. А. Аменадзе. — М.: Высшая школа, 1976. — 272 с.

[6] *Андреев, В. И.* Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография [Текст] / В. И. Андреев. — М.: Издательство АСВ, 2002. — 288 с.

[7] *Андреев, В. И.* Упругое и упругопластическое равновесие толстостенных цилиндрических и сферических непрерывно неоднородных тел: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Андреев Владимир Игоревич. — М., 1986. — 427 с.

[8] *Андреевская, Г. Д.* Высокопрочные ориентированные стеклопластики [Текст] / Г. Д. Андреевская. — Наука, 1966. — 370 с.

[9] *Архангельский, Б. А.* Суда из пластмасс [Текст] / Б. А. Архангельский, И. М. Альшиц. — Л.: Судпромгиз, 1963.

[10] *Аскадский, А. А.* Введение в физико-химию полимеров [Текст] / А. А. Аскадский, А. Р. Хохлов — М.: Научный мир, 2009. — 384 с.

[11] *Бабич, В. Ф.* Исследование влияния температуры на механические характеристики жёстких сетчатых полимеров: дис. ... канд. физ.-матем. наук /

Учен. совет по механике и материаловедению полимеров при науч.-исслед. физ.-хим. ин-те им. Л. Я. Карпова. — М., 1966.

[12] *Бабич, В. Ф.* К вопросу о корреляции между равновесным модулем высокоэластичности и числом сшивок в жёстких сетчатых полимерах [Текст] / В. Ф. Бабич, Ю. М. Сивергин, А. А. Берлин, А. Л. Рабинович // Механика полимеров. — 1966. — № 1.

[13] *Баландин, М. Ю.* Векторный метод конечных элементов: учебное пособие [Текст] / М. Ю. Баландин, Э. П. Шурина. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 2001. — 69 с.

[14] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. — М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003. — 632 с.

[15] *Бейдер, Э. Я.* Стеклопластики на термопластичной матрице [Текст] / Э. Я. Бейде и др. //Труды ВИАМ. — 2013. — №7. — С. 3.

[16] *Вайнберг, М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений [Текст] / М. М. Вайнберг. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

[17] *Выгодский, Я. Я.* Справочник по элементарной математике [Текст] / Я. Я. Выгодский. — М.: Наука, 2006. — 509 с.

[18] Гагаринские чтения — 2016: XLII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: В 4 т. — М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016.

[19] *Гилбарг, Д.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: пер. с англ. [Текст] / Д. Гилбарг, Н. Трудингер, Л. П. Купцова. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

[20] *Гуревич, Г. И.* О законе деформации твердых и жидких тел [Текст] / Г. И. Гуревич // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17. — № 12. — С. 1491–1502.

[21] *Гуревич, Г. И.* О соотношении упругих и остаточных деформаций в общем случае однородного напряженного состояния [Текст] / Г. И. Гуревич // Труды Геофиз. ин-та АН СССР. — 1953. — № 21. — С. 49–90.

[22] *Гуревич, Г. И.* О зависимости между тензорами напряжений и скоростей деформации в общем случае больших и малых деформаций [Текст] / Г. И. Гуревич // Доклады Академии наук. — Российская академия наук, 1958. — Т. 120. — № 5. — С. 987–990.

[23] *Гуревич, Г. И.* Об обобщении уравнения Максвелла на случай трех измерений с учетом малых деформаций упругого последействия [Текст] / Г. И. Гуревич // Тр. Ин-та Физики Земли АН СССР. — 1959. — Т. 2. — С. 169.

[24] *Гуревич, Г. И.* О зависимости между напряжениями и перемещениями при больших деформациях в случае одномерной задачи [Текст] / Г. И. Гуревич, А. Л. Рабинович // Тр. ИФЗ АН СССР. — 1959. — № 2.

[25] *Давыдова, И. Ф.* Стеклопластики в конструкциях авиационной и ракетной техники [Текст] / И. Ф. Давыдов, Н. С. Кавун // Стекло и керамика. — 2012. — № 4. — С. 36–42.

[26] *Денисюк, М. Н.* Структура, область применения, основные преимущества и недостатки современных композиционных материалов [Электронный ресурс] / М. Н. ДЕНИСЮК, В. В. Артемов, И. А. Прокопов // Вольский военный институт материального обеспечения. — 2015. — № 2 (36). — С. 161–163. — URL: `https://elibrary.ru/download/elibrary_25114187_54179818.pdf` (дата обращения: 19.12.2018).

[27] *Дудник, А. Е.* Моделирование прочностных характеристик и прогнозирование несущей способности напорных труб из полиолефинов: дис. . . . канд. техн. наук: 02.00.06 / Дудник Анастасия Евгеньевна. — Нальчик, 2016. — 133 с.

[28] *Дудник, А. Е.* Нестационарная задача теплопроводности для электрического кабеля с ПВХ изоляцией [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко,

С. В. Литвинов // Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2015. —№ 6. — С. 49–51.

[29] *Дудник, А. Е.* Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Пластические массы. — 2016. — № 1–2. — С. 30–33.

[30] *Дудник, А. Е.* Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости [Электронный ресурс] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов,** А. С. Денего // Инженер. вестник Дона. — 2015. — № 2, ч. 2. — URL: `http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063` (дата обращения: 19.12.2018).

[31] *Иванов, А. Г.* Влияние структуры армирования на предельную деформируемость и прочность оболочек из ориентированного стеклопластика при взрывном нагружении изнутри [Текст] / А.Ġ. Иванов, М. А. Сырунин, А.Ġ. Федоренко // ПМТФ. — 1992. — Т. 33. — № 4. — С. 130.

[32] *Ильюшин, А. А.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра [Текст] / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов // Механика полимеров. — 1966. — №2. — С. 170–189.

[33] *Ильюшин, А. А.* Упруго-пластические деформации полых цилиндров [Текст] / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 277 с.

[34] *Ишлинский, А. Ю.* Продольные колебаний стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации [Текст] / А. Ю. Ишлинский // ПММ. — 1940. — № 4, вып. 1.

[35] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластичных тел [Текст] / А. Ю. Ишлинский // Изв. АН СССР, ОТН. — 1945. — № 3.

[36] *Зеленский, Э. С.* Армированные пластики–современные конструкционные материалы [Текст] / Э. С. Зеленский и др. // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д. И. Менделеева). — 2001. — Т. 45. — № 2. — С. 56–74.

[37] *Калиткин, Н. Н.* Численные методы: справочное пособие [Текст] / Н. Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

[38] *Карпин, В. Л.* Опыт применения пластмасс при изготовлении технологической оснастки [Текст] / В. Л. Карпин // Пластмассы в машиностроении и приборостроении. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961.

[39] *Карпов, В. Л.* Радиационнохимические процесс и их осуществление в промышленности [Текст] / В. Л. Карпов // Атомная энергия: материалы всесоюзной научн.-технич. конференции «XX лет производства и применения изотопов и источников ядерных излучений в народном хозяйстве СССР». — М.: Атомиздат, 1969. — Т. 26, вып. 2. — С. 150–154.

[40] *Киселев, Б. А.* Стеклопластики [Текст] / Б. А. Киселев. — М.: Госхимиздат, 1962.

[41] *Козельский, Ю. Ф.* Влияние физических полей на деформационные свойства железобетонных защитных конструкций: монография [Текст] / Ю. Ф. Козельский, **С. В. Литвинов,** А. С. Чепурненко, Б. М. Язьев. — Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. — 123 с.

[42] *Козлов, Г. В.* Кластерная модель аморфного состояния полимеров [Текст] / Г. В. Козлов, В. У. Новиков // Успехи физических наук. — 2001. — Т. 171. — № 7. — С. 717–764.

[43] *Курачев, Р. М.* Моделирование напряженно-деформированного состояния корпуса высокого давления с учетом воздействия физических полей [Электронный ресурс] / Р. М. Курачев, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов** // Соврем. наукоемкие технологии. — 2016. — № 2–3. — С. 430–434. — URL: `http://top-technologies.ru/ru/article/view?id=35647` (дата обращения: 19.12.2018).

[44] *Ладыженская, О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

[45] *Лазуркин, Ю. С.* Механические свойства полимеров в стеклообразном состоянии: дисс. ... д-ра. физ.-матем. наук. — М.: Ин-т физических проблем им. С. И. Вавилова, 1954.

[46] *Лазуркин, Ю. С.* О природе больших деформаций высокомолекулярных веществ в стеклообразном состоянии [Текст] / Ю. С. Лазуркин, Р. Л. Фогельсон // ЖТФ. — Т. 21, вып. 3. — 1951. — С. 267–286.

[47] *Лейбфриед, Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов [Текст] / Г. Лейбфриед., Б. Я. Мойжес. — Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963. — 312 с

[48] *Литвинов, С. В.* Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра [Текст] / **С. В. Литвинов** // Материалы III Междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2007. — С. 27–32.

[49] *Литвинов, С. В.* Модели равнопрочного толстостенного цилиндра при термосиловых воздействиях [Текст] / **С. В. Литвинов,** А. С. Чепурненко, А. А. Аваков, С. Б. Языев // Строительство–2014: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2014. — С. 204–205.

[50] *Литвинов, С. В.* Моделирование процессов деформирования многослойных цилиндрических тел при термомеханических нагрузках: монография [Текст] / **С. В. Литвинов,** С. Б. Языев. — Ростов н/Д.: Рост. гос. строит. ун-т, 2009. — 96 с.

[51] *Литвинов, С. В.* Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов,** Л. И. Труш, А. Е. Дудник // Инженер. вестник Дона. — 2016. — № 2. — URL: `http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560` (дата обращения: 19.12.2018).

[52] *Литвинов, С. В.* Напряженно-деформированное состояние многослойных поли-мерных труб с учетом ползучести материала [Текст] / **С. В. Литвинов,** Г. М. Данилова–Волковская, А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко // Соврем. наука и инновации. — 2015. — № 3 (11). — С. 71–78.

[53] *Литвинов, С. В.* Нелинейная ползучесть неоднородных многослойных цилиндров и сфер: дис. …канд. техн. наук: 01.02.04 / **Литвинов Степан Викторович.** — М., 2010. — 200 с.

[54] *Литвинов, С. В.* Определение напряженно-деформированного состояния вращающегося полимерного тела [Текст] / С. В. Литвинов и др. // Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения [Текст]: материалы XIV междунар. науч.–практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2018. — С. 112–117.

[55] *Литвинов, С. В.* Осесимметричная термоупругая деформация цилиндра с учетом двухмерной неоднородности материала при воздействии теплового и радиационного нагружений [Текст] / **С. В. Литвинов,** Ю. Ф. Козельский, Б. М. Языев // Вестник МГСУ. — 2012. — № 11. — С. 82–87.

[56] *Литвинов, С. В.* Особенности расчёта бетонных цилиндрических тел под темпера-турным нагружением [Текст] / **С. В. Литвинов,** Л. И. Труш // Строительство–2015: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2015. — С. 115–117.

[57] *Литвинов, С. В.* Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учетом нелинейной ползучести [Текст] / **С. В. Литвинов,** С. Б. Языев, С. Б. Языева // Вестник МГСУ. — 2010. — № 1. — С. 128–132.

[58] *Литвинов, С. В.* Ползучесть полимерного цилиндра, находящегося в стадии охлаждения [Текст] / **С. В. Литвинов,** С. Б. Языев // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16, вып. 6. — С. 1089.

[59] *Литвинов, С. В.* Равнопрочные и равнонапряжённые конструкции: преимущества и недостатки [Текст] / **С. В. Литвинов,** А. С. Чепурненко, Л. И. Труш // Строительство–2014: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2014. — С. 189–190.

[60] *Литвинов, С. В.* Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов,**

Ю. Ф. Козельский, Б. М. Языев // Инженер. вестник Дона. — 2012. — № 3. — URL: `http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/954` (дата обращения: 19.12.2018).

[61] *Литвинов, С. В.* Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. А. Савченко, С. Б. Языев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 5. — С. 78–83. — URL: `http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1261/783` (дата обращения: 22.05.2019).

[62] *Литвинов, С. В.* Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении [Электронный ресурс] / **С. В. Литвинов,** Б. М. Языев, А. Н. Бескопыльный // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 4. — URL: `http://ivdon.ru/magazine/archive/n4y2011/704` (дата обращения: 19.12.2018).

[63] *Малмейстер, А. К.* Сопротивление жестких полимерных материалов [Текст] / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. — Рига: Зинатнс, 1972. — С. 498.

[64] *Медведев, С. С.* Изотопы и излучения в химии [Текст] / С. С. Медведев. — М.: изд-во АН СССР, 1958. — 85 с.

[65] *Миранда, К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа: пер. с итал. яз. [Текст] / К. Миранда. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. — 256 с.

[66] Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616951 / Литвинов С. В., Дудник А. Е., Аваков А. А., Труш Л. И.; Дон. гос. техн. ун-т. — № 2018614101; заявл. 24.04.2018; зарег. 09.06.2018.

[67] *Новиченок, Л. Н.* Теплофизические свойста полимеров [Текст] / Л. Н. Новиченок, Э. П. Шульман. — Минск: Наука и техника, 1971. — 120 с.

[68] *Огибалов, П. М.* Механика армированных пластиков [Текст] / П. М. Огибалов, Ю. В. Суворова. — М.: МГУ, 1965.

[69] Определение напряжённо-деформированного состояния бетонных тел цилиндрической формы под действием физических полей и механического давления: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015611914 / Язьев Б. М., **Литвинов С. В.,** Пучков Е. В., Чепурненко А. С.; Рост. гос. строит. ун-т. — № 2014662825; заявл. 11.12.2014; зарег. 09.02.2015.

[70] Оптимизация толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, испытывающих температурное и силовое воздействие: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015611906 / Язьев Б. М., **Литвинов С. В.,** Пучков Е. В., Чепурненко А. С.; Рост. гос. строит. ун-т. — № 2014662800; заявл. 10.12.2014; зарег. 09.02.2015.

[71] Пластмассы в машиностроении и приборостроении: сборник статей [Текст]. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961.

[72] *Рабинович, А. Л.* Введение в механику армированных полимеров [Текст] / А. Л. Рабинович. М.: Наука, 1970. — 482 с.

[73] *Рабинович, А. Л.* Некоторые механические характеристики плёнок, бутварфенольного полимера [Текст] / А. Л. Рабинович // Высокомол. соед. — 1959. — № 7.

[74] *Рабинович, А. Л.* Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров: автореф. д-ра ф.-м. наук. М. — 1965.

[75] *Рабинович, А. Л.* Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. — М., 1965.

[76] *Рабинович, А. Л.* Уравнения связи при плоском напряженном состоянии ориентированных стеклопластиков [Текст] // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 153. — № 4.

[77] *Работнов, Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М., 1966. — 752 с.

[78] *Раскутин, А. Е.* Углепластики и стеклопластики нового поколения [Текст] / А. Е. Раскутин, И. И. Соколов // Труды ВИАМ. — 2013. — № 4. — С. 9.

[79] *Розовский, М. И.* Ползучесть и длительное разрушение материалов [Текст] / М. И. Розовский // Техн. физика. — 1951, — Т. XXI. — М.: Мир, 1972. — 418 с.

[80] *Саввина, А. В.* Прочностные характеристики армированных полиэтиленовых труб при низких температурах: дис. . . . канд. техн. наук: 01.02.06 / Саввина Александра Витальевна. — Якутск, 2017. — 101 с.

[81] *Самарский, А. А.* Разностные методы для эллиптических уравнений [Текст] / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. — М.: Наука, 1976. — 352 с.

[82] *Саркисян, Н. Е.* Выносливость и деформативность ориентированного стеклопластика при высокой частоте нагружения [Текст] // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. — 1974. — Т. 27. — № 6. — С. 74–82.

[83] *Слонимский, Г. Л.* Краткие очерки по физико-химии полимеров [Текст] / Г. Л. Сломинский. — М.: Химия, 1967. — 231 с.

[84] *Соболев, С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

[85] Советы и рекомендации по моделированию ползучести материалов в методе конечных элементов [Электронный ресурс] // Софт Инжиниринг Групп. — URL: `https://www.ansys.soften.com.ua/about-ansys/blog/138-sovety-i-rekomendatsii-po-modelirovaniyu-polzuchesti-materialov`
`html` (дата обращения: 19.12.2018).

[86] *Соловьева, Е. В.* Исследование релаксационных свойств первичного и вторичного поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева, А. А. Аскадский, М. Н. Попова // Пластические массы. — 2013. — № 2. — С. 54–62.

[87] *Соловьева, Е. В.* Экспериментальные исследования релаксации напряжения поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева // Наука, техника и образование. — 2015. — № 8. — С. 26–28.

[88] *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов: учебное издание [Текст] / Л. Сегерлинд; под ред. Б. Е. Победри. — М.: Мир, 1979. — 392 с.

[89] *Тагер, А. А.* Физико-химия полимеров [Текст] / А. А. Тагер. — М.: Рипол Классик, 1978. — 545 с

[90] *Тарасюк, А. П.* Влияние качества поверхностного слоя волокнистых полимерных композитов после механической обработки на их эксплуатационные свойства [Текст] / А. П. Тарасюк // Високі технології в машинобудуванні (High technologies of machine-building) : зб. наук. пр. — Харків: НТУ «ХПІ», 2012. — Вип. 1 (22). — С. 281–290.

[91] *Тарнопольский, Ю. М.* Учет сдвигов при изгибе ориентированных стеклопластиков [Текст] / Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розу, В. А. Поляков // Механика полимеров. — 1965. — № 2. — С. 38.

[92] *Тобольский, А.* Свойства и структура полимеров [Текст] / А. Тобольский. — М.: Химия, 1964. — 322 с.

[93] *Томашевский, В. Т.* Ползучесть и длительная прочность при междуслойном сдвиге ориентированных стеклопластиков [Текст] / В. Т. Томашевский, А. А. Туник // Механика полимеров. — 1971. — № 6. — С. 1003.

[94] *Трелоар, Л.* Физика упругости каучука [Текст] / Л. Трелоар. — М.–Л., ИЛ, 1953. — 240 с.

[95] *Турусов, Р. А.* Адгезионная механика: монография [Текст] / Р. А. Турусов. — 2-е изд. — М.: НИУ МГСУ, 2016. — 232 с.

[96] *Турусов, Р. А.* Длительная проность адгезионных соединений при нормальном отрыве [Текст] / Р. А. Турусов, А. Я. Горенберг, Б. М. Языев // Клеи. Герметики, Технологии. — 2011. — № 7. — С. 17–25.

[97] *Турусов, Р. А.* Механические явления в полимерах и композитах (в процессе формирования): дис. . . . д-ра физ.-мат. наук: 01.04.17 / Турусов Роберт Алексеевич. — М., 1983. — 363 с.

[98] *Турчак, Л. И.* Основы численных методов: учебное пособие [Текст] / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 304 с.

[99] *Ферри, Д.* Вязко-упругие свойства полимеров [Текст] / Д. Ферри. — М.: ИЛ, 1964.

[100] *Фрейдин, А. С.* Свойства и расчёт адгезионных соединений [Текст] / А. С. Фрейдин, Р. А. Турусов. — М.: Химия, 1990. — 256 с.: ил.

[101] *Шамбина, С. Л.* Анизотропные композитные материалы и особенности расчета конструкций из них [Текст] / С. Л. Шамбина // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2005. — № 1.

[102] *Языев, Б. М.* Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров: дис. . . . канд. техн. наук: 01.02.04 / Языев Батыр Меретович. — М., 1990. — 171 с.

[103] *Языев, Б. М.* Задача термоупругости для многослойного неоднородного цилиндра [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов** // Строительство–2007: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2007. — С. 86–87.

[104] *Языев, Б. М.* Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра (часть 1) [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов,** С. Б. Языев // Пластические массы. — 2007. — № 9. — С. 36–38.

[105] *Языев, Б. М.* Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра (часть 2) [Текст] / Б. М. Языев,

С. В. Литвинов, С. Б. Языев // Пластические массы. — 2007. — № 12. — С. 44–46.

[106] *Языев, Б. М.* Задача термоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов** // Материалы IV Междун. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2008. — С. 337–342.

[107] *Языев, Б. М.* Напряженно–деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов,** М. Ю. Козельская // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 3. — С. 759–763.

[108] *Языев, Б. М.* Особенности релаксационных свойств сетчатых и линейных полимеров и композитов на их основе: дис. ... д-ра техн. наук: 02.00.06 / Языев Батыр Меретович. — Нальчик, 2009. — 352 с.

[109] *Языев, Б. М.* Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей [Электронный ресурс] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов,** Ю. Ф. Козельский // Инженер. вестник Дона. — 2013. — № 2. — URL: `http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1616` (дата обращения: 19.12.2018).

[110] *Языев, Б. М.* Плоскодеформированное и плосконапряженное состояние непрерывно неоднородного цилиндра под воздействием температурного поля [Текст] / Б. М. Языев, **С. В. Литвинов** // Сборник трудов. — Ростов н/Д: РГСУ, 2006. — С. 25–27.

[111] *Языев, Б. М.* Построение модели равнопрочного толстостенного цилиндра при силовых и температурных воздействиях [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, **С. В. Литвинов,** А. А. Аваков // Научное обозрение. — 2014. — № 9, ч. 3. — С. 863–866.

[112] *Языев, Б. М.* Потери предварительного напряжения в железобетонном цилиндре за счет ползучести бетона [Текст] / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко,

С. В. Литвинов, М. Ю. Козельская // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 2. — С. 445–449.

[113] *Язъев, С. Б.* Моделирование вязкоупругого поведения жестких полимеров при циклическом изменении температуры [Текст] / С. Б. Язъев, С. Б. Язъева, **С. В. Литвинов** // Строительство–2009: материалы юбилейной Междунар. науч.–практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2009. — С. 167.

[114] *Язъев, С. Б.* Реология соляного массива со сферической полостью [Электронный ресурс] / С. Б. Язъев, Б. М. Язъев, **С. В. Литвинов** // Инженер. вестник Дона. — 2012. — № 4, ч. 2. — URL: `http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1322` (дата обращения: 19.12.2018).

[115] *Albano, C.* Evaluation of a composite based on high-density polyethylene filled with surface-treated hydroxyapatite [Текст] / C. Albano и др. // Polymer Bulletin. — 2009. — T. 62. — № 1. — C. 45–55.

[116] *Albano, C.* Prediction of mechanical properties of composites of HDPE/HA/EAA [Текст] / C. Albano и др. //Journal of the mechanical behavior of biomedical materials. — 2011. — T. 4. — № 3. — C. 467–475.

[117] *Alothman, O. Y.* Thermal, creep-recovery and viscoelastic behavior of high density polyethylene/hydroxyapatite nano particles for bone substitutes: effects of gamma radiation [Электронный ресурс] / O. Y. Alothman и др. // Biomedical engineering online. — 2014. — T. 13. — № 1. — C. 125. — URL: `https://biomedical-engineering-online.biomedcentral.com/articles/10.1186/1475-925X-13-125` (дата обращения: 19.12.2018).

[118] *Bonfield, W.* Hydroxyapatite reinforced polyethylene—a mechanically compatible implant material for bone replacement [Текст] / W. Bonfield и др. // Biomaterials. — 1981. — T. 2. — № 3. — C. 185–186.

[119] *Carmen, A.* HDPE/HA composites obtained in solution: effect of the gamma radiation [Текст] / A. Carmen и др. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. — 2006. — T. 247. — № 2. — C. 331–341.

[120] *Chepurnenko, A. S.* Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures [Электронный ресурс] / A. S. Chepurnenko, V. I. Andreev, A. N. Beskopylny, B. M. Jazyev // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2016. — Т. 67. — С. 06059. — URL: `https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/30/matecconf_smae2016_06059.pdf` (дата обращения: 19.12.2018).

[121] *Dudnik, A. E.* Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account [Электронный ресурс] / A. E. Dudnik, A. S. Chepurnenko, **S. V. Litvinov** // International Polymer Science and Technology. — 2017. — Т. 44 (1). — С. 30–33. — URL: `http://www.polymerjournals.com/journals.asp?Search=YES&JournalID=102975&JournalType=ipsat` (дата обращения: 19.12.2018).

[122] *Fang, L.* Processing and mechanical properties of HA/UHMWPE nanocomposites [Текст] / L. Fang, Y. Leng, P.Gao // Biomaterials. — 2006. — Т. 27. — № 20. — С. 3701–3707.

[123] *Fang, L.* Processing of hydroxyapatite reinforced ultrahigh molecular weight polyethylene for biomedical applications [Текст] / L. Fang, Y. Leng, P.Gao // Biomaterials. — 2005. — Т. 26. — № 17. — С. 3471–3478.

[124] *Fouad, H.* Assessment of function-graded materials as fracture fixation bone-plates under combined loading conditions using finite element modelling [Текст] / H. Fouad // Medical Engineering and Physics. — 2011. — Т. 33. — № 4. — С. 456–463.

[125] *Fouad, H* Characterization and processing of high density polyethylene/carbon nano-composites [Текст] / H. Fouad // Materials and Design. — 2011. — Т. 32. — № 4. — С. 1974–1980.

[126] *Fouad, H.* Effect of long?term natural aging on the thermal, mechanical, and viscoelastic behavior of biomedical grade of ultra high molecular weight polyethylene [Текст] / H. Fouad // Journal of applied polymer science. — 2010. — Т. 118. — № 1. — С. 17–24.

[127] *Fouad, H.* Effects of the bone-plate material and the presence of a gap between the fractured bone and plate on the predicted stresses at the fractured bone [Текст] / H. Fouad //Medical Engineering and Physics. — 2010. — Т. 32. — № 7. — С. 783–789.

[128] *Fouad, H.* High density polyethylene/graphite nano-composites for total hip joint replacements: Processing and in vitro characterization [Текст] / H. Fouad, R. Elleithy // Journal of the mechanical behavior of Biomedical materials. — 2011. — Т. 4. — № 7. — С. 1376–1383.

[129] *Fouad, H.* Thermo-mechanical, wear and fracture behavior of high-density polyethylene/hydroxyapatite nano composite for biomedical applications: effect of accelerated ageing [Текст] / H. Fouad, R. Elleithy, O. Y. Alothman // Journal of Materials Science and Technology. — 2013. — Т. 29. — № 6. — С. 573–581.

[130] *Husin, M. R.* Effect of hydroxyapatite reinforced high density polyethylene composites on mechanical and bioactivity properties [Текст] / M. R. Husin и др. // Key Engineering Materials. — Trans Tech Publications, 2011. — Т. 471. — С. 303–308.

[131] *Joseph, R.* Effect of hydroxyapatite morphology/surface area on the rheology and processability of hydroxyapatite filled polyethylene composites [Текст] / R. Joseph // Biomaterials. — 2002. — Т. 23. — № 21. — С. 4295–4302.

[132] *Kane, R. J.* Effects of the reinforcement morphology on the fatigue properties of hydroxyapatite reinforced polymers [Текст] / R. J. Kane, G. L. Converse, R. K. Roeder // Journal of the mechanical behavior of biomedical materials. — 2008. — Т. 1. — № 3. — С. 261–268.

[133] *Li, K.* Preparation and mechanical and tribological properties of high-density polyethylene/hydroxyapatite nanocomposites [Текст] / K. Li, S. C. Tjong // Journal of Macromolecular Science, Part B. — 2011. — Т. 50. — № 7. — С. 1325–1337.

[134] *Litvinov, S. V.* Buckling of glass reinforced plastic rods of variable rigidity [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov и др. // Materials Science Forum.

— Trans Tech Publications. — 2018. — Т. 931. — С. 133–138. — Режим доступа: `https://www.scientific.net/MSF.931.133` (дата обращения: 19.12.2018).

[135] *Litvinov, S. V.* Determination of physic and mechanical parameters of high-density polyethylene based on relaxation curves due to the presence of hydroxyapatite and ionizing radiation [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, S. B. Yazyev, D. A. Vysokovskiy // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2018. — Т. 196. — С. 01013. — URL: `https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2018/55/matecconf_rsp2018_01013/matecconf_rsp2018_01013.html` (дата обращения: 19.12.2018).

[136] *Litvinov, S. V.* Effecting of Modified HDPE Composition on the Stress-Strain State of Constructions [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, B. M. Yazyev, M. S. Turko // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2018. — Т. 463. — № 4. — С. 042063. — URL: `https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/463/4/042063/meta` (дата обращения: 19.12.2018).

[137] *Litvinov, S., V.* Flat Axisymmetrical Problem of Thermal Creepage for Thick-Walled Cylinder Made Of Recyclable PVC [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov,** L. I. Trush, S. B. Yazyev // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — С. 1686–1693. — URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816314734` (дата обращения: 19.12.2018).

[138] *Litvinov, S.* Forecasting the Strength of an Adhesive Bond Over a Long Period of Time [Электронный ресурс] / **S. Litvinov,** A. Zhuravlev, S. Bajramukov, S. Yazyev // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intel-ligent Systems and Computing. — Т. 692. — С. 902–907. — URL: `https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_97` (дата обращения: 19.12.2018).

[139] *Litvinov, S. V.* Longitudinal bending of polymer rods with account taken of creep strains and initial imperfections [Текст] / **S. V. Litvinov,**

E. S. Klimenko, I. I. Kulinich, S. B. Yazyeva // International Polymer Science and Technology. — 2015. — Т. 42. — № 2. — С. 23–25.

[140] *Litvinov, S. V.* Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences [Электронный ресурс] / **S. V. Litvinov,** A. N. Beskopylny, L. I. Trush, S. B. Yazyev // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2017. — Т. 106 (2017). — С. 04013. — URL: `https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/20/matecconf_spbw2017_04013.pdf` (дата обращения: 19.12.2018).

[141] *Litvinov, S. V.* Some features in the definition of the temperature field in axisymmetric problems [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, L. I. Trush, A. A. Avakov // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). — 2017. — С. 1–5. — URL: `https://ieeexplore.ieee.org/document/8076449` (дата обращения: 19.12.2018).

[142] *Mourad, A. H.* Impact of some environmental conditions on the tensile, creep-recovery, relaxation, melting and crystallinity behaviour of UHMWPE-GUR 410-medical grade [Текст] / A. H. Mourad, H. Fouad, R. Elleithy // Materials and Design. — 2009. — Т. 30. — № 10. — С. 4112–4119.

[143] *Nagels, J.* Stress shielding and bone resorption in shoulder arthroplasty [Текст] / J. Nagels, M. Stokdijk, P. M. Rozing // Journal of shoulder and elbow surgery. — 2003. — Т. 12. — № 1. — С. 35–39.

[144] *Pielichowska, K.* Bioactive polymer/hydroxyapatite (nano) composites for bone tissue regeneration [Текст] / K. Pielichowska, S. Blazewicz // Biopolymers / Springer Berlin Heidelberg, 2010. — С. 97–207.

[145] Solid Works Simulation. Вязкоупругая модель [Электронный ресурс] // SOLIDWORKS Web Help. — URL: `https://help.solidworks.com/2019/Russian/SolidWorks/cworks/c_Viscoelastic_Model.htm` (дата обращения: 19.12.2018).

[146] Solid Works Simulation. Модель ползучести [Электронный ресурс] // SOLIDWORKS Web Help. — URL: `https://help.solidworks.`

`com/2019/Russian/SolidWorks/cworks/c_Creep_Model.htm?id=90ac0cb6180d4b5f958dc1682659e7cc#Pg0` (дата обращения: 19.12.2018).

[147] *Sousa, R. A.* Processing and properties of bone-analogue biodegradable and bioinert polymeric composites [Текст] / R. A. Sousa и др. // Composites science and technology. — 2003. — Т. 63. — № 3. — С. 389–402.

[148] *Tanner, K. E.* Clinical applications of hydroxyapatite reinforced materials [Текст] / K. E. Tanner, R. N. Downes, W. Bonfield // British Ceramic Transactions. — 1994. — Т. 93. — № 3. — С. 104–107.

[149] *Trush, L.* Optimization of the Solution of a Plane Stress Problem of a Polymeric Cylin-drical Object in Thermoviscoelastic Statement [Электронный ресурс] / L. Trush, **S. Litvinov,** N. Zakieva, S. Bayramukov // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent Systems and Computing. — Т. 692. — С. 885—893. — URL: `https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_95` (дата обращения: 19.12.2018).

[150] Viscoelasticity [Электронный ресурс] // SHARCNET. — URL: `https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_mat/evis.html` (дата обращения: 19.12.2018).

[151] *Wannomae, K. K.* The effect of real-time aging on the oxidation and wear of highly cross-linked UHMWPE acetabular liners [Текст] / K. K. Wannomae и др. // Biomaterials. — 2006. — Т. 27. — № 9. — С. 1980–1987.

[152] *Yazyev, S.* Energy method in solving the problems of stability for a viscoelastic polymer rods [Электронный ресурс] / S. Yazyev, M. Kozelskaya, G. Strelnikov, **S. Litvinov** // MATEC Web of Conferences. ICMTMTE 2017. — Т. 129 (2017). — С. 05010. — URL: `https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/43/matecconf_icmtmte2017_05010.pdf` (дата обращения: 19.12.2018).

[153] *Younesi, M.* Producing toughened PP/HA-LLDPE ternary bio-composite using a two-step blending method [Текст] / M. Younesi, M. E. Bahrololoom // Materials and Design. — 2009. — Т. 30. — № 10. — С. 4253–4259.

[154] *Zuo, Y.* Novel bio-composite of hydroxyapatite reinforced polyamide and polyethylene: Composition and properties [Текст] / Y. Zuo и др. // Materials Science and Engineering: A. — 2007. — Т. 452. — С. 512–517.

Глава А. Условные обозначения и основные математические операции

А.1 Условные обозначения

$$\nabla\Phi(r,\,\theta,\,z) = \operatorname{grad}\Phi(r,\,\theta,\,z) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e_z}.$$

$$\Delta\Phi = \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi$$

А.2 Дифференцирование матричных соотношений

Процедуры минимизации, рассмотренные в диссертационной работе, подразумевают дифференцирование матричных произведений [88]

$$\Big[N\Big]\Big\{\Phi\Big\} \quad \text{и} \quad \Big\{\Phi\Big\}^T\Big[A\Big]\Big\{\Phi\Big\}$$

по $\Big\{\Phi\Big\}$. Здесь $\Big[N\Big]$ — вектор-строка; $\Big[A\Big]$ — квадратная матрица.

Пусть значение скалярной величины определяется соотношением:

$$\varphi = \Big[N\Big]\Big\{\Phi\Big\}, \tag{А.1}$$

где

$$\Big[N\Big] = \Big[N_1 \;\; N_2 \;\; \ldots \;\; N_r\Big], \quad \Big[\Phi\Big]^T = \Big[\Phi_1 \;\; \Phi_2 \;\; \ldots \;\; \Phi_r\Big].$$

Тогда производная φ по Φ может быть записана вектор-столбцом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} \end{Bmatrix}. \tag{A.2}$$

Элементы вектор-столбца (A.2) вычисляются при помощи записанного в развёрнутом виде произведения (A.1):

$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + \ldots + N_r\Phi_r. \tag{A.3}$$

Проводя операцию дифференцирования выражения (A.3), получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} = N_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} = N_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} = N_r. \tag{A.4}$$

После подстановки полученных выражений в (A.2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{Bmatrix} = \Big\{N\Big\}^T. \tag{A.5}$$

Операция дифференцирования выражения $\Big\{\Phi\Big\}^T \Big[N\Big]^T$ проводится аналогичным образом и результат приводит к тому же самому выражению.

При выводе уравнений метода конечных элементов, с целью сохранения размерности полученных выражений, можно записать следующие правила дифференцирования:

$$\text{пусть} \quad \varphi_1 = \Big\{U\Big\}^T \Big[B\Big]^T \Big[D\Big] \Big\{\varepsilon^*\Big\} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \Big\{\varepsilon^*\Big\}^T \Big[D\Big] \Big[B\Big] \Big\{U\Big\}$$

с учётом правила транспонирования матриц $([A][B][C])^T = [C]^T[B]^T[A]^T$, дифференциал принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\left\{U\right\}} = \frac{\partial \varphi_2}{\left\{U\right\}} = \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\}. \tag{A.6}$$

Здесь принималось, что матрица $\left[D\right]$ — симметричная, т. е. $\left[D\right] = \left[D\right]^T$.

В случае, если рассматривается произведение

$$\varphi = \left\{\Phi\right\}^T \left[A\right] \left\{\Phi\right\},$$

где

$$\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left\{\Phi\right\}^T = \left\{\Phi_1 \quad \Phi_2\right\},$$

можно записать с учётом условия симметрии $a_{12} = a_{21}$

$$\varphi = a_{11}\Phi_1^2 + 2a_{12}\Phi_1\Phi_2 + a_{22}\Phi_2^2.$$

Тогда в процесс дифференцирования получаются выражения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} = 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} = 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2.$$

Окончательно в матричном виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \left\{\Phi\right\}} = 2 \begin{bmatrix} 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2 \\ 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \left\{\Phi\right\}} \left(\left\{\Phi\right\}^T \left[A\right] \left\{\Phi\right\}\right) = 2 \left[A\right] \left\{\Phi\right\}. \tag{A.7}$$

А.3 Значения коэффициентов выражений (5.21) **и** (5.22)

Значения коэффициентов выражения (5.21):

$$\begin{gathered}
k_{11}^{(e)} = -\frac{E}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \big(3R_i^4 - 8R_i^3R_k - \\
- R_k^4 + 6R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 + 8R_i^2Z_k^2 + 8R_k^2Z_i^2 + 8R_k^2Z_k^2 + \\
+ 8R_k^2Z_i^2 \ln R_i - 8R_k^2Z_i^2 \ln R_k + 8R_k^2Z_k^2 \ln R_i - 8R_k^2Z_k^2 \ln R_k - \\
- 16R_iR_kZ_i^2 - 16R_iR_kZ_k^2 - 16R_i^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k \ln R_i + \\
+ 16R_k^2Z_iZ_k \ln R_k + 32R_iR_kZ_iZ_k\big) - \\
- \frac{E\nu}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \big(16R_i^3R_k - 6R_i^4 + 2R_k^4 - \\
- 12R_i^2R_k^2 - 8R_k^2Z_i^2 \ln R_i + 8R_k^2Z_i^2 \ln R_k - 8R_k^2Z_k^2 \ln R_i + \\
+ 8R_k^2Z_k^2 \ln R_k + 16R_k^2Z_iZ_k \ln R_i - 16R_k^2Z_iZ_k \ln Rk\big)\,;
\end{gathered}$$

$$k_{12}^{(e)} = -\frac{E(2R_i - 5R_k)}{72(\nu + 1)} - \frac{E(4R_i - R_k)}{36(2\nu - 1)};$$

$$\begin{gathered}
k_{13}^{(e)} = \frac{E\nu}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \big(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k + \\
+ 2R_i^4 - 2R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_i + \\
+8R_iR_kZ_k^2 \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i - 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k\big) - \\
- \frac{E}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \big(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k + \\
+ R_i^4 - R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_i + \\
+8R_iR_kZ_k^2 \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i - 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k\big)\,;
\end{gathered}$$

$$k_{14}^{(e)} = -\frac{E(4\nu - 1)(2R_i + R_k)}{24(2\nu^2 + \nu - 1)};$$

$$k_{15}^{(e)} = \frac{E}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \bigl(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k +$$

$$+ R_i^4 - R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k + 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i -$$

$$-4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i + 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k\bigr) -$$

$$- \frac{E\nu}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \bigl(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k +$$

$$+ 2R_i^4 - 2R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k + 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i -$$

$$-4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i + 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k\bigr) /;$$

$$k_{16}^{(e)} = \frac{E(2R_i + R_k)}{24(2\nu^2 + \nu - 1)};$$

$$k_{17}^{(e)} = \frac{E\nu}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \bigl(16R_i^3R_k - 6R_i^4 +$$

$$+ 2R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 + 4R_k^2Z_i^2 \ln R_i - 4R_k^2Z_i^2 \ln R_k + 4R_k^2Z_k^2 \ln R_i -$$

$$-4R_k^2Z_k^2 \ln R_k - 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_i + 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_k\bigr) -$$

$$- \frac{E}{24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \bigl(8R_i^3R_k - 3R_i^4 +$$

$$+ R_k^4 - 6R_i^2R_k^2 + 4R_i^2Z_i^2 + 4R_i^2Z_k^2 + 4R_k^2Z_i^2 + 4R_k^2Z_k^2 +$$

$$+ 4R_k^2Z_i^2 \ln R_i - 4R_k^2Z_i^2 \ln R_k + 4R_k^2Z_k^2 \ln R_i - 4R_k^2Z_k^2 \ln R_k -$$

$$- 8R_iR_kZ_i^2 - 8R_iR_kZ_k^2 - 8R_i^2Z_iZ_k - 8R_k^2Z_iZ_k - 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_i +$$

$$+ 8R_k^2Z_iZ_k \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k\bigr);$$

$$k_{18}^{(e)} = \frac{E(14R_i + R_k)}{72(\nu + 1)} + \frac{E(4R_i - R_k)}{36(2\nu - 1)};$$

$$k_{22}^{(e)} = -\frac{1}{(R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)}\left[\frac{E}{12}\left(3R_i^3 - 5R_i^2 R_k + \right.\right.$$

$$+ R_i R_k^2 + R_i Z_i^2 - 2R_i Z_i Z_k + R_i Z_k^2 + R_k^3 + R_k Z_i^2 - 2R_k Z_i Z_k + R_k Z_k^2\big) -$$

$$- \frac{E\nu}{12}\left(3R_i^3 - 5R_i^2 R_k + R_i R_k^2 + 2R_i Z_i^2 - 4R_i Z_i Z_k + \right.$$

$$\left.\left. + 2R_i Z_k^2 + R_k^3 + 2R_k Z_i^2 - 4R_k Z_i Z_k + 2R_k Z_k^2\right)\right];$$

$$k_{23}^{(e)} = \frac{E(4\nu - 1)(R_i + 2R_k)}{24(2\nu^2 + \nu - 1)};$$

$$k_{24}^{(e)} = \frac{1}{(R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)}\left[\frac{E}{12}(R_i + R_k)(-R_i^2 + 2R_i R_k - \right.$$

$$- R_k^2 + Z_i^2 - 2Z_i Z_k + Z_k^2) -$$

$$\left. - \frac{E\nu}{12}(R_i + R_k)(-R_i^2 + 2R_i R_k - R_k^2 + 2Z_i^2 - 4Z_i Z_k + 2Z_k^2)\right];$$

$$k_{25}^{(e)} = \frac{E(R_i + 2R_k)}{24(2\nu^2 + \nu - 1)};$$

$$k_{26}^{(e)} = \frac{1}{(R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)}\left[\frac{E}{24}(R_i + R_k)(2R_i^2 - 4R_i R_k + \right.$$

$$+ 2R_k^2 + Z_i^2 - 2Z_i Z_k + Z_k^2) -$$

$$\left. - \frac{E\nu}{24}(R_i + R_k)(2R_i^2 - 4R_i R_k + 2R_k^2 + 2Z_i^2 - 4Z_i Z_k + 2Z_k^2)\right];$$

$$k_{27}^{(e)} = -\frac{E(14R_i + R_k)}{72(\nu + 1)} - \frac{E(4R_i - R_k)}{36(2\nu - 1)};$$

$$\begin{aligned}k_{28}^{(e)} = \frac{1}{(R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)} \Bigg[\frac{E}{24}(6R_i^3 - 10R_i^2 R_k + 2R_i R_k^2 - \\ - R_i Z_i^2 + 2R_i Z_i Z_k - R_i Z_k^2 + 2R_k^3 - R_k Z_i^2 + 2R_k Z_i Z_k - R_k Z_k^2) - \\ - \frac{E\nu}{24}(6R_i^3 - 10R_i^2 R_k + 2R_i R_k^2 - 2R_i Z_i^2 + 4R_i Z_i Z_k - \\ - 2R_i Z_k^2 + 2R_k^3 - 2R_k Z_i^2 + 4R_k Z_i Z_k - 2R_k Z_k^2) \Bigg];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{33}^{(e)} = (E(3R_k^4 - R_i^4 - 8R_i R_k^3 + 6R_i^2 R_k^2 + \\ + 8R_i^2 Z_i^2 + 8R_i^2 Z_k^2 + 8R_k^2 Z_i^2 + 8R_k^2 Z_k^2 - 8R_i^2 Z_i^2 \ln R_i + \\ + 8R_i^2 Z_i^2 \ln R_k - 8R_i^2 Z_k^2 \ln R_i + 8R_i^2 Z_k^2 \ln R_k - 16R_i R_k Z_i^2 - \\ - 16R_i R_k Z_k^2 - 16R_i^2 Z_i Z_k - 16R_k^2 Z_i Z_k + 16R_i^2 Z_i Z_k \ln R_i - \\ - 16R_i^2 Z_i Z_k \ln R_k - 32R_i R_k Z_i Z_k))/(24(R_i - R_k)^2 (Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) + \\ + (E\nu(16R_i R_k^3 + 2R_i^4 - 6R_k^4 - 12R_i^2 R_k^2 + 8R_i^2 Z_i^2 \ln R_i - 8R_i^2 Z_i^2 \ln R_k + 8R_i^2 Z_k^2 \ln R_i - \\ - 8R_i^2 Z_k^2 \ln R_k - 16R_i^2 Z_i Z_k \ln R_i + \\ + 16R_i^2 Z_i Z_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2 (Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$k_{34}^{(e)} = -(E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1)) - (E(5R_i - 2R_k))/(72(\nu + 1));$$

$$\begin{aligned}
k_{35}^{(e)} = {} & (E(8R_iR_k^3 + R_i^4 - 3R_k^4 - 6R_i^2R_k^2 + 4R_i^2Z_i^2 + \\
& + 4R_i^2Z_k^2 + 4R_k^2Z_i^2 + 4R_k^2Z_k^2 - 4R_i^2Z_i^2 \ln R_i + \\
& + 4R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 4R_i^2Z_k^2 \ln R_i + 4R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_i^2 - \\
& - 8R_iR_kZ_k^2 - 8R_i^2Z_iZ_k - 8R_k^2Z_iZ_k + 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_i - 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_k + \\
& + 16R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
& - (E\nu(16R_iR_k^3 + 2R_i^4 - 6R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 - 4R_i^2Z_i^2 \ln R_i + \\
& + 4R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 4R_i^2Z_k^2 \ln R_i + 4R_i^2Z_k^2 \ln R_k + 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_i - \\
& - 8R_i^2Z_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}$$

$$k_{36}^{(e)} = (E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1)) - (E(R_i + 14R_k))/(72(\nu + 1));$$

$$\begin{aligned}
k_{37}^{(e)} = {} & (E(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k + R_i^4 - R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k + \\
& + 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i + \\
& + 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
& - (E\nu(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k + 2R_i^4 - 2R_k^4 + 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_i^2 \ln R_k + \\
& + 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_i - 4R_iR_kZ_k^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i + \\
& + 8R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}$$

$$k_{38}^{(e)} = -(E(R_i + 2R_k))/(24(2nu^2 + nu - 1));$$

$$k_{44}^{(e)} = -((E(R_i^3 + R_i^2 R_k - 5R_i R_k^2 + R_i Z_i^2 - 2R_i Z_i Z_k + R_i Z_k^2 + 3R_k^3 + \\ + R_k Z_i^2 - 2R_k Z_i Z_k + R_k Z_k^2))/12 - (E\nu(R_i^3 + R_i^2 R_k - 5R_i R_k^2 + 2R_i Z_i^2 - \\ - 4R_i Z_i Z_k + 2R_i Z_k^2 + 3R_k^3 + 2R_k Z_i^2 - 4R_k Z_i Z_k + \\ + 2R_k Z_k^2))/12)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{45}^{(e)} = (E(R_i + 14R_k))/(72(\nu + 1)) - (E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1));$$

$$k_{46}^{(e)} = -((E(-2R_i^3 - 2R_i^2 R_k + 10R_i R_k^2 + R_i Z_i^2 - 2R_i Z_i Z_k + \\ + R_i Z_k^2 - 6R_k^3 + R_k Z_i^2 - 2R_k Z_i Z_k + R_k Z_k^2))/24 - (E\nu(-2R_i^3 - 2R_i^2 R_k + \\ + 10R_i R_k^2 + 2R_i Z_i^2 - 4R_i Z_i Z_k + 2R_i Z_k^2 - 6R_k^3 + 2R_k Z_i^2 - 4R_k Z_i Z_k + \\ + 2R_k Z_k^2))/24)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{47}^{(e)} = -(E(2R_i + R_k))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$k_{48}^{(e)} = ((E(R_i + R_k)(2R_i^2 - 4R_i R_k + 2R_k^2 + Z_i^2 - 2Z_i Z_k + Z_k^2))/24 - \\ - (E\nu(R_i + R_k)(2R_i^2 - 4R_i R_k + 2R_k^2 + 2Z_i^2 - 4Z_i Z_k + \\ + 2Z_k^2))/24)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$\begin{aligned}
k_{55}^{(e)} = {} & (E(3R_k^4 - R_i^4 - 8R_iR_k^3 + 6R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 + 8R_i^2Z_k^2 + \\
& + 8R_k^2Z_i^2 + 8R_k^2Z_k^2 - 8R_i^2Z_i^2 \ln R_i + 8R_i^2Z_i^2 \ln R_k - 8R_i^2Z_k^2 \ln R_i + \\
& + 8R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 16R_iR_kZ_i^2 - 16R_iR_kZ_k^2 - 16R_i^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k + \\
& + 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_i - 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_k + \\
& + 32R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) + \\
& + (E\nu(16R_iR_k^3 + 2R_i^4 - 6R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 \ln R_i - 8R_i^2Z_i^2 \ln R_k + \\
& + 8R_i^2Z_k^2 \ln R_i - 8R_i^2Z_k^2 \ln R_k - 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_i + \\
& + 16R_i^2Z_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}$$

$$k_{56}^{(e)} = (E(R_i - 4R_k))/(36(2\nu - 1)) + (E(5R_i - 2R_k))/(72(\nu + 1));$$

$$\begin{aligned}
k_{57}^{(e)} = {} & (E\nu(4R_iR_k^3 - 4R_i^3R_k + 2R_i^4 - 2R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_i + \\
& + 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_k - 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i - \\
& - 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
& - (E(2R_iR_k^3 - 2R_i^3R_k + R_i^4 - R_k^4 - 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_i^2 \ln R_k - \\
& - 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_i + 8R_iR_kZ_k^2 \ln R_k + 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_i - \\
& - 16R_iR_kZ_iZ_k \ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}$$

$$k_{58}^{(e)} = -(E(4\nu - 1)(R_i + 2R_k))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$\begin{aligned}k_{66}^{(e)} = -((E(R_i^3 + R_i^2R_k - 5R_iR_k^2 + R_iZ_i^2 - 2R_iZ_iZ_k + R_iZ_k^2 + 3R_k^3 +\\ + R_kZ_i^2 - 2R_kZ_iZ_k + R_kZ_k^2))/12 - (E\nu(R_i^3 + R_i^2R_k - 5R_iR_k^2 + 2R_iZ_i^2 -\\ - 4R_iZ_iZ_k + 2R_iZ_k^2 + 3R_k^3 + 2R_kZ_i^2 - 4R_kZ_iZ_k +\\ + 2R_kZ_k^2))/12)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$k_{67}^{(e)} = (E(4\nu - 1)(2R_i + R_k))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));$$

$$\begin{aligned}k_{68}^{(e)} = ((E(R_i + R_k)(-R_i^2 + 2R_iR_k - R_k^2 + Z_i^2 - 2Z_iZ_k + Z_k^2))/12 -\\ - (E\nu(R_i + R_k)(-R_i^2 + 2R_iR_k - R_k^2 + 2Z_i^2 - 4Z_iZ_k +\\ + 2Z_k^2))/12)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{77}^{(e)} = -(E(3R_i^4 - 8R_i^3R_k - R_k^4 + 6R_i^2R_k^2 + 8R_i^2Z_i^2 + 8R_i^2Z_k^2 + 8R_k^2Z_i^2 +\\ + 8R_k^2Z_k^2 + 8R_k^2Z_i^2\ln R_i - 8R_k^2Z_i^2\ln R_k + 8R_k^2Z_k^2\ln R_i - 8R_k^2Z_k^2\ln R_k -\\ - 16R_iR_kZ_i^2 - 16R_iR_kZ_k^2 - 16R_i^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k - 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_i +\\ + 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_k + 32R_iR_kZ_iZ_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)) -\\ - (E\nu(16R_i^3R_k - 6R_i^4 + 2R_k^4 - 12R_i^2R_k^2 - 8R_k^2Z_i^2\ln R_i +\\ + 8R_k^2Z_i^2\ln R_k - 8R_k^2Z_k^2\ln R_i + 8R_k^2Z_k^2\ln R_k + 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_i -\\ - 16R_k^2Z_iZ_k\ln R_k))/(24(R_i - R_k)^2(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1));\end{aligned}$$

$$k_{78}^{(e)} = (E(2R_i - 5R_k))/(72(\nu + 1)) + (E(4R_i - R_k))/(36(2\nu - 1));$$

$$\begin{aligned} k_{88}^{(e)} = -((E(3R_i^3 - 5R_i^2R_k + R_iR_k^2 + R_iZ_i^2 - 2R_iZ_iZ_k + R_iZ_k^2 + R_k^3 + \\ + R_kZ_i^2 - 2R_kZ_iZ_k + R_kZ_k^2))/12 - (E\nu(3R_i^3 - 5R_i^2R_k + R_iR_k^2 + \\ + 2R_iZ_i^2 - 4R_iZ_iZ_k + 2R_iZ_k^2 + R_k^3 + 2R_kZ_i^2 - 4R_kZ_iZ_k + \\ + 2R_kZ_k^2))/12)/((R_i - R_k)(Z_i - Z_k)(2\nu^2 + \nu - 1)); \end{aligned}$$

Значения коэффициентов выражения (5.22):

$$\begin{aligned} f_1^{(e)} = (E(3R_k^2\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_i^2\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,RZ} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,r} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,\theta} + \\ + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,r} - 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,r} + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,\theta} + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,\theta} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,r} - \\ - 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,\theta} - 8R_iT_iZ_i\alpha - 4R_iT_jZ_i\alpha + 8R_iT_iZ_k\alpha - 2R_iT_kZ_i\alpha + \\ + 2R_kT_iZ_i\alpha + 4R_iT_jZ_k\alpha - 4R_iT_lZ_i\alpha - 2R_kT_jZ_i\alpha + 2R_iT_kZ_k\alpha - \\ - 2R_kT_iZ_k\alpha - R_kT_kZ_i\alpha + 18R_iT_{min}Z_i\alpha + 4R_iT_lZ_k\alpha + 2R_kT_jZ_k\alpha + \\ + R_kT_lZ_i\alpha + R_kT_kZ_k\alpha - 18R_iT_{min}Z_k\alpha - \\ - R_kT_lZ_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - (E\nu(6R_k^2\gamma_{cr,\,RZ} - \\ - 12R_i^2\gamma_{cr,\,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,\,RZ} + 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,Z} - 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,r} + 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,\theta} - \\ - 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,Z} + 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,r} - 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,\theta} + 8R_iT_iZ_i\alpha + 4R_iT_jZ_i\alpha - \\ - 8R_iT_iZ_k\alpha + 2R_iT_kZ_i\alpha - 2R_kT_iZ_i\alpha - 4R_iT_jZ_k\alpha + 4R_iT_lZ_i\alpha + \\ + 2R_kT_jZ_i\alpha - 2R_iT_kZ_k\alpha + 2R_kT_iZ_k\alpha + R_kT_kZ_i\alpha - 18R_iT_{min}Z_i\alpha - \\ - 4R_iT_lZ_k\alpha - 2R_kT_jZ_k\alpha - R_kT_lZ_i\alpha - R_kT_kZ_k\alpha + 18R_iT_{min}Z_k\alpha + \\ + R_kT_lZ_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2^{(e)} = (E(4R_k^2\varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,\,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,Z} - 3R_iZ_i\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_iZ_k\gamma_{cr,\,RZ} -\\
- 3R_kZ_i\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_kZ_k\gamma_{cr,\,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - R_i^2T_k\alpha +\\
+ R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha +\\
+ R_k^2T_l\alpha - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha -\\
- 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) + (E\nu(8R_i^2\varepsilon_{cr,\,Z} -\\
- 8R_i^2\varepsilon_{cr,\,\vartheta} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,\,\vartheta} - 4R_k^2\varepsilon_{cr,\,Z} +\\
+ 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,\vartheta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,Z} + 6R_iZ_i\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_iZ_k\gamma_{cr,\,RZ} +\\
+ 6R_kZ_i\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_kZ_k\gamma_{cr,\,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - R_i^2T_k\alpha +\\
+ R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha +\\
+ R_k^2T_l\alpha - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3^{(e)} = (E\nu(6R_i^2\gamma_{cr,\,RZ} - 12R_k^2\gamma_{cr,\,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,\,RZ} - 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,r} + 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,\vartheta} +\\
+ 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,r} - 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,\vartheta} + 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,Z} - 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,Z} + 2R_iT_iZ_i\alpha -\\
- 2R_iT_jZ_i\alpha - 2R_iT_iZ_k\alpha - R_iT_kZ_i\alpha + 4R_kT_iZ_i\alpha + 2R_iT_jZ_k\alpha + R_iT_lZ_i\alpha +\\
+ 8R_kT_jZ_i\alpha + R_iT_kZ_k\alpha - 4R_kT_iZ_k\alpha + 4R_kT_kZ_i\alpha - R_iT_lZ_k\alpha - 8R_kT_jZ_k\alpha +\\
+ 2R_kT_lZ_i\alpha - 4R_kT_kZ_k\alpha - 18R_kT_{min}Z_i\alpha - 2R_kT_lZ_k\alpha +\\
+ 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - (E(3R_i^2\gamma_{cr,\,RZ} -\\
- 6R_k^2\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,\,RZ} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,r} + 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,\vartheta} + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,r} -\\
- 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,r} - 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,\vartheta} - 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,\vartheta} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,r} + 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,\vartheta} -\\
- 2R_iT_iZ_i\alpha + 2R_iT_jZ_i\alpha + 2R_iT_iZ_k\alpha + R_iT_kZ_i\alpha - 4R_kT_iZ_i\alpha - 2R_iT_jZ_k\alpha -\\
- R_iT_lZ_i\alpha - 8R_kT_jZ_i\alpha - R_iT_kZ_k\alpha + 4R_kT_iZ_k\alpha - 4R_kT_kZ_i\alpha + R_iT_lZ_k\alpha +\\
+ 8R_kT_jZ_k\alpha - 2R_kT_lZ_i\alpha + 4R_kT_kZ_k\alpha + 18R_kT_{min}Z_i\alpha +\\
+ 2R_kT_lZ_k\alpha - 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_4^{(e)} = &-(E(4R_i^2\varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,\,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,Z} - 3R_iZ_i\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_iZ_k\gamma_{cr,\,RZ} - \\
&- 3R_kZ_i\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_kZ_k\gamma_{cr,\,RZ} + R_i^2T_i\alpha + R_i^2T_j\alpha + R_i^2T_k\alpha - R_k^2T_i\alpha + \\
&+ R_i^2T_l\alpha - 3R_k^2T_j\alpha - 3R_k^2T_k\alpha - 4R_i^2T_{min}\alpha - R_k^2T_l\alpha + 8R_k^2T_{min}\alpha + \\
&+ 2R_iR_kT_j\alpha + 2R_iR_kT_k\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
&- (E\nu(4R_i^2\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_i^2\varepsilon_{cr,\,\theta} - 4R_i^2\varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,\,r} - 8R_k^2\varepsilon_{cr,\,\theta} + 8R_k^2\varepsilon_{cr,\,Z} + \\
&+ 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,\theta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,Z} + 6R_iZ_i\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_iZ_k\gamma_{cr,\,RZ} + \\
&+ 6R_kZ_i\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_kZ_k\gamma_{cr,\,RZ} + R_i^2T_i\alpha + R_i^2T_j\alpha + R_i^2T_k\alpha - R_k^2T_i\alpha + \\
&+ R_i^2T_l\alpha - 3R_k^2T_j\alpha - 3R_k^2T_k\alpha - 4R_i^2T_{min}\alpha - R_k^2T_l\alpha + 8R_k^2T_{min}\alpha + \\
&+ 2R_iR_kT_j\alpha + 2R_iR_kT_k\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5^{(e)} = &(E(3R_i^2\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_k^2\gamma_{cr,\,RZ} + 3R_iR_k\gamma_{cr,\,RZ} + 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,r} - 9R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,\theta} - \\
&- 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,r} + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,r} + 9R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,\theta} + 9R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,\theta} - 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,r} - \\
&- 9R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,\theta} + R_iT_iZ_i\alpha - R_iT_jZ_i\alpha - R_iT_iZ_k\alpha - 2R_iT_kZ_i\alpha + \\
&+ 2R_kT_iZ_i\alpha + R_iT_jZ_k\alpha + 2R_iT_lZ_i\alpha + 4R_kT_jZ_i\alpha + 2R_iT_kZ_k\alpha - 2R_kT_iZ_k\alpha + \\
&+ 8R_kT_kZ_i\alpha - 2R_iT_lZ_k\alpha - 4R_kT_jZ_k\alpha + 4R_kT_lZ_i\alpha - 8R_kT_kZ_k\alpha - 18R_kT_{min}Z_i\alpha - \\
&- 4R_kT_lZ_k\alpha + 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
&- (E\nu(6R_i^2\gamma_{cr,\,RZ} - 12R_k^2\gamma_{cr,\,RZ} + 6R_iR_k\gamma_{cr,\,RZ} + 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,r} - 18R_iZ_i\varepsilon_{cr,\,\theta} - \\
&- 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,r} + 18R_iZ_k\varepsilon_{cr,\,\theta} - 18R_kZ_i\varepsilon_{cr,\,Z} + 18R_kZ_k\varepsilon_{cr,\,Z} - R_iT_iZ_i\alpha + \\
&+ R_iT_jZ_i\alpha + R_iT_iZ_k\alpha + 2R_iT_kZ_i\alpha - 2R_kT_iZ_i\alpha - R_iT_jZ_k\alpha - 2R_iT_lZ_i\alpha - \\
&- 4R_kT_jZ_i\alpha - 2R_iT_kZ_k\alpha + 2R_kT_iZ_k\alpha - 8R_kT_kZ_i\alpha + 2R_iT_lZ_k\alpha + \\
&+ 4R_kT_jZ_k\alpha - 4R_kT_lZ_i\alpha + 8R_kT_kZ_k\alpha + 18R_kT_{min}Z_i\alpha + 4R_kT_lZ_k\alpha - \\
&- 18R_kT_{min}Z_k\alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
f_6^{(e)} = (E(4R_i^2 \varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_k^2 \varepsilon_{cr,\,Z} + 4R_i R_k \varepsilon_{cr,\,Z} + 3R_i Z_i \gamma_{cr,\,RZ} - 3R_i Z_k \gamma_{cr,\,RZ} + \\
+ 3R_k Z_i \gamma_{cr,\,RZ} - 3R_k Z_k \gamma_{cr,\,RZ} + R_i^2 T_i \alpha + R_i^2 T_j \alpha + R_i^2 T_k \alpha - R_k^2 T_i \alpha + \\
+ R_i^2 T_l \alpha - 3R_k^2 T_j \alpha - 3R_k^2 T_k \alpha - 4R_i^2 T_{min} \alpha - R_k^2 T_l \alpha + 8R_k^2 T_{min} \alpha + \\
+ 2R_i R_k T_j \alpha + 2R_i R_k T_k \alpha - 4R_i R_k T_{min} \alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) + \\
+ (E\nu(4R_i^2 \varepsilon_{cr,\,r} + 4R_i^2 \varepsilon_{cr,\,\theta} - 4R_i^2 \varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_k^2 \varepsilon_{cr,\,r} - 8R_k^2 \varepsilon_{cr,\,\theta} + \\
+ 8R_k^2 \varepsilon_{cr,\,Z} + 4R_i R_k \varepsilon_{cr,\,r} + 4R_i R_k \varepsilon_{cr,\,\theta} - 4R_i R_k \varepsilon_{cr,\,Z} - \\
- 6R_i Z_i \gamma_{cr,\,RZ} + 6R_i Z_k \gamma_{cr,\,RZ} - 6R_k Z_i \gamma_{cr,\,RZ} + 6R_k Z_k \gamma_{cr,\,RZ} + R_i^2 T_i \alpha + \\
+ R_i^2 T_j \alpha + R_i^2 T_k \alpha - R_k^2 T_i \alpha + R_i^2 T_l \alpha - 3R_k^2 T_j \alpha - 3R_k^2 T_k \alpha - \\
- 4R_i^2 T_{min} \alpha - R_k^2 T_l \alpha + 8R_k^2 T_{min} \alpha + 2R_i R_k T_j \alpha + 2R_i R_k T_k \alpha - \\
- 4R_i R_k T_{min} \alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_7^{(e)} = (E\nu(6R_k^2 \gamma_{cr,\,RZ} - 12R_i^2 \gamma_{cr,\,RZ} + 6R_i R_k \gamma_{cr,\,RZ} - 18R_i Z_i \varepsilon_{cr,\,Z} + 18R_k Z_i \varepsilon_{cr,\,r} - \\
- 18R_k Z_i \varepsilon_{cr,\,\theta} + 18R_i Z_k \varepsilon_{cr,\,Z} - 18R_k Z_k \varepsilon_{cr,\,r} + 18R_k Z_k \varepsilon_{cr,\,\theta} - 4R_i T_i Z_i \alpha - \\
- 2R_i T_j Z_i \alpha + 4R_i T_i Z_k \alpha - 4R_i T_k Z_i \alpha + R_k T_i Z_i \alpha + 2R_i T_j Z_k \alpha - 8R_i T_l Z_i \alpha - \\
- R_k T_j Z_i \alpha + 4R_i T_k Z_k \alpha - R_k T_i Z_k \alpha - 2R_k T_k Z_i \alpha + 18R_i T_{min} Z_i \alpha + \\
+ 8R_i T_l Z_k \alpha + R_k T_j Z_k \alpha + 2R_k T_l Z_i \alpha + 2R_k T_k Z_k \alpha - 18R_i T_{min} Z_k \alpha - \\
- 2R_k T_l Z_k \alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1)) - (E(3R_k^2 \gamma_{cr,\,RZ} - \\
- 6R_i^2 \gamma_{cr,\,RZ} + 3R_i R_k \gamma_{cr,\,RZ} + 9R_i Z_i \varepsilon_{cr,\,r} + 9R_i Z_i \varepsilon_{cr,\,\theta} - 9R_i Z_k \varepsilon_{cr,\,r} + \\
+ 9R_k Z_i \varepsilon_{cr,\,r} - 9R_i Z_k \varepsilon_{cr,\,\theta} - 9R_k Z_i \varepsilon_{cr,\,\theta} - 9R_k Z_k \varepsilon_{cr,\,r} + 9R_k Z_k \varepsilon_{cr,\,\theta} + \\
+ 4R_i T_i Z_i \alpha + 2R_i T_j Z_i \alpha - 4R_i T_i Z_k \alpha + 4R_i T_k Z_i \alpha - R_k T_i Z_i \alpha - 2R_i T_j Z_k \alpha + \\
+ 8R_i T_l Z_i \alpha + R_k T_j Z_i \alpha - 4R_i T_k Z_k \alpha + R_k T_i Z_k \alpha + 2R_k T_k Z_i \alpha - 18R_i T_{min} Z_i \alpha - \\
- 8R_i T_l Z_k \alpha - R_k T_j Z_k \alpha - 2R_k T_l Z_i \alpha - 2R_k T_k Z_k \alpha + 18R_i T_{min} Z_k \alpha + \\
+ 2R_k T_l Z_k \alpha))/(36(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
f_8^{(e)} = -(E(&4R_k^2\varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,\,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,Z} + 3R_iZ_i\gamma_{cr,\,RZ} - 3R_iZ_k\gamma_{cr,\,RZ} + \\
&+ 3R_kZ_i\gamma_{cr,\,RZ} - 3R_kZ_k\gamma_{cr,\,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - R_i^2T_k\alpha + \\
&+ R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha + R_k^2T_l\alpha - \\
&- 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1)) - \\
&- (E\nu(8R_i^2\varepsilon_{cr,\,Z} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,\,\theta} - 8R_i^2\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_k^2\varepsilon_{cr,\,\theta} - \\
&- 4R_k^2\varepsilon_{cr,\,Z} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,r} + 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,\theta} - 4R_iR_k\varepsilon_{cr,\,Z} - 6R_iZ_i\gamma_{cr,\,RZ} + \\
&+ 6R_iZ_k\gamma_{cr,\,RZ} - 6R_kZ_i\gamma_{cr,\,RZ} + 6R_kZ_k\gamma_{cr,\,RZ} - 3R_i^2T_i\alpha - R_i^2T_j\alpha - \\
&- R_i^2T_k\alpha + R_k^2T_i\alpha - 3R_i^2T_l\alpha + R_k^2T_j\alpha + R_k^2T_k\alpha + 8R_i^2T_{min}\alpha + \\
&+ R_k^2T_l\alpha - 4R_k^2T_{min}\alpha + 2R_iR_kT_i\alpha + 2R_iR_kT_l\alpha - \\
&- 4R_iR_kT_{min}\alpha))/(24(2\nu^2 + \nu - 1));
\end{aligned}
$$

Глава В. Код модулей к программных комплексам MatLab и Octave

В.1 Код модуля аппроксимации первой производной по пяти точкам D1DET5.m

Листинг В.1 — Some Code

```
function dV = D1DET5(inV, sV)
%inputVector, snap
%Вычисляем производную вектора по пятиточечному шаблону
    dV=zeros(1,length(inV));
    dV(1)= (-25*inV(1) + 48*inV(2) - 36*inV(3) +  16*inV(4)  -...
        3*inV(5)) / (12*sV);
    dV(2)= (-3*inV(1) - 10*inV(2) + 18*inV(3) -  6*inV(4)  +...
        1*inV(5)) / (12*sV);
    l=length(inV);
    dV(l-1) = (3*inV(l) + 10*inV(l-1) - 18*inV(l-2) + 6*inV(l-3)  -...
        1*inV(l-4) ) / (12*sV);
    dV(l) = (25*inV(l) - 48*inV(l-1) + 36*inV(l-2) - 16*inV(l-3)  +...
        3*inV(l-4) ) / (12*sV);
    for i = 3:(length(inV)-2)
        dV(i) = (1*inV(i-2) - 8*inV(i-1) + 8*inV(i+1)  -...
            1*inV(i+2)) / (12*sV);
    end;
end
```

В.2 Код модуля аппроксимации второй производной по пяти точкам D2DET5.m

Листинг В.2 — Some Code

```
function dV = D2DET5(inV, sV)
%inputVector, snap
%Вычисляем производную вектора по пятиточечному шаблону
    dV=zeros(1,length(inV));
    dV(1)= (35*inV(1) - 104*inV(2) + 114*inV(3) -  56*inV(4)  +...
        11*inV(5)) / (12*sV*sV);
    dV(2)= (11*inV(1) - 20*inV(2) + 6*inV(3) +  4*inV(4)  -...
        1*inV(5)) / (12*sV*sV);
    l=length(inV);
```

```
    dV(l-1) = (11*inV(l) - 20*inV(l-1) + 6*inV(l-2) + 4*inV(l-3) -...
        1*inV(l-4) ) / (12*sV*sV);
    dV(l) = (35*inV(l) - 104*inV(l-1) + 114*inV(l-2) - 56*inV(l-3) +...
        11*inV(l-4) ) / (12*sV*sV);
    for i = 3:(length(inV)-2)
        dV(i) = (-1*inV(i-2) + 16*inV(i-1) - 30*inV(i) + 16*inV(i+1) -...
            1*inV(i+2)) / (12*sV*sV);
    end;
end
```

В.3 Код модуля определения постоянного температурного поля при плоской осесимметричной задаче

Листинг В.3 — Some Code

```
%Задача определения постоянного во времени температурного поля в толще
%цилиндре
clc;
clear all;

radIn       = 0.008; %м. Внутренний радиус цилиндра
radOut      = 0.028; %м. Внешний радиус цилиндра
qnIntRad    = 2; %число интервалов разбиения по радиусу
qnPtsRad    = qnIntRad + 1; %число расчётных точек по радиусу
stRad       = (radOut - radIn) / qnIntRad; %Шаг разбиения по радиусу
vRad        = zeros(qnPtsRad, 1); %Вектор текущего радиуса
minTemp     = 28; %Гр.Ц. - температура на внешней поверхности цилиндра
maxTemp     = 100;%Гр.Ц. - температура на внутренней поверхности цилиндра

%Формируем вектор о текущем радиусе
for i = 1:qnPtsRad
    vRad(i) = radIn + (radOut - radIn) / qnIntRad * (i-1);
end;

%Аналитическое решение
TEMP1 = zeros(qnPtsRad, 1);
for i=1:qnPtsRad
    TEMP1(i) = (maxTemp*log(radOut/vRad(i)) + ...
        minTemp*log(vRad(i)/radIn)) / log(radOut/radIn);
end;

%Решение методом конечных разностей
TEMP2 = zeros(qnPtsRad, 1);
```

```
for i=1:qnPtsRad
    A = zeros(qnPtsRad);
    F = zeros(qnPtsRad, 1);
    for i = 2:(qnPtsRad-1)
        A(1,1) = 1;
        A(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
        F(1) = maxTemp;
        F(qnPtsRad) = minTemp;
        A(i,i-1) = 1/(stRad*stRad) - 1/(2*stRad*vRad(i));
        A(i,i+1) = 1/(stRad*stRad) + 1/(2*stRad*vRad(i));
        A(i,i) = - 2/(stRad*stRad);
    end;
    TEMP2  = A\F;
end;

%Решение методом конечных элементов
TEMP3 = zeros(qnPtsRad, 1);
FEMA = zeros(qnPtsRad);
FEMF = zeros(qnPtsRad, 1);
for i = 1:(qnPtsRad-1)  %перебираем конечные элементы
    FEMA(i,i) = FEMA(i,i) + 2*(vRad(i+1)+vRad(i))/(vRad(i+1)-vRad(i));
    FEMA(i+1,i) = FEMA(i+1,i) - 2*(vRad(i+1)+vRad(i))/(vRad(i+1)-vRad(i));
    FEMA(i,i+1) = FEMA(i,i+1) - 2*(vRad(i+1)+vRad(i))/(vRad(i+1)-vRad(i));
    FEMA(i+1,i+1) = FEMA(i+1,i+1) + 2*(vRad(i+1)+vRad(i))/(vRad(i+1)-vRad(i));
end;
%Задаем граничные условия
for i=1:(qnPtsRad)
    FEMA(1,i) = 0;
    FEMA(qnPtsRad,i) = 0;
end;
FEMA(1,1) = 1;
FEMA(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
FEMF(1) = maxTemp;
FEMF(qnPtsRad) = minTemp;
TEMP3  = FEMA\FEMF;

%Построение графика
%figure;
plot(vRad, TEMP1, '-ro');
hold on;
plot(vRad, TEMP2, '-g');
plot(vRad, TEMP3, '-k>');
hold off;
%set(gca,'YMinorGrid','on');
%set(gca,'XMinorGrid','on');
grid on;
```

```
xlabel('r, м')
ylabel('T, ^0C')
disp(TEMP1(qnIntRad/2+1))
disp(TEMP2(qnIntRad/2+1))
disp(TEMP3(qnIntRad/2+1))
```

B.4 Код модуля определения постоянного температурного поля при плоской осесимметричной задаче

Листинг B.4 — Some Code

```
clc;
clear all;

%МКР, ПДС, Температурная задача + ползучесть,
%Шаг разбиения по времени - линейный
radIn       = 0.008; %м. Внутренний радиус цилиндра
radOut      = 0.028; %м. Внешний радиус цилиндра
PrA         = 0; %давление на внетренний торец цилиндра
PrB         = 0; %давление на внешний торец цилиндра
qnIntRad    = 100; %число интервалов разбиения по радиусу
qnIntTime   = 100; %число интервалов разбиения по времени
qnPtsRad    = qnIntRad + 1; %число расчётных точек по радиусу
qnPtsTime   = qnIntTime + 1; %число расчётных точек по времени
stRad       = (radOut - radIn) / qnIntRad; %Шаг разбиения по радиусу
vTime       = zeros(qnPtsTime, 1); %Вектор текущего времени
vRad        = zeros(qnPtsRad, 1); %Вектор текущего радиуса
limTime     = 3.6; %ч. Максимальное время, до которого происходит расчёт
minTemp     = 28; %Гр.Ц. - начальная температура
maxTemp     = 100;%Гр.Ц. - предельная темп-ра, до которой происходит рост
timeTempInc = 1.2; %ч.Время, в течение которого происходит рост температуры
alfa        = 8e-5; %коэффициент линейного температурного расширения
mTemp       = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %матрица распределения...
%температуры по времени и радиусу
mFEMTemp        = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %матрица распределения...
%температуры по времени и радиусу
mFEMTemp2       = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

%Перемещения по радиусу
mU          = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

%Формируем вектор о текущем времени
for i = 1:qnPtsTime
```

```
    vTime(i) = (i-1) * (limTime / qnIntTime);
end;
%Формируем вектор о текущем радиусе
for i = 1:qnPtsRad
    vRad(i) = radIn + (radOut - radIn) / qnIntRad * (i-1);
end;

%Задаём свойства материала
%Если материал ЭДТ-10
lambda = 0.17; %к-т теплопроводности
ro = 0.125e-2; %плотность материала
c = 0.35; %удельная теплоёмкость материала
kappa = lambda / (ro*c); %к-т температуропроводности
%По справочнику Новиченок Л.Н. Теплофиз. св-ва полимеров. 1971
%температуропроводность для ЭДТ-10: 1.05-1.5e-7 мм^2/с
%%%%%%%%%kappa = 3600*1.05e-7; %м^2/час - нижний предел
%kappa = 3600*1.5e-7; %м^2/час - верхний предел
%kappa = 378; %мм^2/час - нижний предел
%kappa = 540; %мм^2/час - верхний предел

%Решаем распределение температуры по времени
%задаём начальные условия (температуры на торцах по 28 Гр.Ц.)
mTemp(1,1) = minTemp;
mTemp(1,qnPtsRad) = minTemp;
mFEMTemp(1,1) = minTemp;
mFEMTemp(1,qnPtsRad) = minTemp;
%Определяем температуру на внутреннем торце цилиндра
%1. Если предельное время расчёта больше времени роста температуры
if (timeTempInc < limTime)
    for i = 1:qnPtsTime
        temp = (timeTempInc-vTime(i))/(timeTempInc)*minTemp +...
            (vTime(i))/(timeTempInc)*maxTemp;
        if temp>maxTemp
            mTemp(i,1) = maxTemp;
            mFEMTemp(i,1) = maxTemp;
        else
            mTemp(i,1) = temp;
            mFEMTemp(i,1) = temp;
        end;
        mTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
        mFEMTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
    end;
%2. Если предельное время расчёта меньше времени роста температуры
else
    for i = 1:qnPtsTime
        mTemp(i,1) = (timeTempInc-vTime(i))/(timeTempInc)*minTemp +...
```

```
            (vTime(i))/(timeTempInc)*maxTemp;
        mTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
        mFEMTemp(i,1) = (timeTempInc-vTime(i))/(timeTempInc)*minTemp +...
            (vTime(i))/(timeTempInc)*maxTemp;
        mFEMTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
    end;
end;

%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
%Методом конечных РАЗНОСТЕЙ
for t = 1:qnPtsTime
    A = zeros(qnPtsRad);
    F = zeros(qnPtsRad, 1);
    for i = 2:(qnPtsRad-1)
        A(1,1) = 1;
        A(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
        F(1) = mTemp(t,1);
        F(qnPtsRad) = mTemp(t,qnPtsRad);
        A(i,i-1) = 1/(stRad*stRad) - 1/(2*stRad*vRad(i));
        A(i,i+1) = 1/(stRad*stRad) + 1/(2*stRad*vRad(i));
        if t > 1
            stTime = vTime(t) - vTime(t-1);
            A(i,i) =- 2/(stRad*stRad) - 1/(kappa*stTime);
            F(i) =- 1/(kappa*stTime)*mTemp(t-1,i);
        else
            A(i,i) =- 2/(stRad*stRad);
            F(i) = 0;
        end;
    end;
    X  = A\F;
    for i = 1:(qnPtsRad)
        mTemp(t,i) = X(i);
    end;
end;

%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
%Методом конечных ЭЛЕМЕНТОВ
for t = 1:qnPtsTime
    FEMA = zeros(qnPtsRad,qnPtsRad);
    FEMF = zeros(qnPtsRad, 1);
    if t > 1
        stTime = vTime(t) - vTime(t-1);
        bb = 1/(kappa*stTime);
    else
        bb = 0;
    end;
```

```
    for i = 1:(qnPtsRad-1)  %перебираем конечные элементы
        Ri = vRad(i);
        Rj = vRad(i+1);
        FEMA(i,i) = FEMA(i,i) +...
            (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(6*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i) = FEMA(i+1,i) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i,i+1) = FEMA(i,i+1) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i+1) = FEMA(i+1,i+1) + ...
            (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(6*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        if t > 1
            FEMF(i) = FEMF(i)+...
                (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
            FEMF(i+1) = FEMF(i+1)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
        else
            FEMF(i) = 0;
            FEMF(i+1) = 0;
        end;
    end;
    %Задаем граничные условия
    for i=1:(qnPtsRad)
        FEMA(1,i) = 0;
        FEMA(qnPtsRad,i) = 0;
    end;
    FEMA(1,1) = 1;
    FEMA(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
    FEMF(1) = mFEMTemp(t,1);
    FEMF(qnPtsRad) = mFEMTemp(t,qnPtsRad);
    FEMX  = FEMA\FEMF;
    for i = 1:(qnPtsRad)
        mFEMTemp(t,i) = FEMX(i);
    end;
end;


%-----------------------------------------------------------------------
%Методом конечных ЭЛЕМЕНТОВ ВАРИАНТ 2
for t = 1:qnPtsTime
    FEMA = zeros(qnPtsRad,qnPtsRad);
    FEMF = zeros(qnPtsRad, 1);
    if t > 1
        stTime = vTime(t) - vTime(t-1);
```

```
        bb = 1/(kappa*stTime);
    else
        bb = 0;
    end;
    for i = 1:(qnPtsRad-1)  %перебираем конечные элементы
        Ri = vRad(i);
        Rj = vRad(i+1);
        FEMA(i,i) = FEMA(i,i) +...
            (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(3*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i) = FEMA(i+1,i) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(3*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i,i+1) = FEMA(i,i+1) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(3*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i+1) = FEMA(i+1,i+1) + ...
            (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(3*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        if t > 1
            FEMF(i) = FEMF(i)+...
                (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
            FEMF(i+1) = FEMF(i+1)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
        else
            FEMF(i) = 0;
            FEMF(i+1) = 0;
        end;
    end;
    %Задаем граничные условия
    for i=1:(qnPtsRad)
        FEMA(1,i) = 0;
        FEMA(qnPtsRad,i) = 0;
    end;
    FEMA(1,1) = 1;
    FEMA(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
    FEMF(1) = mFEMTemp(t,1);
    FEMF(qnPtsRad) = mFEMTemp(t,qnPtsRad);
    FEMX  = FEMA\FEMF;
    for i = 1:(qnPtsRad)
        mFEMTemp2(t,i) = FEMX(i);
    end;
end;


%figure;

%hold on;
```

```
%mesh(vTime,vRad,mFEMTemp');
%surf(vTime,vRad,mTemp');
%hold off;
%xlabel('t, ч')
%ylabel('r, м')
%zlabel('T, ^0C')
disp(mTemp((qnPtsTime+1)/2,(qnPtsRad+1)/2));
disp(mFEMTemp((qnPtsTime+1)/2,(qnPtsRad+1)/2));
disp(mFEMTemp2((qnPtsTime+1)/2,(qnPtsRad+1)/2));
```

В.5 Код модуля определения НДС цилиндра (ПДС) методом конечных разностей и методом конечных элементов

Листинг В.5 — Some Code

```
clc;
clear all;

%Линейная неоднородная задача распределения температурного поля,
%Шаг разбиения по времени - линейный
radIn       = 0.008; %м. Внутренний радиус цилиндра
radOut      = 0.028; %м. Внешний радиус цилиндра
PrA         = 0; %давление на внетренний торец цилиндра
PrB         = 0; %давление на внешний торец цилиндра
qnIntRad    = 100; %число интервалов разбиения по радиусу
qnIntTime   = 100; %число интервалов разбиения по времени
qnPtsRad    = qnIntRad + 1; %число расчётных точек по радиусу
qnPtsTime   = qnIntTime + 1; %число расчётных точек по времени
stRad       = (radOut - radIn) / qnIntRad; %Шаг разбиения по радиусу
vTime       = zeros(qnPtsTime, 1); %Вектор текущего времени
vRad        = zeros(qnPtsRad, 1); %Вектор текущего радиуса
limTime     = 3.6; %ч. Максимальное время, до которого происходит расчёт
minTemp     = 28; %Гр.Ц. - начальная температура
maxTemp     = 100;%Гр.Ц. - предельная темп-ра, до которой происходит рост
timeTempInc = 1.2; %ч.Время, в течение которого происходит рост температуры
alfa        = 8e-5; %коэффициент линейного температурного расширения
mTemp       = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %матрица распределения...
%температуры по времени и радиусу
mFEMTemp         = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %матрица распределения...
%температуры по времени и радиусу
mFEMTemp2        = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

%Формируем вектор о текущем времени
```

```
for i = 1:qnPtsTime
    vTime(i) = (i-1) * (limTime / qnIntTime);
end;
%Формируем вектор о текущем радиусе
for i = 1:qnPtsRad
    vRad(i) = radIn + (radOut - radIn) / qnIntRad * (i-1);
end;

%Задаём свойства материала
%Если материал ЭДТ-10
lambda = 0.17; %к-т теплопроводности
ro = 0.125e-2; %плотность материала
c = 0.35; %удельная теплоёмкость материала
kappa = lambda / (ro*c); %к-т температуропроводности
%По справочнику Новиченок Л.Н. Теплофиз. св-ва полимеров. 1971
%температуропроводность для ЭДТ-10: 1.05-1.5e-7 мм^2/с
%%%%%%%%%kappa = 3600*1.05e-7; %м^2/час - нижний предел
%kappa = 3600*1.5e-7; %м^2/час - верхний предел
%kappa = 378; %мм^2/час - нижний предел
%kappa = 540; %мм^2/час - верхний предел

%Решаем распределение температуры по времени
%задаём начальные условия (температуры на торцах по 28 Гр.Ц.)
mTemp(1,1) = minTemp;
mTemp(1,qnPtsRad) = minTemp;
mFEMTemp(1,1) = minTemp;
mFEMTemp(1,qnPtsRad) = minTemp;
%Определяем температуру на внутреннем торце цилиндра
%1. Если предельное время расчёта больше времени роста температуры
if (timeTempInc < limTime)
    for i = 1:qnPtsTime
        temp = (timeTempInc-vTime(i))/(timeTempInc)*minTemp +...
            (vTime(i))/(timeTempInc)*maxTemp;
        if temp>maxTemp
            mTemp(i,1) = maxTemp;
            mFEMTemp(i,1) = maxTemp;
        else
            mTemp(i,1) = temp;
            mFEMTemp(i,1) = temp;
        end;
        mTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
        mFEMTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
    end;
%2. Если предельное время расчёта меньше времени роста температуры
else
    for i = 1:qnPtsTime
```

```
        mTemp(i,1) = (timeTempInc-vTime(i))/(timeTempInc)*minTemp +...
            (vTime(i))/(timeTempInc)*maxTemp;
        mTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
        mFEMTemp(i,1) = (timeTempInc-vTime(i))/(timeTempInc)*minTemp +...
            (vTime(i))/(timeTempInc)*maxTemp;
        mFEMTemp(i,qnPtsRad) = minTemp;
    end;
end;

%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
%--------------------------------------------------------------------------
%Методом конечных РАЗНОСТЕЙ
%--------------------------------------------------------------------------
for t = 1:qnPtsTime
    A = zeros(qnPtsRad);
    F = zeros(qnPtsRad, 1);
    for i = 2:(qnPtsRad-1)
        A(1,1) = 1;
        A(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
        F(1) = mTemp(t,1);
        F(qnPtsRad) = mTemp(t,qnPtsRad);
        A(i,i-1) = 1/(stRad*stRad) - 1/(2*stRad*vRad(i));
        A(i,i+1) = 1/(stRad*stRad) + 1/(2*stRad*vRad(i));
        if t > 1
            stTime = vTime(t) - vTime(t-1);
            A(i,i) =- 2/(stRad*stRad) - 1/(kappa*stTime);
            F(i) =- 1/(kappa*stTime)*mTemp(t-1,i);
        else
            A(i,i) =- 2/(stRad*stRad);
            F(i) = 0;
        end;
    end;
    X  = A\F;
    for i = 1:(qnPtsRad)
        mTemp(t,i) = X(i);
    end;
end;

%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
%--------------------------------------------------------------------------
%Методом конечных ЭЛЕМЕНТОВ (предварительная аппроксимация по времени)
%--------------------------------------------------------------------------
for t = 1:qnPtsTime
    FEMA = zeros(qnPtsRad,qnPtsRad);
    FEMF = zeros(qnPtsRad, 1);
    if t > 1
```

```
        stTime = vTime(t) - vTime(t-1);
        bb = 1/(kappa*stTime);
    else
        bb = 0;
    end;
    for i = 1:(qnPtsRad-1)  %перебираем конечные элементы
        Ri = vRad(i);
        Rj = vRad(i+1);
        FEMA(i,i) = FEMA(i,i) +...
            (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(6*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i) = FEMA(i+1,i) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i,i+1) = FEMA(i,i+1) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i+1) = FEMA(i+1,i+1) + ...
            (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(6*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        if t > 1
            FEMF(i) = FEMF(i)+...
                (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
            FEMF(i+1) = FEMF(i+1)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
        else
            FEMF(i) = 0;
            FEMF(i+1) = 0;
        end;
    end;
    %Задаем граничные условия
    for i=1:(qnPtsRad)
        FEMA(1,i) = 0;
        FEMA(qnPtsRad,i) = 0;
    end;
    FEMA(1,1) = 1;
    FEMA(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
    FEMF(1) = mFEMTemp(t,1);
    FEMF(qnPtsRad) = mFEMTemp(t,qnPtsRad);
    FEMX  = FEMA\FEMF;
    for i = 1:(qnPtsRad)
        mFEMTemp(t,i) = FEMX(i);
    end;
end;


%--------------------------------------------------------------------------
%Методом конечных ЭЛЕМЕНТОВ №2 (последующая аппроксимация по времени)
```

```
%--------------------------------------------------------------------------
for t = 1:qnPtsTime
    FEMA = zeros(qnPtsRad,qnPtsRad);
    FEMF = zeros(qnPtsRad, 1);
    if t > 1
        stTime = vTime(t) - vTime(t-1);
        bb = 1/(kappa*stTime);
    else
        bb = 0;
    end;
    for i = 1:(qnPtsRad-1)  %перебираем конечные элементы
        Ri = vRad(i);
        Rj = vRad(i+1);
        FEMA(i,i) = FEMA(i,i) +...
            (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(3*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i) = FEMA(i+1,i) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(3*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i,i+1) = FEMA(i,i+1) +...
            (Rj^2-Ri^2)/(3*stTime) - kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        FEMA(i+1,i+1) = FEMA(i+1,i+1) + ...
            (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(3*stTime) + kappa*(Rj+Ri)/(Rj-Ri);
        if t > 1
            FEMF(i) = FEMF(i)+...
                (Rj^2+2*Ri*Rj-3*Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
            FEMF(i+1) = FEMF(i+1)+...
                (Rj^2-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i)+...
                (3*Rj^2-2*Ri*Rj-Ri^2)/(6*stTime)*mFEMTemp(t-1,i+1);
        else
            FEMF(i) = 0;
            FEMF(i+1) = 0;
        end;
    end;
    %Задаем граничные условия
    for i=1:(qnPtsRad)
        FEMA(1,i) = 0;
        FEMA(qnPtsRad,i) = 0;
    end;
    FEMA(1,1) = 1;
    FEMA(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
    FEMF(1) = mFEMTemp(t,1);
    FEMF(qnPtsRad) = mFEMTemp(t,qnPtsRad);
    FEMX  = FEMA\FEMF;
    for i = 1:(qnPtsRad)
        mFEMTemp2(t,i) = FEMX(i);
    end;
```

```
end;


figure;

%hold on;
%mesh(vTime,vRad,mFEMTemp');
surf(vTime,vRad,mTemp');
hold off;
xlabel('t, ч')
ylabel('r, м')
zlabel('T, ^0C')

%-------------------------------------
disp(mTemp(qnIntTime,(qnPtsRad+1)/2));
disp(mFEMTemp(qnIntTime,(qnPtsRad+1)/2));
disp(mFEMTemp2(qnIntTime,(qnPtsRad+1)/2));
%-------------------------------------

%%%-------------------------------------------------------------------------------
%%%-------------------------------------------------------------------------------
%%%-----------Напряженное состояние метод конечных РАЗНОСТЕЙ-----------
%%%-------------------------------------------------------------------------------
%%%-------------------------------------------------------------------------------


%Матрицы напряжений и деформаций
MKRmSr          = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\sigma_r
MKRmSt          = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\sigma_\thete
MKRmSz          = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\sigma_z
%Упругие деформации
MKRmEpsRel      = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{elastic}
MKRmEpsTel      = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{elastic}
MKRmEpsZel      = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{elastic}
%Температурные деформации
MKRmEpsTemp    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{temp}
MKRmDifEpsTempR = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
%Деформации ползучести
MKRmEpsRvisc    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{viscoelasity}
MKRmEpsTvisc    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{viscoelasity}
MKRmEpsZvisc    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{viscoelasity}
MKRmDifEpsTviscR = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{viscoelasity}
MKRmDifEpsZviscR = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{viscoelasity}
%Полная деформация
MKRmEpsRfull    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{full}
MKRmEpsTfull    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{full}
```

```
MKRmEpsZfull     = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %\varepsilon_r^{full}
%Перемещения по радиусу
MKRmU            = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

%Формируем вектор о текущем времени
for i = 1:qnPtsTime
    vTime(i) = (i-1) * (limTime / qnIntTime);
end;
%Формируем вектор о текущем радиусе
for i = 1:qnPtsRad
    vRad(i) = radIn + (radOut - radIn) / qnIntRad * (i-1);
end;


%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
for t = 1:qnPtsTime
    MKRvETemp = zeros(qnPtsRad,1);
    MKRvDTr = zeros(qnPtsRad,1);
    for i = 1:(qnPtsRad)
        MKRmEpsTemp(t,i) = alfa*(mTemp(t,i)-mTemp(1,i));
        MKRvETemp(i) = MKRmEpsTemp(t,i);
    end;
    MKRvDTr = D1DET5(MKRvETemp, stRad);
    for i = 1:qnPtsRad
        %%% - УТОЧНИТЬ ЭТОТ МОМЕНТ
        %mDifEpsTempR(t,i) = vETemp(i);
        MKRmDifEpsTempR(t,i) = MKRvDTr(i);
    end;
end;

%заполняем массив распределения модуля упругости и других параметров
%по времени и радиусу
MKRmUng     = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %модуль упругости 1-го рода (Юнга)
nu          = 0.3; %коэффициент Пуассона
MKRmEunl    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %модуль высокоэластичности
MKRmMspeed = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %модуль скорости
MKRmNvisc   = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %к-т нач-ой релаксационной вязкости
MKRmDifUngDr    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %dE/dr массив распределения
MKRvEel1    = zeros(qnPtsRad, 1); %вспомогательный в-р для определения dE/dr
MKRvEel2    = zeros(qnPtsRad, 1); %вспомогательный в-р для определения dE/dr
for t = 1:qnPtsTime
    for i = 1:qnPtsRad
        %Если материал ЭДТ-10
        MKRmUng(t,i)          = - 17.5*mTemp(t,i) + 3525; %МПа
        MKRmEunl(t,i)         = - 30*mTemp(t,i) + 3150; %МПа
        MKRmMspeed(t,i)       = - 0.011*mTemp(t,i) + 4.75; %МПа
```

```
        MKRmNvisc(t,i)        = 104430*exp(-0.0275*mTemp(t,i)); %МПа*час
        MKRvEel1(i)           = MKRmUng(t,i);
    end;
    %дифференцируем E по r
    MKRvEel2 = D1DET5(MKRvEel1, stRad);
    %dE/dr результат записываем в матрицу
    for i = 1:qnPtsRad
        MKRmDifUngDr(t,i) = MKRvEel2(i);
    end;
end;

%Решаем задачу определения напряжённо-деформировнного состояния цилиндра
for t = 1:qnPtsTime
    A = zeros(qnPtsRad);
    F = zeros(qnPtsRad, 1);
    A(1,1) = 1;
    A(qnPtsRad,qnPtsRad) = 1;
    F(1) = PrA;
    F(qnPtsRad) = PrB;
    for i = 2:(qnPtsRad-1)
        A(i,i) = - 1/vRad(i)*(1-2*nu)/(1-nu)*MKRmDifUngDr(t,i)/MKRmUng(t,i)...
            - 2/(stRad^2);
        A(i,i-1) = 1/(stRad^2) -...
            1/(2*stRad)*(3/vRad(i)-MKRmDifUngDr(t,i)/MKRmUng(t,i));
        A(i,i+1) = 1/(stRad^2) +...
            1/(2*stRad)*(3/vRad(i)-MKRmDifUngDr(t,i)/MKRmUng(t,i));
        %F(i) = - mUng(t,i)*mDifEpsTempR(t,i)/(vRad(i)*(1-nu));
        F(i) = - MKRmUng(t,i)*MKRmDifEpsTempR(t,i)/(vRad(i)*(1-nu)) -...
            MKRmUng(t,i)/(vRad(i)*(1-nu^2))*(MKRmDifEpsTviscR(t,i) + ...
            nu*MKRmDifEpsZviscR(t,i)+(MKRmEpsTvisc(t,i)-MKRmEpsRvisc(t,i))/vRad(i));
    end;
    %Решаем матрицу, в результате определяем \sigma_r
    X  = A\F;
    vSr = zeros(qnPtsRad, 1);
    vdSdr = D1DET5(X, stRad);
    for i = 1:qnPtsRad
        MKRmSr(t,i) = X(i);
        MKRmSt(t,i) = MKRmSr(t,i) + vRad(i)*vdSdr(i);
        MKRmSz(t,i) = - MKRmUng(t,i)*(MKRmEpsTemp(t,i) + MKRmEpsZvisc(t,i)) +...
            nu*(MKRmSr(t,i)+MKRmSt(t,i));
    end;
    if t < qnPtsTime
        for i = 1:qnPtsRad
            frs = 3/2*(MKRmSr(t,i)-(MKRmSr(t,i)+MKRmSt(t,i)+MKRmSz(t,i))/3) -...
                MKRmEunl(t,i)*MKRmEpsRvisc(t,i);
```

```
            fts = 3/2*(MKRmSt(t,i)-(MKRmSr(t,i)+MKRmSt(t,i)+MKRmSz(t,i))/3)  -...
                MKRmEunl(t,i)*MKRmEpsTvisc(t,i);
            fzs = 3/2*(MKRmSz(t,i)-(MKRmSr(t,i)+MKRmSt(t,i)+MKRmSz(t,i))/3)  -...
                MKRmEunl(t,i)*MKRmEpsZvisc(t,i);
            fmax = abs(frs);
            if abs(fts) > fmax
                fmax = abs(fts);
            end;
            if abs(fzs) > fmax
                fmax = abs(fzs);
            end;
            MKRmEpsRvisc(t+1,i) = MKRmEpsRvisc(t,i) + frs / MKRmNvisc(t,i)*...
                exp(fmax/MKRmMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
            MKRmEpsTvisc(t+1,i) = MKRmEpsTvisc(t,i) + fts / MKRmNvisc(t,i)*...
                exp(fmax/MKRmMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
            MKRmEpsZvisc(t+1,i) = MKRmEpsZvisc(t,i) + fzs / MKRmNvisc(t,i)*...
                exp(fmax/MKRmMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
        end;

        %---------------
        for i = 1:(qnPtsRad)
            MKRvETemp(i) = MKRmEpsTvisc(t+1,i);
        end;
        MKRvDTr = D1DET5(MKRvETemp, stRad);
        for i = 1:qnPtsRad
            MKRmDifEpsTviscR(t+1,i) = MKRvDTr(i);
        end;
         for i = 1:(qnPtsRad)
            MKRvETemp(i) = MKRmEpsZvisc(t+1,i);
        end;
        MKRvDTr = D1DET5(MKRvETemp, stRad);
        for i = 1:qnPtsRad
            MKRmDifEpsZviscR(t+1,i) = MKRvDTr(i);
        end;
        %--------------
    end;
end;

%%%--------------------------------------------------------------------------------
%%%--------------------------------------------------------------------------------
%%%----------Напряженное состояние метод конечных ЭЛЕМЕНТОВ-----------
%%%--------------сумма деформаций ползучести равна нулю---------------
%%%--------------------------------------------------------------------------------

%Матрицы напряжений и деформаций
FEMmSr          = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\sigma_r
```

```
FEMmSt          = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\sigma_\thete
FEMmSz          = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\sigma_z
%Упругие деформации
FEMmEpsRel      = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{elastic}
FEMmEpsTel      = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{elastic}
FEMmEpsZel      = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{elastic}
%Температурные деформации
FEMmEpsTemp    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{temp}
FEMmDifEpsTempR = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
%Деформации ползучести
FEMmEpsRcr    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
FEMmEpsTcr    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
FEMmEpsZcr    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep
FEMmDifEpsTcrR = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
FEMmDifEpsZcrR = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
%Полная деформация
FEMmEpsRfull    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{full}
FEMmEpsTfull    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{full}
FEMmEpsZfull    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{full}
%Перемещения по радиусу
FEMmU           = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

%Формируем вектор о текущем радиусе
FEMvRad = zeros(qnIntRad, 1);
for i = 1:qnIntRad
    FEMvRad(i) = radIn + (radOut - radIn) / qnIntRad * (i-1) +...
        (radOut - radIn) / (2 * qnIntRad);
end;

%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
for t = 1:qnPtsTime
    for i = 1:(qnIntRad)
        Ri = vRad(i);
        Rj = vRad(i+1);
        r = FEMvRad(i);
        Fi = mFEMTemp(t,i);
        Fj = mFEMTemp(t,i+1);
        F1i = mFEMTemp(1,i);
        F1j = mFEMTemp(1,i+1);
        FEMmEpsTemp(t,i) = alfa*...
            (APPROX2PTS(Ri, Rj, r, Fi, Fj)-APPROX2PTS(Ri, Rj, r, F1i, F1j));
    end;
end;

%заполняем массив распределения модуля упругости и других параметров
%по времени и радиусу
```

```
FEMmUng     = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %модуль упругости 1-го рода (Юнга)
nu          = 0.3; %коэффициент Пуассона
FEMmEunl    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %модуль высокоэластичности
FEMmMspeed  = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %модуль скорости
FEMmNcr   = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %к-т нач-ой релаксационной вязкости
%FEMmDifUngDr    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %dE/dr массив распределения
%--- вероятно удалить
FEMvEel1    = zeros(qnPtsRad, 1); %вспомогательный в-р для определения dE/dr
FEMvEel2    = zeros(qnPtsRad, 1); %вспомогательный в-р для определения dE/dr
for t = 1:qnPtsTime
    for i = 1:qnIntRad
        %Если материал ЭДТ-10
        Ri   = vRad(i);
        Rj   = vRad(i+1);
        r    = FEMvRad(i);
        Fi   = mFEMTemp(t,i);
        Fj   = mFEMTemp(t,i+1);
        Temp = APPROX2PTS(Ri, Rj, r, Fi, Fj);
        FEMmUng(t,i)        = - 17.5*Temp + 3525; %МПа
        FEMmEunl(t,i)       = - 30*Temp + 3150; %МПа
        FEMmMspeed(t,i)     = - 0.011*Temp + 4.75; %МПа
        FEMmNcr(t,i)      = 104430*exp(-0.0275*Temp); %МПа*час
        %MKRvEel1(i)          = MKRmUng(t,i);
    end;
    %дифференцируем E по r
    %%MKRvEel2 = D1DET5(MKRvEel1, stRad);
    %dE/dr результат записываем в матрицу
    %%for i = 1:qnPtsRad
        %%MKRmDifUngDr(t,i) = MKRvEel2(i);
    %%end;
end;

%Решаем задачу определения напряжённо-деформировнного состояния цилиндра
for t = 1:qnPtsTime
    A = zeros(qnPtsRad);
    F = zeros(qnPtsRad, 1);
    for i = 1:(qnIntRad)
        Ri   = vRad(i);
        Rj   = vRad(i+1);
        r    = FEMvRad(i);
        Ni   = (Rj-r)/(Rj-Ri);
        Nj   = (r-Ri)/(Rj-Ri);
        B    = [-1/(Rj-Ri), 1/(Rj-Ri); Ni/r, Nj/r];
        D    = FEMmUng(t,i)/((1+nu)*(1-2*nu))*[1-nu, nu; nu, 1-nu];
        Kel  = B'*D*B*r*(Rj-Ri);

```

```
        %Fel = B'*D*(1+nu)*([1;1]*FEMmEpsTemp(t,i)) +...
        %      B'*D*[1-nu,-nu;-nu,1-nu]*...
        %      [FEMmEpsRcr(t,i);FEMmEpsTcr(t,i);FEMmEpsZcr(t,i)];
         Fel = B'*D*(1+nu)*([1;1]*FEMmEpsTemp(t,i));
         Fel = Fel + B'*D*[1-nu,-nu;-nu,1-nu]*[FEMmEpsRcr(t,i);FEMmEpsTcr(t,i)];
         Fel = Fel * r * (Rj-Ri);
        A(i,i)       = A(i,i)         + Kel(1,1);
        A(i+1,i)     = A(i+1,i)       + Kel(2,1);
        A(i,i+1)     = A(i,i+1)       + Kel(1,2);
        A(i+1,i+1)   = A(i+1,i+1)     + Kel(2,2);
        F(i)     = F(i) + Fel(1);
        F(i+1)   = F(i+1) + Fel(2);
    end;

    %Задаем граничные условия
    for i=1:(qnPtsRad)
        A(1,i)            = 0;
        A(qnPtsRad,i)     = 0;
    end;

    %Граничные условия в точке PtsRad = 1;
    i    = 1;
    j    = 2;
    Ri   = vRad(i);
    Rj   = vRad(j);
    r    = FEMvRad(i);
    A(1,1)                        = (-1+nu*Rj/r)/(Rj-Ri);
    A(1,2)                        = (1-nu*Ri/r)/(Rj-Ri);
    F(1)                          = -PrA/FEMmUng(t,i)*(1+nu)*(1-2*nu)+...
        +FEMmEpsTemp(t,i)*(1+nu)+FEMmEpsRcr(t,i)*(1-2*nu);
    %Граничные условия в точке PtsRad = qnPtsRad;
    i    = qnIntRad;
    j    = qnPtsRad;
    Ri   = vRad(i);
    Rj   = vRad(j);
    r    = FEMvRad(i);
    A(j,i)                        = (-1+nu*Rj/r)/(Rj-Ri);
    A(j,j)                        = (1-nu*Ri/r)/(Rj-Ri);
    F(j)                          = -PrB/FEMmUng(t,i)*(1+nu)*(1-2*nu)+...
        +FEMmEpsTemp(t,i)*(1+nu)+FEMmEpsRcr(t,i)*(1-2*nu);


    %Решаем матрицу, в результате определяем U
    X = A\F;
    for i = 1:qnPtsRad
        FEMmU(t,i) = X(i);
```

```
    end;
    for i = 1:qnIntRad
        Ri  = vRad(i);
        Rj  = vRad(i+1);
        r   = FEMvRad(i);
        Ni  = (Rj-r)/(Rj-Ri);
        Nj  = (r-Ri)/(Rj-Ri);
        B   = [-1/(Rj-Ri), 1/(Rj-Ri); Ni/r, Nj/r];
        D   = FEMmUng(t,i)/((1+nu)*(1-2*nu))*[1-nu, nu; nu, 1-nu];
        SS  = D*(B*[FEMmU(t,i);FEMmU(t,i+1)] -...
            (1+nu)*[1;1]*FEMmEpsTemp(t,i) -...
            [1-nu, -nu; -nu, 1-nu]*[FEMmEpsRcr(t,i);FEMmEpsTcr(t,i)]);
        Sr = SS(1);
        St = SS(2);
        Sz = -FEMmUng(t,i)*(FEMmEpsTemp(t,i)+FEMmEpsZcr(t,i))+nu*(Sr+St);
        FEMmSr(t,i) = Sr;
        FEMmSt(t,i) = St;
        FEMmSz(t,i) = Sz;
    end;

    if t < qnPtsTime
        for i = 1:qnIntRad
            frs = 3/2*(FEMmSr(t,i)-(FEMmSr(t,i)+FEMmSt(t,i)+FEMmSz(t,i))/3) -...
                FEMmEunl(t,i)*FEMmEpsRcr(t,i);
            fts = 3/2*(FEMmSt(t,i)-(FEMmSr(t,i)+FEMmSt(t,i)+FEMmSz(t,i))/3) -...
                FEMmEunl(t,i)*FEMmEpsTcr(t,i);
            fzs = 3/2*(FEMmSz(t,i)-(FEMmSr(t,i)+FEMmSt(t,i)+FEMmSz(t,i))/3) -...
                FEMmEunl(t,i)*FEMmEpsZcr(t,i);
            fmax = abs(frs);
            if abs(fts) > fmax
                fmax = abs(fts);
            end;
            if abs(fzs) > fmax
                fmax = abs(fzs);
            end;
            FEMmEpsRcr(t+1,i) = FEMmEpsRcr(t,i) + frs / FEMmNcr(t,i)*...
                exp(fmax/FEMmMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
            FEMmEpsTcr(t+1,i) = FEMmEpsTcr(t,i) + fts / FEMmNcr(t,i)*...
                exp(fmax/FEMmMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
            FEMmEpsZcr(t+1,i) = FEMmEpsZcr(t,i) + fzs / FEMmNcr(t,i)*...
                exp(fmax/FEMmMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
        end;
    end;
end;

%%%---------------------------------------------------------------------------
```

```
%%%-------------------------------------------------------------------------------
%%%------Напряженное состояние метод конечных ЭЛЕМЕНТОВ ---- ВАРИАНТ 2-----
%%%----------------сумма деформаций ползучести НЕ РАВНА нулю----------------
%%%-------------------------------------------------------------------------------

%Матрицы напряжений и деформаций
FEM2mSr          = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\sigma_r
FEM2mSt          = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\sigma_\thete
FEM2mSz          = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\sigma_z
%Упругие деформации
FEM2mEpsRel      = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{elastic}
FEM2mEpsTel      = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{elastic}
FEM2mEpsZel      = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{elastic}
%Температурные деформации
FEM2mEpsTemp    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{temp}
FEM2mDifEpsTempR = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
%Деформации ползучести
FEM2mEpsRcr    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
FEM2mEpsTcr    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
FEM2mEpsZcr    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep
FEM2mDifEpsTcrR = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
FEM2mDifEpsZcrR = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{creep}
%Полная деформация
FEM2mEpsRfull    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{full}
FEM2mEpsTfull    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{full}
FEM2mEpsZfull    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %\varepsilon_r^{full}
%Перемещения по радиусу
FEM2mU           = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

%Формируем вектор о текущем радиусе
FEM2vRad = zeros(qnIntRad, 1);
for i = 1:qnIntRad
    FEM2vRad(i) = radIn + (radOut - radIn) / qnIntRad * (i-1) +...
        (radOut - radIn) / (2 * qnIntRad);
end;

%Решаем уравнение теплопроводности на каждом временнОм интервале
for t = 1:qnPtsTime
    for i = 1:(qnIntRad)
        Ri = vRad(i);
        Rj = vRad(i+1);
        r = FEM2vRad(i);
        Fi = mFEMTemp(t,i);
        Fj = mFEMTemp(t,i+1);
        F1i = mFEMTemp(1,i);
        F1j = mFEMTemp(1,i+1);
```

```
        FEM2mEpsTemp(t,i) = alfa*...
            (APPROX2PTS(Ri, Rj, r, Fi, Fj)-APPROX2PTS(Ri, Rj, r, F1i, F1j));
    end;
end;

%заполняем массив распределения модуля упругости и других параметров
%по времени и радиусу
FEM2mUng     = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %модуль упругости 1-го рода (Юнга)
nu           = 0.3; %коэффициент Пуассона
FEM2mEunl    = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %модуль высокоэластичности
FEM2mMspeed  = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %модуль скорости
FEM2mNcr   = zeros(qnPtsTime, qnIntRad); %к-т нач-ой релаксационной вязкости
%FEMmDifUngDr    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad); %dE/dr массив распределения
%--- вероятно удалить
FEM2vEel1    = zeros(qnPtsRad, 1); %вспомогательный в-р для определения dE/dr
FEM2vEel2    = zeros(qnPtsRad, 1); %вспомогательный в-р для определения dE/dr
for t = 1:qnPtsTime
    for i = 1:qnIntRad
        %Если материал ЭДТ-10
        Ri   = vRad(i);
        Rj   = vRad(i+1);
        r    = FEM2vRad(i);
        Fi   = mFEMTemp(t,i);
        Fj   = mFEMTemp(t,i+1);
        Temp = APPROX2PTS(Ri, Rj, r, Fi, Fj);
        FEM2mUng(t,i)           = - 17.5*Temp + 3525; %МПа
        FEM2mEunl(t,i)          = - 30*Temp + 3150; %МПа
        FEM2mMspeed(t,i)        = - 0.011*Temp + 4.75; %МПа
        FEM2mNcr(t,i)         = 104430*exp(-0.0275*Temp); %МПа*час
        %MKRvEel1(i)            = MKRmUng(t,i);
    end;
    %дифференцируем E по r
    %%MKRvEel2 = D1DET5(MKRvEel1, stRad);
    %dE/dr результат записываем в матрицу
    %%for i = 1:qnPtsRad
        %%MKRmDifUngDr(t,i) = MKRvEel2(i);
    %%end;
end;

%Решаем задачу определения напряжённо-деформировнного состояния цилиндра
for t = 1:qnPtsTime
    A = zeros(qnPtsRad);
    F = zeros(qnPtsRad, 1);
    for i = 1:(qnIntRad)
        Ri   = vRad(i);
        Rj   = vRad(i+1);
```

```
        r    = FEM2vRad(i);
        Ni   = (Rj-r)/(Rj-Ri);
        Nj   = (r-Ri)/(Rj-Ri);
        B    = [-1/(Rj-Ri), 1/(Rj-Ri); Ni/r, Nj/r];
        D    = FEM2mUng(t,i)/((1+nu)*(1-2*nu))*[1-nu, nu; nu, 1-nu];
        Kel = B'*D*B*r*(Rj-Ri);

        %Fel = B'*D*(1+nu)*([1;1]*FEMmEpsTemp(t,i)) +...
        %     B'*D*[1-nu,-nu;-nu,1-nu]*...
        %     [FEMmEpsRcr(t,i);FEMmEpsTcr(t,i);FEMmEpsZcr(t,i)];
        Fel = B'*D*(1+nu)*([1;1]*FEM2mEpsTemp(t,i));
        Fel = Fel + B'*D*[1,0,nu;0,1,nu]*...
            [FEM2mEpsRcr(t,i);FEM2mEpsTcr(t,i);FEM2mEpsZcr(t,i)];
        Fel = Fel * r * (Rj-Ri);
        A(i,i)       = A(i,i)         + Kel(1,1);
        A(i+1,i)     = A(i+1,i)       + Kel(2,1);
        A(i,i+1)     = A(i,i+1)       + Kel(1,2);
        A(i+1,i+1)   = A(i+1,i+1)     + Kel(2,2);
        F(i)     = F(i) + Fel(1);
        F(i+1)   = F(i+1) + Fel(2);
    end;

    %Задаем граничные условия
    for i=1:(qnPtsRad)
        A(1,i)            = 0;
        A(qnPtsRad,i)     = 0;
    end;

    %Граничные условия в точке PtsRad = 1;
    i    = 1;
    j    = 2;
    Ri   = vRad(i);
    Rj   = vRad(j);
    r    = FEM2vRad(i);
    A(1,1)                       = (-1+nu*Rj/r)/(Rj-Ri);
    A(1,2)                       = (1-nu*Ri/r)/(Rj-Ri);
    F(1)                         = -PrA/FEM2mUng(t,i)*(1+nu)*(1-2*nu)+...
        +FEM2mEpsTemp(t,i)*(1+nu)+(1-2*nu)*FEM2mEpsRcr(t,i)+...
        nu*(FEM2mEpsRcr(t,i)+FEM2mEpsTcr(t,i)+FEM2mEpsZcr(t,i));
    %Граничные условия в точке PtsRad = qnPtsRad;
    i    = qnIntRad;
    j    = qnPtsRad;
    Ri   = vRad(i);
    Rj   = vRad(j);
    r    = FEM2vRad(i);
    A(j,i)                       = (-1+nu*Rj/r)/(Rj-Ri);
```

```
    A(j,j)                  = (1-nu*Ri/r)/(Rj-Ri);
    F(j)                    = -PrB/FEM2mUng(t,i)*(1+nu)*(1-2*nu)+...
        +FEM2mEpsTemp(t,i)*(1+nu)+(1-2*nu)*FEM2mEpsRcr(t,i)+...
        nu*(FEM2mEpsRcr(t,i)+FEM2mEpsTcr(t,i)+FEM2mEpsZcr(t,i));


    %Решаем матрицу, в результате определяем U
    X = A\F;
    for i = 1:qnPtsRad
        FEM2mU(t,i) = X(i);
    end;
    for i = 1:qnIntRad
        Ri  = vRad(i);
        Rj  = vRad(i+1);
        r   = FEM2vRad(i);
        Ni  = (Rj-r)/(Rj-Ri);
        Nj  = (r-Ri)/(Rj-Ri);
        B   = [-1/(Rj-Ri), 1/(Rj-Ri); Ni/r, Nj/r];
        D   = FEM2mUng(t,i)/((1+nu)*(1-2*nu))*[1-nu, nu; nu, 1-nu];
        SS  = D*(B*[FEM2mU(t,i);FEM2mU(t,i+1)]  -...
            (1+nu)*[1;1]*FEM2mEpsTemp(t,i) -...
            [1,0,nu;0,1,nu]*[FEM2mEpsRcr(t,i);FEM2mEpsTcr(t,i);FEM2mEpsZcr(t,i)]);
        Sr = SS(1);
        St = SS(2);
        Sz = -FEM2mUng(t,i)*(FEM2mEpsTemp(t,i)+FEM2mEpsZcr(t,i))+nu*(Sr+St);
        FEM2mSr(t,i) = Sr;
        FEM2mSt(t,i) = St;
        FEM2mSz(t,i) = Sz;
    end;

    if t < qnPtsTime
        for i = 1:qnIntRad
            frs = 3/2*(FEM2mSr(t,i)-(FEM2mSr(t,i)+FEM2mSt(t,i)+FEM2mSz(t,i))/3) -...
                FEM2mEunl(t,i)*FEM2mEpsRcr(t,i);
            fts = 3/2*(FEM2mSt(t,i)-(FEM2mSr(t,i)+FEM2mSt(t,i)+FEM2mSz(t,i))/3) -...
                FEM2mEunl(t,i)*FEM2mEpsTcr(t,i);
            fzs = 3/2*(FEM2mSz(t,i)-(FEM2mSr(t,i)+FEM2mSt(t,i)+FEM2mSz(t,i))/3) -...
                FEM2mEunl(t,i)*FEM2mEpsZcr(t,i);
            fmax = abs(frs);
            if abs(fts) > fmax
                fmax = abs(fts);
            end;
            if abs(fzs) > fmax
```

```
                fmax = abs(fzs);
            end;
            FEM2mEpsRcr(t+1,i) = FEM2mEpsRcr(t,i) + frs / FEM2mNcr(t,i)*...
                exp(fmax/FEM2mMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
            FEM2mEpsTcr(t+1,i) = FEM2mEpsTcr(t,i) + fts / FEM2mNcr(t,i)*...
                exp(fmax/FEM2mMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
            FEM2mEpsZcr(t+1,i) = FEM2mEpsZcr(t,i) + fzs / FEM2mNcr(t,i)*...
                exp(fmax/FEM2mMspeed(t,i))*(vTime(t+1)-vTime(t));
        end;
    end;
end;

%--------------------------------------------------------------------------
%--------------------------------------------------------------------------
%-----------------ОПРЕДЕЛИМ ПОЛНУЮ И УПРУГУЮ ДЕФОРМАЦИИ--------------------
%--------------------------------------------------------------------------
%--------------------------------------------------------------------------
MKRmEpsElR    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
MKRmEpsElT    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
MKRmEpsElZ    = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
MKRmFullR   = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
MKRmFullT   = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);
MKRmFullZ   = zeros(qnPtsTime, qnPtsRad);

for t = 1:qnPtsTime
    for i = 1:qnPtsRad
        MKRmEpsElR(t,i) = ...
            ((1-nu^2)*MKRmSr(t,i) + (-nu*(1+nu))*MKRmSt(t,i))/MKRmUng(t,i);
        MKRmEpsElT(t,i) = ...
            ((1-nu^2)*MKRmSt(t,i) + (-nu*(1+nu))*MKRmSr(t,i))/MKRmUng(t,i);
        MKRmEpsElZ(t,i) = ...
            (MKRmSz(t,i) - nu*(MKRmSr(t,i)+MKRmSt(t,i)))/MKRmUng(t,i);
        MKRmFullR(t,i)  = MKRmEpsElR(t,i) + (1+nu)*MKRmEpsTemp(t,i) +...
            MKRmEpsRvisc(t,i) + nu*MKRmEpsZvisc(t,i);
        MKRmFullT(t,i)  = MKRmEpsElT(t,i) + (1+nu)*MKRmEpsTemp(t,i) +...
            MKRmEpsTvisc(t,i) + nu*MKRmEpsZvisc(t,i);
        MKRmFullZ(t,i)  = MKRmEpsElZ(t,i) + MKRmEpsTemp(t,i) +...
            MKRmEpsZvisc(t,i);
    end;
end;
```

B.6 Код модуля расчёта адгезионного соединения из главы 6

Листинг В.6 — Some Code

```
%Моделирование адгезионного соединения как у Р.А.Турусова без наличия температурного поля
clc;
clear all;

tic

PrA     = 0; %Давление на внутренней грани цилиндра, МПа
PrB     = 0; %Давление на внешней грани цилиндра, МПа
PrD     = -70; %Давление на нижнем торце цилиндра, МПа
PrU     = 0; %Давление на верхнем торце цилиндра, МПа

Ra      = 0.0000001; %Внутренний радиус, м
Rb      = 0.012; %Внешний радиус, м
Zmin    = 0; %Координата нижней точки, м

minTemp = 30;

qnLayersZ = 2; %  Количество слоёв по Z
heightLayer = zeros(qnLayersZ,1); %Высота первого слоя, м
qnFeLayer   = zeros(qnLayersZ,1); %Количество элементов по Z слоя, шт.
heightLayer(1)  = 0.0012;  %Высота первого слоя, м
qnFeLayer(1)    = 10;      %Количество элементов по Z первого слоя, шт.
heightLayer(2)  = 0.09e-3;  %Высота второго слоя, м
qnFeLayer(2)    = 20;      %Количество элементов по Z второго слоя, шт.

ELayer    = zeros(qnLayersZ,1);
nuLayer   = zeros(qnLayersZ,1);
Eu1Layer  = zeros(qnLayersZ,1);
m1Layer   = zeros(qnLayersZ,1);
n1Layer   = zeros(qnLayersZ,1);
Eu2Layer  = zeros(qnLayersZ,1);
m2Layer   = zeros(qnLayersZ,1);
n2Layer   = zeros(qnLayersZ,1);

qnFeR   = 50; %Количество элементов по радиусу
qnFeZ   = 0; %Количество элементов по высоте
for i = 1:qnLayersZ
  qnFeZ = qnFeZ + qnFeLayer(i);
end;
qnNodeR = qnFeR + 1; %Количество узлов по радиусу
qnNodeZ = qnFeZ + 1; %Количество узлов по высоте
qnIntT  = 250;      %число интервалов разбиения по времени
qnPtsT  = qnIntT + 1;   %число расчётных точек по времени
vR      = zeros (qnNodeR, 1); %Вектор значения радиуса в узлах
```

```
vZ        = zeros (qnNodeZ, 1); %Вектор значения высоты в узлах
vFeR      = zeros (qnFeR, 1); %Вектор значения ц.т. элемента по радиусу
vFeZ      = zeros (qnFeZ, 1); %Вектор значения ц.т. элемента по высоте
mIndNodes = zeros(qnNodeZ, qnNodeR); %Глобальная матрица индексов узлов

glU       = zeros(qnPtsT, qnNodeZ, qnNodeR); %Матрица перемещений U
glW       = zeros(qnPtsT, qnNodeZ, qnNodeR); %Матрица перемещений W
Sr        = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %Матрица перемещений W
St        = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %Матрица перемещений W
Sz        = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %Матрица перемещений W
Trz       = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %Матрица перемещений W
S1        = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %Матрица перемещений W
S3        = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %Матрица перемещений W
limTime = 1111111/60; %ч. Максимальное время, до которого происходит расчёт
vTime     = zeros(qnPtsT, 1); %Вектор текущего времени

mEpsFullR    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsFullT    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsFullZ    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mGamFullRZ   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);

mEpsTemp     = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);

mEpsElR    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsElT    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsElZ    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mGamElRZ   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);


mEpsCrR    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsCrT    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsCrZ    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mGamCrRZ   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);

mEpsCrR1    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsCrT1    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsCrZ1    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mGamCrRZ1   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);

mEpsCrR2    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsCrT2    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mEpsCrZ2    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mGamCrRZ2   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);

mUng      = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mNu       = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
```

```
mEunlim = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mMcr    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mN0cr   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mE2unlim = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mM2cr    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
mN02cr   = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);


%Заполняем вектор координат узлов по радиусу
kg = 0.1; %во сколько раз последний элемент больше первого
q = kg^(1/(qnFeR-1));
b1 = (Rb-Ra)*(1-q)/(1-q^qnFeR);
vR(1) = Ra;
for i = 1:qnFeR
  %vR(i) = Ra + (i-1)*(Rb-Ra)/qnFeR;
  vR(i+1) = vR(i)+b1*q^(i-1);
end;

%disp(vR)

%Заполняем вектор координат узлов по высоте
startZ = Zmin;
ind = 1;
vZ(1) = Zmin;
for j = 1:qnLayersZ
  qn = qnFeLayer(j);
  for i = 1:qn
    ind = ind+1;
    vZ(ind) = startZ + (i)*heightLayer(j)/qn;
  end;
  startZ = vZ(ind);
end;
%disp(vZ)
%Заполняем вектор координат узлов по высоте
%for j = 1:qnNodeZ
%  vZ(j) = Zmin + (j-1)*(Zmax-Zmin)/qnFeZ;
%end;
%disp(vZ)

%Заполняем вектор координат центров элементов по радиусу
for i = 1:qnFeR
  vFeR(i) = sqrt((vR(i)^2 + vR(i+1)^2)/2); %Если ц. т. в истинном ц. т.
  %vFeR(i) = (vR(i) + vR(i+1))/2; %Если ц. т. посередине элемента
end;

%Заполняем вектор координат центров элементов по высоте
```

```
for j = 1:qnFeZ
  vFeZ(j) = (vZ(j) + vZ(j+1))/2;
end;

%Заполняем глобальную матрицу с индексами узлов
index = 0;
for j = 1:qnNodeZ
  for i = 1:qnNodeR
    index = index + 1;
    mIndNodes(j,i) = index;
  end;
end;

%Формируем вектор о текущем времени
%В случае равномерного шага по времени
%for i = 1:qnPtsT
%     vTime(i) = (i-1) * (limTime / qnIntT);
%end;

kg = 1000000; %во сколько раз последний элемент больше первого
q = kg^(1/(qnIntT-1));
b1 = (limTime)*(1-q)/(1-q^qnIntT);
vTime(1) = 0;
for i = 1:qnIntT
  %vR(i) = Ra + (i-1)*(Rb-Ra)/qnFeR;
  vTime(i+1) = vTime(i) + b1*q^(i-1);
end;


%----------------------------------------------------------------------------
%---------------------------------МЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ-------------------------
%----------------------------------------------------------------------------

mTemp    = zeros(qnPtsT, qnNodeZ, qnNodeR); %матрица распределения...
%температуры по узлам элемента
mFeTemp    = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR); %матрица распределения...
%температуры по времени, высоте и радиусу
mTemp(:,:,:) = minTemp;
mFeTemp(:,:,:) = minTemp;

%-------------ЗАДАЁМ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ МАТЕРИАЛА-------------
%E       = 2e5; %МПа;
nu      = 0.3; %Коэффициент Пуассона
alfaL1   = 0; %Коэффициент линейного температурного расширения материала
mEpsTemp = zeros(qnPtsT, qnNodeZ, qnNodeR);
mFeEpsTemp = zeros(qnPtsT, qnFeZ, qnFeR);
```

```

for t = 1:qnPtsT
  for j = 1:qnNodeZ
    for i = 1:qnNodeR
      mEpsTemp(t,j,i) = alfaL1*(mTemp(t,j,i)-minTemp);
    end;
  end;
end;

for t = 1:qnPtsT
  for j = 1:qnFeZ
    for i = 1:qnFeR
      Ri  = vR(i);
      Rk  = vR(i+1);
      Zi  = vZ(j);
      Zk  = vZ(j+1);
      r   = vFeR(i);
      z   = vFeZ(j);
      vN = [ ((Rk - r)*(Zk - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)),...
        -((Ri - r)*(Zk - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)),...
        ((Ri - r)*(Zi - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)),...
        -((Rk - r)*(Zi - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk))];
      mFeEpsTemp(t,j,i) = vN*[mEpsTemp(t,j,i); mEpsTemp(t,j,i+1); mEpsTemp(t,j+1,i
        +1); mEpsTemp(t,j+1,i)];
      mFeTemp(t,j,i) = vN*[mTemp(t,j,i); mTemp(t,j,i+1);mTemp(t,j+1,i+1);mTemp(t,j
        +1,i)];
    end;
  end;
end;

PLOTmEpsTemp = zeros(qnNodeZ,qnNodeR);
for j = 1:qnNodeZ
  for i = 1:qnNodeR
    PLOTmEpsTemp(j,i) = mEpsTemp(qnPtsT,j,i);
  end;
end;

PLOTmFeEpsTemp = zeros(qnFeZ,qnFeR);
for j = 1:qnFeZ
  for i = 1:qnFeR
    PLOTmFeEpsTemp(j,i) = mFeEpsTemp(qnPtsT,j,i);
  end;
end;


ELayer(1)   = 2e5;
```

```
nuLayer(1)   = 0.33;
Eu1Layer(1) = 0;
m1Layer(1)   = 1e100;
n1Layer(1)   = 1e100;

Eu2Layer(1) = 0;
m2Layer(1)   = 1e100;
n2Layer(1)   = 1e100;

nuLayer(2)   = 0.37;
ELayer(2)     = 4000*exp(-exp(((minTemp+273)-339)/36.7)); %МПа
Eu1Layer(2) = 2.4e6/(minTemp+273) - 6120;
m1Layer(2)   = (-0.0155*(minTemp+273) + 7.73); %МПа
n1Layer(2)      = 36000*exp(9500/(minTemp+273)-20)/3600; %МПа*час
Eu2Layer(2) = 0.1*Eu1Layer(2);
m2Layer(2)   = m1Layer(2); %МПа
n2Layer(2)      = 36000*exp(35400/(minTemp+273)-90)/3600; %МПа*час

%Заполняем матрицу с физико-механическими параметрами материала
ind = 0;
for l = 1:qnLayersZ
  qn = qnFeLayer(l);
  for i = 1:qn
    ind = ind+1;
    mUng(:,ind,:)       = ELayer(l);
    mNu(:,ind,:)        = nuLayer(l);
    mEunlim(:,ind,:)   = Eu1Layer(l);
    mMcr(:,ind,:)       = m1Layer(l);
    mN0cr(:,ind,:)      = n1Layer(l);

    mE2unlim(:,ind,:)   = Eu2Layer(l);
    mM2cr(:,ind,:)       = m2Layer(l);
    mN02cr(:,ind,:)      = n2Layer(l);
  end;
end;









%Формируем локальную матрицу жёсткости
for t = 1:qnPtsT
  disp(fprintf(1,'Провожу расчёт НДС, шаг времени %g из %g',t,qnPtsT));
```

```
  mK       = sparse(2*qnNodeZ*qnNodeR, 2*qnNodeZ*qnNodeR);
  vF       = zeros(2*qnNodeZ*qnNodeR, 1);
  for j = 1:qnFeZ
    for i = 1:qnFeR
      Ri  = vR(i);
      Rk  = vR(i+1);
      Zi  = vZ(j);
      Zk  = vZ(j+1);
      r   = vFeR(i);
      z   = vFeZ(j);
      B   = matB(r,Ri,Rk,z,Zi,Zk);


      A   = (Rk-Ri)*(Zk-Zi);

      E   = mUng(t,j,i);
      nu  = mNu(t,j,i);

      D   = matD(E, nu);

      Fel = zeros(8,1);

      %if t == 1
        Kel = zeros(8);
        Kel(1,1) = - (E*(3*Ri^4 - 8*Ri^3*Rk - Rk^4 + 6*Ri^2*Rk^2 + 8*Ri^2*Zi^2 + 8*
            Ri^2*Zk^2 + 8*Rk^2*Zi^2 + 8*Rk^2*Zk^2 + 8*Rk^2*Zi^2*log(Ri) - 8*Rk^2*Zi
            ^2*log(Rk) + 8*Rk^2*Zk^2*log(Ri) - 8*Rk^2*Zk^2*log(Rk) - 16*Ri*Rk*Zi^2
            - 16*Ri*Rk*Zk^2 - 16*Ri^2*Zi*Zk - 16*Rk^2*Zi*Zk - 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri)
             + 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk) + 32*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)
            *(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(16*Ri^3*Rk - 6*Ri^4 + 2*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk
            ^2 - 8*Rk^2*Zi^2*log(Ri) + 8*Rk^2*Zi^2*log(Rk) - 8*Rk^2*Zk^2*log(Ri) +
            8*Rk^2*Zk^2*log(Rk) + 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk)))
            /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(1,2) = - (E*(2*Ri - 5*Rk))/(72*(nu + 1)) - (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu -
            1));
        Kel(1,3) = (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*
            log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*
            log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri -
            Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 -
             Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(
            Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*
            log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(1,4) = -(E*(4*nu - 1)*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(1,5) = (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 - Rk^4 + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) -
             4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) -
            8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi -
```

```
      Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4
       + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) -
       4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))
      /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(1,6) = (E*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(1,7) = (E*nu*(16*Ri^3*Rk - 6*Ri^4 + 2*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk^2 + 4*Rk^2*Zi
      ^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zi^2*log(Rk) + 4*Rk^2*Zk^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zk^2*
      log(Rk) - 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)
      ^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*(8*Ri^3*Rk - 3*Ri^4 + Rk^4 - 6*Ri
      ^2*Rk^2 + 4*Ri^2*Zi^2 + 4*Ri^2*Zk^2 + 4*Rk^2*Zi^2 + 4*Rk^2*Zk^2 + 4*Rk
      ^2*Zi^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zi^2*log(Rk) + 4*Rk^2*Zk^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zk
      ^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi^2 - 8*Ri*Rk*Zk^2 - 8*Ri^2*Zi*Zk - 8*Rk^2*Zi*Zk
      - 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(
      Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(1,8) = (E*(14*Ri + Rk))/(72*(nu + 1)) + (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu - 1))
      ;

  Kel(2,1) = - (E*(2*Ri - 5*Rk))/(72*(nu + 1)) - (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu -
      1));
  Kel(2,2) = -((E*(3*Ri^3 - 5*Ri^2*Rk + Ri*Rk^2 + Ri*Zi^2 - 2*Ri*Zi*Zk + Ri*
      Zk^2 + Rk^3 + Rk*Zi^2 - 2*Rk*Zi*Zk + Rk*Zk^2))/12 - (E*nu*(3*Ri^3 - 5*
      Ri^2*Rk + Ri*Rk^2 + 2*Ri*Zi^2 - 4*Ri*Zi*Zk + 2*Ri*Zk^2 + Rk^3 + 2*Rk*Zi
      ^2 - 4*Rk*Zi*Zk + 2*Rk*Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu -
      1));
  Kel(2,3) = (E*(4*nu - 1)*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(2,4) = ((E*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk^2))
      /12 - (E*nu*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk + 2*
      Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(2,5) = (E*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(2,6) = ((E*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk
      ^2))/24 - (E*nu*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk
       + 2*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
  Kel(2,7) = - (E*(14*Ri + Rk))/(72*(nu + 1)) - (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu -
      1));
  Kel(2,8) = ((E*(6*Ri^3 - 10*Ri^2*Rk + 2*Ri*Rk^2 - Ri*Zi^2 + 2*Ri*Zi*Zk - Ri
      *Zk^2 + 2*Rk^3 - Rk*Zi^2 + 2*Rk*Zi*Zk - Rk*Zk^2))/24 - (E*nu*(6*Ri^3 -
      10*Ri^2*Rk + 2*Ri*Rk^2 - 2*Ri*Zi^2 + 4*Ri*Zi*Zk - 2*Ri*Zk^2 + 2*Rk^3 -
      2*Rk*Zi^2 + 4*Rk*Zi*Zk - 2*Rk*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 +
       nu - 1));

  Kel(3,1) = (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*
      log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*
      log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri -
      Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 -
       Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(
```

```
        Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*
        log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(3,2) = (E*(4*nu - 1)*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(3,3) = (E*(3*Rk^4 - Ri^4 - 8*Ri*Rk^3 + 6*Ri^2*Rk^2 + 8*Ri^2*Zi^2 + 8*Ri
        ^2*Zk^2 + 8*Rk^2*Zi^2 + 8*Rk^2*Zk^2 - 8*Ri^2*Zi^2*log(Ri) + 8*Ri^2*Zi
        ^2*log(Rk) - 8*Ri^2*Zk^2*log(Ri) + 8*Ri^2*Zk^2*log(Rk) - 16*Ri*Rk*Zi^2
        - 16*Ri*Rk*Zk^2 - 16*Ri^2*Zi*Zk - 16*Rk^2*Zi*Zk + 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri)
         - 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Rk) + 32*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)
        *(2*nu^2 + nu - 1)) + (E*nu*(16*Ri*Rk^3 + 2*Ri^4 - 6*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk
        ^2 + 8*Ri^2*Zi^2*log(Ri) - 8*Ri^2*Zi^2*log(Rk) + 8*Ri^2*Zk^2*log(Ri) -
        8*Ri^2*Zk^2*log(Rk) - 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri) + 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Rk)))
        /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(3,4) = - (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1)) - (E*(5*Ri - 2*Rk))/(72*(nu +
        1));
    Kel(3,5) = (E*(8*Ri*Rk^3 + Ri^4 - 3*Rk^4 - 6*Ri^2*Rk^2 + 4*Ri^2*Zi^2 + 4*Ri
        ^2*Zk^2 + 4*Rk^2*Zi^2 + 4*Rk^2*Zk^2 - 4*Ri^2*Zi^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zi
        ^2*log(Rk) - 4*Ri^2*Zk^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zk^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi^2 -
         8*Ri*Rk*Zk^2 - 8*Ri^2*Zi*Zk - 8*Rk^2*Zi*Zk + 8*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri) - 8*
        Ri^2*Zi*Zk*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2
         + nu - 1)) - (E*nu*(16*Ri*Rk^3 + 2*Ri^4 - 6*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk^2 - 4*Ri
        ^2*Zi^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zi^2*log(Rk) - 4*Ri^2*Zk^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zk
        ^2*log(Rk) + 8*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri) - 8*Ri^2*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk
        )^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(3,6) = (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1)) - (E*(Ri + 14*Rk))/(72*(nu + 1))
        ;
    Kel(3,7) = (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 - Rk^4 + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) -
         4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) -
        8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi -
        Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4
         + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) -
         4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))
        /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(3,8) = -(E*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));

    Kel(4,1) = -(E*(4*nu - 1)*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(4,2) = ((E*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk^2))
        /12 - (E*nu*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk + 2*
        Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(4,3) = - (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1)) - (E*(5*Ri - 2*Rk))/(72*(nu +
        1));
    Kel(4,4) = -((E*(Ri^3 + Ri^2*Rk - 5*Ri*Rk^2 + Ri*Zi^2 - 2*Ri*Zi*Zk + Ri*Zk
        ^2 + 3*Rk^3 + Rk*Zi^2 - 2*Rk*Zi*Zk + Rk*Zk^2))/12 - (E*nu*(Ri^3 + Ri^2*
        Rk - 5*Ri*Rk^2 + 2*Ri*Zi^2 - 4*Ri*Zi*Zk + 2*Ri*Zk^2 + 3*Rk^3 + 2*Rk*Zi
        ^2 - 4*Rk*Zi*Zk + 2*Rk*Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu -
        1));
```

```
    Kel(4,5) = (E*(Ri + 14*Rk))/(72*(nu + 1)) - (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1))
        ;
    Kel(4,6) = -((E*(- 2*Ri^3 - 2*Ri^2*Rk + 10*Ri*Rk^2 + Ri*Zi^2 - 2*Ri*Zi*Zk +
         Ri*Zk^2 - 6*Rk^3 + Rk*Zi^2 - 2*Rk*Zi*Zk + Rk*Zk^2))/24 - (E*nu*(- 2*Ri
        ^3 - 2*Ri^2*Rk + 10*Ri*Rk^2 + 2*Ri*Zi^2 - 4*Ri*Zi*Zk + 2*Ri*Zk^2 - 6*Rk
        ^3 + 2*Rk*Zi^2 - 4*Rk*Zi*Zk + 2*Rk*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*
        nu^2 + nu - 1));
    Kel(4,7) = -(E*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(4,8) = ((E*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk
        ^2))/24 - (E*nu*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk
         + 2*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));

    Kel(5,1) = (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 - Rk^4 + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) -
         4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) -
        8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi -
        Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4
         + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) -
         4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))
        /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(5,2) = (E*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(5,3) = (E*(8*Ri*Rk^3 + Ri^4 - 3*Rk^4 - 6*Ri^2*Rk^2 + 4*Ri^2*Zi^2 + 4*Ri
        ^2*Zk^2 + 4*Rk^2*Zi^2 + 4*Rk^2*Zk^2 - 4*Ri^2*Zi^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zi
        ^2*log(Rk) - 4*Ri^2*Zk^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zk^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi^2 -
         8*Ri*Rk*Zk^2 - 8*Ri^2*Zi*Zk - 8*Rk^2*Zi*Zk + 8*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri) - 8*
        Ri^2*Zi*Zk*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2
         + nu - 1)) - (E*nu*(16*Ri*Rk^3 + 2*Ri^4 - 6*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk^2 - 4*Ri
        ^2*Zi^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zi^2*log(Rk) - 4*Ri^2*Zk^2*log(Ri) + 4*Ri^2*Zk
        ^2*log(Rk) + 8*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri) - 8*Ri^2*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk
        )^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(5,4) = (E*(Ri + 14*Rk))/(72*(nu + 1)) - (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1))
        ;
    Kel(5,5) = (E*(3*Rk^4 - Ri^4 - 8*Ri*Rk^3 + 6*Ri^2*Rk^2 + 8*Ri^2*Zi^2 + 8*Ri
        ^2*Zk^2 + 8*Rk^2*Zi^2 + 8*Rk^2*Zk^2 - 8*Ri^2*Zi^2*log(Ri) + 8*Ri^2*Zi
        ^2*log(Rk) - 8*Ri^2*Zk^2*log(Ri) + 8*Ri^2*Zk^2*log(Rk) - 16*Ri*Rk*Zi^2
        - 16*Ri*Rk*Zk^2 - 16*Ri^2*Zi*Zk - 16*Rk^2*Zi*Zk + 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri)
         - 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Rk) + 32*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)
        *(2*nu^2 + nu - 1)) + (E*nu*(16*Ri*Rk^3 + 2*Ri^4 - 6*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk
        ^2 + 8*Ri^2*Zi^2*log(Ri) - 8*Ri^2*Zi^2*log(Rk) + 8*Ri^2*Zk^2*log(Ri) -
        8*Ri^2*Zk^2*log(Rk) - 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Ri) + 16*Ri^2*Zi*Zk*log(Rk)))
        /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(5,6) = (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1)) + (E*(5*Ri - 2*Rk))/(72*(nu + 1)
        );
    Kel(5,7) = (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*
        log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*
        log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri -
        Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 -
```

```
          Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(
         Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*
         log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(5,8) = -(E*(4*nu - 1)*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));

    Kel(6,1) = (E*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(6,2) = ((E*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk
         ^2))/24 - (E*nu*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk
          + 2*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(6,3) = (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1)) - (E*(Ri + 14*Rk))/(72*(nu + 1))
         ;
    Kel(6,4) = -((E*(- 2*Ri^3 - 2*Ri^2*Rk + 10*Ri*Rk^2 + Ri*Zi^2 - 2*Ri*Zi*Zk +
          Ri*Zk^2 - 6*Rk^3 + Rk*Zi^2 - 2*Rk*Zi*Zk + Rk*Zk^2))/24 - (E*nu*(- 2*Ri
         ^3 - 2*Ri^2*Rk + 10*Ri*Rk^2 + 2*Ri*Zi^2 - 4*Ri*Zi*Zk + 2*Ri*Zk^2 - 6*Rk
         ^3 + 2*Rk*Zi^2 - 4*Rk*Zi*Zk + 2*Rk*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*
         nu^2 + nu - 1));
    Kel(6,5) = (E*(Ri - 4*Rk))/(36*(2*nu - 1)) + (E*(5*Ri - 2*Rk))/(72*(nu + 1)
         );
    Kel(6,6) = -((E*(Ri^3 + Ri^2*Rk - 5*Ri*Rk^2 + Ri*Zi^2 - 2*Ri*Zi*Zk + Ri*Zk
         ^2 + 3*Rk^3 + Rk*Zi^2 - 2*Rk*Zi*Zk + Rk*Zk^2))/12 - (E*nu*(Ri^3 + Ri^2*
         Rk - 5*Ri*Rk^2 + 2*Ri*Zi^2 - 4*Ri*Zi*Zk + 2*Ri*Zk^2 + 3*Rk^3 + 2*Rk*Zi
         ^2 - 4*Rk*Zi*Zk + 2*Rk*Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu -
         1));
    Kel(6,7) = (E*(4*nu - 1)*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(6,8) = ((E*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk^2))
         /12 - (E*nu*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk + 2*
         Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));

    Kel(7,1) = (E*nu*(16*Ri^3*Rk - 6*Ri^4 + 2*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk^2 + 4*Rk^2*Zi
         ^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zi^2*log(Rk) + 4*Rk^2*Zk^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zk^2*
         log(Rk) - 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)
         ^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*(8*Ri^3*Rk - 3*Ri^4 + Rk^4 - 6*Ri
         ^2*Rk^2 + 4*Ri^2*Zi^2 + 4*Ri^2*Zk^2 + 4*Rk^2*Zi^2 + 4*Rk^2*Zk^2 + 4*Rk
         ^2*Zi^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zi^2*log(Rk) + 4*Rk^2*Zk^2*log(Ri) - 4*Rk^2*Zk
         ^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi^2 - 8*Ri*Rk*Zk^2 - 8*Ri^2*Zi*Zk - 8*Rk^2*Zi*Zk
         - 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(
         Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
    Kel(7,2) = - (E*(14*Ri + Rk))/(72*(nu + 1)) - (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu -
         1));
    Kel(7,3) = (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 - Rk^4 + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) -
          4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) -
         8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi -
         Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4
          + 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) - 4*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) + 4*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) -
          4*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))
         /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
```

```
        Kel(7,4) = -(E*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(7,5) = (E*nu*(4*Ri*Rk^3 - 4*Ri^3*Rk + 2*Ri^4 - 2*Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*
            log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*
            log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Rk)))/(24*(Ri -
            Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*(2*Ri*Rk^3 - 2*Ri^3*Rk + Ri^4 -
             Rk^4 - 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Ri) + 8*Ri*Rk*Zi^2*log(Rk) - 8*Ri*Rk*Zk^2*log(
            Ri) + 8*Ri*Rk*Zk^2*log(Rk) + 16*Ri*Rk*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Ri*Rk*Zi*Zk*
            log(Rk)))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(7,6) = (E*(4*nu - 1)*(2*Ri + Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(7,7) = - (E*(3*Ri^4 - 8*Ri^3*Rk - Rk^4 + 6*Ri^2*Rk^2 + 8*Ri^2*Zi^2 + 8*
            Ri^2*Zk^2 + 8*Rk^2*Zi^2 + 8*Rk^2*Zk^2 + 8*Rk^2*Zi^2*log(Ri) - 8*Rk^2*Zi
            ^2*log(Rk) + 8*Rk^2*Zk^2*log(Ri) - 8*Rk^2*Zk^2*log(Rk) - 16*Ri*Rk*Zi^2
            - 16*Ri*Rk*Zk^2 - 16*Ri^2*Zi*Zk - 16*Rk^2*Zi*Zk - 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri)
             + 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk) + 32*Ri*Rk*Zi*Zk))/(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)
            *(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(16*Ri^3*Rk - 6*Ri^4 + 2*Rk^4 - 12*Ri^2*Rk
            ^2 - 8*Rk^2*Zi^2*log(Ri) + 8*Rk^2*Zi^2*log(Rk) - 8*Rk^2*Zk^2*log(Ri) +
            8*Rk^2*Zk^2*log(Rk) + 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Ri) - 16*Rk^2*Zi*Zk*log(Rk)))
            /(24*(Ri - Rk)^2*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(7,8) = (E*(2*Ri - 5*Rk))/(72*(nu + 1)) + (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu - 1)
            );

        Kel(8,1) = (E*(14*Ri + Rk))/(72*(nu + 1)) + (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu - 1))
            ;
        Kel(8,2) = ((E*(6*Ri^3 - 10*Ri^2*Rk + 2*Ri*Rk^2 - Ri*Zi^2 + 2*Ri*Zi*Zk - Ri
            *Zk^2 + 2*Rk^3 - Rk*Zi^2 + 2*Rk*Zi*Zk - Rk*Zk^2))/24 - (E*nu*(6*Ri^3 -
            10*Ri^2*Rk + 2*Ri*Rk^2 - 2*Ri*Zi^2 + 4*Ri*Zi*Zk - 2*Ri*Zk^2 + 2*Rk^3 -
            2*Rk*Zi^2 + 4*Rk*Zi*Zk - 2*Rk*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 +
             nu - 1));
        Kel(8,3) = -(E*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(8,4) = ((E*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk
            ^2))/24 - (E*nu*(Ri + Rk)*(2*Ri^2 - 4*Ri*Rk + 2*Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk
             + 2*Zk^2))/24)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(8,5) = -(E*(4*nu - 1)*(Ri + 2*Rk))/(24*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(8,6) = ((E*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + Zi^2 - 2*Zi*Zk + Zk^2))
            /12 - (E*nu*(Ri + Rk)*(- Ri^2 + 2*Ri*Rk - Rk^2 + 2*Zi^2 - 4*Zi*Zk + 2*
            Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu - 1));
        Kel(8,7) = (E*(2*Ri - 5*Rk))/(72*(nu + 1)) + (E*(4*Ri - Rk))/(36*(2*nu - 1)
            );
        Kel(8,8) = -((E*(3*Ri^3 - 5*Ri^2*Rk + Ri*Rk^2 + Ri*Zi^2 - 2*Ri*Zi*Zk + Ri*
            Zk^2 + Rk^3 + Rk*Zi^2 - 2*Rk*Zi*Zk + Rk*Zk^2))/12 - (E*nu*(3*Ri^3 - 5*
            Ri^2*Rk + Ri*Rk^2 + 2*Ri*Zi^2 - 4*Ri*Zi*Zk + 2*Ri*Zk^2 + Rk^3 + 2*Rk*Zi
            ^2 - 4*Rk*Zi*Zk + 2*Rk*Zk^2))/12)/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)*(2*nu^2 + nu -
            1));
    %disp(Kel);

        ind = zeros(1,4);
```

```
      ind(1) = mIndNodes(j,i);
      ind(2) = mIndNodes(j,i+1);
      ind(3) = mIndNodes(j+1,i+1);
      ind(4) = mIndNodes(j+1,i);

      %Переносим элементы из локальной матрицы жёсткости в глобальную
      for jj = 1:4
        for ii = 1:4
          for rr = 0:1
            for cc = 0:1
              mK(2*ind(jj)-rr,2*ind(ii)-cc) = ...
                mK(2*ind(jj)-rr,2*ind(ii)-cc) + Kel(2*jj-rr,2*ii-cc);
            end; %cc = 0:1
          end; %of rr = 0:1
        end; %of ii = 1:4
      end; %of jj = 1:4
    %end; %if t == 1

    Ti = mTemp(t,j,i);
    Tj = mTemp(t,j,i+1);
    Tk = mTemp(t,j+1,i+1);
    Tl = mTemp(t,j+1,i);

    ecrR  = mEpsCrR(t,j,i);
    ecrT  = mEpsCrT(t,j,i);
    ecrZ  = mEpsCrZ(t,j,i);
    gcrRZ = mGamCrRZ(t,j,i);

    alfa = alfaL1;

    Tmin = minTemp;

    Fel(1,1) = (E*(3*Rk^2*gcrRZ - 6*Ri^2*gcrRZ + 3*Ri*Rk*gcrRZ - 9*Ri*Zi*ecrR - 9*Ri*Zi*ecrT + 9*Ri*Zk*ecrR - 9*Rk*Zi*ecrR + 9*Ri*Zk*ecrT + 9*Rk*Zi*ecrT + 9*Rk*Zk*ecrR - 9*Rk*Zk*ecrT - 8*Ri*Ti*Zi*alfa - 4*Ri*Tj*Zi*alfa + 8*Ri*Ti*Zk*alfa - 2*Ri*Tk*Zi*alfa + 2*Rk*Ti*Zi*alfa + 4*Ri*Tj*Zk*alfa - 4*Ri*Tl*Zi*alfa - 2*Rk*Tj*Zi*alfa + 2*Ri*Tk*Zk*alfa - 2*Rk*Ti*Zk*alfa - Rk*Tk*Zi*alfa + 18*Ri*Tmin*Zi*alfa + 4*Ri*Tl*Zk*alfa + 2*Rk*Tj*Zk*alfa + Rk*Tl*Zi*alfa + Rk*Tk*Zk*alfa - 18*Ri*Tmin*Zk*alfa - Rk*Tl*Zk*alfa))/(36*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(6*Rk^2*gcrRZ - 12*Ri^2*gcrRZ + 6*Ri*Rk*gcrRZ + 18*Ri*Zi*ecrZ - 18*Rk*Zi*ecrR + 18*Rk*Zi*ecrT - 18*Ri*Zk*ecrZ + 18*Rk*Zk*ecrR - 18*Rk*Zk*ecrT + 8*Ri*Ti*Zi*alfa + 4*Ri*Tj*Zi*alfa - 8*Ri*Ti*Zk*alfa + 2*Ri*Tk*Zi*alfa - 2*Rk*Ti*Zi*alfa - 4*Ri*Tj*Zk*alfa + 4*Ri*Tl*Zi*alfa + 2*Rk*Tj*Zi*alfa - 2*Ri*Tk*Zk*alfa + 2*Rk*Ti*Zk*alfa + Rk*Tk*Zi*alfa - 18*Ri*Tmin*Zi*alfa - 4*Ri*Tl*Zk*alfa - 2*Rk*Tj*Zk*alfa - Rk*Tl*Zi*
```

```
        alfa - Rk*Tk*Zk*alfa + 18*Ri*Tmin*Zk*alfa + Rk*Tl*Zk*alfa))/(36*(2*nu^2 +
         nu - 1));
    Fel(2,1) = (E*(4*Rk^2*ecrZ - 8*Ri^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrZ - 3*Ri*Zi*gcrRZ + 3*
        Ri*Zk*gcrRZ - 3*Rk*Zi*gcrRZ + 3*Rk*Zk*gcrRZ - 3*Ri^2*Ti*alfa - Ri^2*Tj*
        alfa - Ri^2*Tk*alfa + Rk^2*Ti*alfa - 3*Ri^2*Tl*alfa + Rk^2*Tj*alfa + Rk
        ^2*Tk*alfa + 8*Ri^2*Tmin*alfa + Rk^2*Tl*alfa - 4*Rk^2*Tmin*alfa + 2*Ri*Rk
        *Ti*alfa + 2*Ri*Rk*Tl*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 + nu - 1)) +
         (E*nu*(8*Ri^2*ecrZ - 8*Ri^2*ecrT - 8*Ri^2*ecrR + 4*Rk^2*ecrR + 4*Rk^2*
        ecrT - 4*Rk^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrR + 4*Ri*Rk*ecrT - 4*Ri*Rk*ecrZ + 6*Ri*Zi
        *gcrRZ - 6*Ri*Zk*gcrRZ + 6*Rk*Zi*gcrRZ - 6*Rk*Zk*gcrRZ - 3*Ri^2*Ti*alfa -
         Ri^2*Tj*alfa - Ri^2*Tk*alfa + Rk^2*Ti*alfa - 3*Ri^2*Tl*alfa + Rk^2*Tj*
        alfa + Rk^2*Tk*alfa + 8*Ri^2*Tmin*alfa + Rk^2*Tl*alfa - 4*Rk^2*Tmin*alfa
        + 2*Ri*Rk*Ti*alfa + 2*Ri*Rk*Tl*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 +
        nu - 1));
    Fel(3,1) = (E*nu*(6*Ri^2*gcrRZ - 12*Rk^2*gcrRZ + 6*Ri*Rk*gcrRZ - 18*Ri*Zi*
        ecrR + 18*Ri*Zi*ecrT + 18*Ri*Zk*ecrR - 18*Ri*Zk*ecrT + 18*Rk*Zi*ecrZ -
        18*Rk*Zk*ecrZ + 2*Ri*Ti*Zi*alfa - 2*Ri*Tj*Zi*alfa - 2*Ri*Ti*Zk*alfa - Ri*
        Tk*Zi*alfa + 4*Rk*Ti*Zi*alfa + 2*Ri*Tj*Zk*alfa + Ri*Tl*Zi*alfa + 8*Rk*Tj*
        Zi*alfa + Ri*Tk*Zk*alfa - 4*Rk*Ti*Zk*alfa + 4*Rk*Tk*Zi*alfa - Ri*Tl*Zk*
        alfa - 8*Rk*Tj*Zk*alfa + 2*Rk*Tl*Zi*alfa - 4*Rk*Tk*Zk*alfa - 18*Rk*Tmin*
        Zi*alfa - 2*Rk*Tl*Zk*alfa + 18*Rk*Tmin*Zk*alfa))/(36*(2*nu^2 + nu - 1)) -
         (E*(3*Ri^2*gcrRZ - 6*Rk^2*gcrRZ + 3*Ri*Rk*gcrRZ - 9*Ri*Zi*ecrR + 9*Ri*Zi
        *ecrT + 9*Ri*Zk*ecrR - 9*Rk*Zi*ecrR - 9*Ri*Zk*ecrT - 9*Rk*Zi*ecrT + 9*Rk*
        Zk*ecrR + 9*Rk*Zk*ecrT - 2*Ri*Ti*Zi*alfa + 2*Ri*Tj*Zi*alfa + 2*Ri*Ti*Zk*
        alfa + Ri*Tk*Zi*alfa - 4*Rk*Ti*Zi*alfa - 2*Ri*Tj*Zk*alfa - Ri*Tl*Zi*alfa
        - 8*Rk*Tj*Zi*alfa - Ri*Tk*Zk*alfa + 4*Rk*Ti*Zk*alfa - 4*Rk*Tk*Zi*alfa +
        Ri*Tl*Zk*alfa + 8*Rk*Tj*Zk*alfa - 2*Rk*Tl*Zi*alfa + 4*Rk*Tk*Zk*alfa + 18*
        Rk*Tmin*Zi*alfa + 2*Rk*Tl*Zk*alfa - 18*Rk*Tmin*Zk*alfa))/(36*(2*nu^2 + nu
         - 1));
    Fel(4,1) = - (E*(4*Ri^2*ecrZ - 8*Rk^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrZ - 3*Ri*Zi*gcrRZ +
        3*Ri*Zk*gcrRZ - 3*Rk*Zi*gcrRZ + 3*Rk*Zk*gcrRZ + Ri^2*Ti*alfa + Ri^2*Tj*
        alfa + Ri^2*Tk*alfa - Rk^2*Ti*alfa + Ri^2*Tl*alfa - 3*Rk^2*Tj*alfa - 3*Rk
        ^2*Tk*alfa - 4*Ri^2*Tmin*alfa - Rk^2*Tl*alfa + 8*Rk^2*Tmin*alfa + 2*Ri*Rk
        *Tj*alfa + 2*Ri*Rk*Tk*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 + nu - 1)) -
         (E*nu*(4*Ri^2*ecrR + 4*Ri^2*ecrT - 4*Ri^2*ecrZ - 8*Rk^2*ecrR - 8*Rk^2*
        ecrT + 8*Rk^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrR + 4*Ri*Rk*ecrT - 4*Ri*Rk*ecrZ + 6*Ri*Zi
        *gcrRZ - 6*Ri*Zk*gcrRZ + 6*Rk*Zi*gcrRZ - 6*Rk*Zk*gcrRZ + Ri^2*Ti*alfa +
        Ri^2*Tj*alfa + Ri^2*Tk*alfa - Rk^2*Ti*alfa + Ri^2*Tl*alfa - 3*Rk^2*Tj*
        alfa - 3*Rk^2*Tk*alfa - 4*Ri^2*Tmin*alfa - Rk^2*Tl*alfa + 8*Rk^2*Tmin*
        alfa + 2*Ri*Rk*Tj*alfa + 2*Ri*Rk*Tk*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu
        ^2 + nu - 1));
    Fel(5,1) = (E*(3*Ri^2*gcrRZ - 6*Rk^2*gcrRZ + 3*Ri*Rk*gcrRZ + 9*Ri*Zi*ecrR -
        9*Ri*Zi*ecrT - 9*Ri*Zk*ecrR + 9*Rk*Zi*ecrR + 9*Ri*Zk*ecrT + 9*Rk*Zi*ecrT
        - 9*Rk*Zk*ecrR - 9*Rk*Zk*ecrT + Ri*Ti*Zi*alfa - Ri*Tj*Zi*alfa - Ri*Ti*Zk*
        alfa - 2*Ri*Tk*Zi*alfa + 2*Rk*Ti*Zi*alfa + Ri*Tj*Zk*alfa + 2*Ri*Tl*Zi*
        alfa + 4*Rk*Tj*Zi*alfa + 2*Ri*Tk*Zk*alfa - 2*Rk*Ti*Zk*alfa + 8*Rk*Tk*Zi*
```

```
        alfa - 2*Ri*Tl*Zk*alfa - 4*Rk*Tj*Zk*alfa + 4*Rk*Tl*Zi*alfa - 8*Rk*Tk*Zk*
        alfa - 18*Rk*Tmin*Zi*alfa - 4*Rk*Tl*Zk*alfa + 18*Rk*Tmin*Zk*alfa))
        /(36*(2*nu^2 + nu - 1)) - (E*nu*(6*Ri^2*gcrRZ - 12*Rk^2*gcrRZ + 6*Ri*Rk*
        gcrRZ + 18*Ri*Zi*ecrR - 18*Ri*Zi*ecrT - 18*Ri*Zk*ecrR + 18*Ri*Zk*ecrT -
        18*Rk*Zi*ecrZ + 18*Rk*Zk*ecrZ - Ri*Ti*Zi*alfa + Ri*Tj*Zi*alfa + Ri*Ti*Zk*
        alfa + 2*Ri*Tk*Zi*alfa - 2*Rk*Ti*Zi*alfa - Ri*Tj*Zk*alfa - 2*Ri*Tl*Zi*
        alfa - 4*Rk*Tj*Zi*alfa - 2*Ri*Tk*Zk*alfa + 2*Rk*Ti*Zk*alfa - 8*Rk*Tk*Zi*
        alfa + 2*Ri*Tl*Zk*alfa + 4*Rk*Tj*Zk*alfa - 4*Rk*Tl*Zi*alfa + 8*Rk*Tk*Zk*
        alfa + 18*Rk*Tmin*Zi*alfa + 4*Rk*Tl*Zk*alfa - 18*Rk*Tmin*Zk*alfa))
        /(36*(2*nu^2 + nu - 1));
    Fel(6,1) = (E*(4*Ri^2*ecrZ - 8*Rk^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrZ + 3*Ri*Zi*gcrRZ - 3*
        Ri*Zk*gcrRZ + 3*Rk*Zi*gcrRZ - 3*Rk*Zk*gcrRZ + Ri^2*Ti*alfa + Ri^2*Tj*alfa
         + Ri^2*Tk*alfa - Rk^2*Ti*alfa + Ri^2*Tl*alfa - 3*Rk^2*Tj*alfa - 3*Rk^2*
        Tk*alfa - 4*Ri^2*Tmin*alfa - Rk^2*Tl*alfa + 8*Rk^2*Tmin*alfa + 2*Ri*Rk*Tj
        *alfa + 2*Ri*Rk*Tk*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 + nu - 1)) + (E
        *nu*(4*Ri^2*ecrR + 4*Ri^2*ecrT - 4*Ri^2*ecrZ - 8*Rk^2*ecrR - 8*Rk^2*ecrT
        + 8*Rk^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrR + 4*Ri*Rk*ecrT - 4*Ri*Rk*ecrZ - 6*Ri*Zi*
        gcrRZ + 6*Ri*Zk*gcrRZ - 6*Rk*Zi*gcrRZ + 6*Rk*Zk*gcrRZ + Ri^2*Ti*alfa + Ri
        ^2*Tj*alfa + Ri^2*Tk*alfa - Rk^2*Ti*alfa + Ri^2*Tl*alfa - 3*Rk^2*Tj*alfa
        - 3*Rk^2*Tk*alfa - 4*Ri^2*Tmin*alfa - Rk^2*Tl*alfa + 8*Rk^2*Tmin*alfa +
        2*Ri*Rk*Tj*alfa + 2*Ri*Rk*Tk*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 + nu
        - 1));
    Fel(7,1) = (E*nu*(6*Rk^2*gcrRZ - 12*Ri^2*gcrRZ + 6*Ri*Rk*gcrRZ - 18*Ri*Zi*
        ecrZ + 18*Rk*Zi*ecrR - 18*Rk*Zi*ecrT + 18*Ri*Zk*ecrZ - 18*Rk*Zk*ecrR +
        18*Rk*Zk*ecrT - 4*Ri*Ti*Zi*alfa - 2*Ri*Tj*Zi*alfa + 4*Ri*Ti*Zk*alfa - 4*
        Ri*Tk*Zi*alfa + Rk*Ti*Zi*alfa + 2*Ri*Tj*Zk*alfa - 8*Ri*Tl*Zi*alfa - Rk*Tj
        *Zi*alfa + 4*Ri*Tk*Zk*alfa - Rk*Ti*Zk*alfa - 2*Rk*Tk*Zi*alfa + 18*Ri*Tmin
        *Zi*alfa + 8*Ri*Tl*Zk*alfa + Rk*Tj*Zk*alfa + 2*Rk*Tl*Zi*alfa + 2*Rk*Tk*Zk
        *alfa - 18*Ri*Tmin*Zk*alfa - 2*Rk*Tl*Zk*alfa))/(36*(2*nu^2 + nu - 1)) - (
        E*(3*Rk^2*gcrRZ - 6*Ri^2*gcrRZ + 3*Ri*Rk*gcrRZ + 9*Ri*Zi*ecrR + 9*Ri*Zi*
        ecrT - 9*Ri*Zk*ecrR + 9*Rk*Zi*ecrR - 9*Ri*Zk*ecrT - 9*Rk*Zi*ecrT - 9*Rk*
        Zk*ecrR + 9*Rk*Zk*ecrT + 4*Ri*Ti*Zi*alfa + 2*Ri*Tj*Zi*alfa - 4*Ri*Ti*Zk*
        alfa + 4*Ri*Tk*Zi*alfa - Rk*Ti*Zi*alfa - 2*Ri*Tj*Zk*alfa + 8*Ri*Tl*Zi*
        alfa + Rk*Tj*Zi*alfa - 4*Ri*Tk*Zk*alfa + Rk*Ti*Zk*alfa + 2*Rk*Tk*Zi*alfa
        - 18*Ri*Tmin*Zi*alfa - 8*Ri*Tl*Zk*alfa - Rk*Tj*Zk*alfa - 2*Rk*Tl*Zi*alfa
        - 2*Rk*Tk*Zk*alfa + 18*Ri*Tmin*Zk*alfa + 2*Rk*Tl*Zk*alfa))/(36*(2*nu^2 +
        nu - 1));
    Fel(8,1) = - (E*(4*Rk^2*ecrZ - 8*Ri^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrZ + 3*Ri*Zi*gcrRZ -
        3*Ri*Zk*gcrRZ + 3*Rk*Zi*gcrRZ - 3*Rk*Zk*gcrRZ - 3*Ri^2*Ti*alfa - Ri^2*Tj*
        alfa - Ri^2*Tk*alfa + Rk^2*Ti*alfa - 3*Ri^2*Tl*alfa + Rk^2*Tj*alfa + Rk
        ^2*Tk*alfa + 8*Ri^2*Tmin*alfa + Rk^2*Tl*alfa - 4*Rk^2*Tmin*alfa + 2*Ri*Rk
        *Ti*alfa + 2*Ri*Rk*Tl*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 + nu - 1)) -
         (E*nu*(8*Ri^2*ecrZ - 8*Ri^2*ecrT - 8*Ri^2*ecrR + 4*Rk^2*ecrR + 4*Rk^2*
        ecrT - 4*Rk^2*ecrZ + 4*Ri*Rk*ecrR + 4*Ri*Rk*ecrT - 4*Ri*Rk*ecrZ - 6*Ri*Zi
        *gcrRZ + 6*Ri*Zk*gcrRZ - 6*Rk*Zi*gcrRZ + 6*Rk*Zk*gcrRZ - 3*Ri^2*Ti*alfa -
         Ri^2*Tj*alfa - Ri^2*Tk*alfa + Rk^2*Ti*alfa - 3*Ri^2*Tl*alfa + Rk^2*Tj*
```

```
         alfa + Rk^2*Tk*alfa + 8*Ri^2*Tmin*alfa + Rk^2*Tl*alfa - 4*Rk^2*Tmin*alfa
         + 2*Ri*Rk*Ti*alfa + 2*Ri*Rk*Tl*alfa - 4*Ri*Rk*Tmin*alfa))/(24*(2*nu^2 +
         nu - 1));

      %Переносим элементы из локального вектора нагрузок в глобальный
      for jj = 1:4
        for rr = 0:1
          vF(2*ind(jj)-rr) = vF(2*ind(jj)-rr) + Fel(2*jj-rr);
        end; %of rr = 0:1
      end; %of jj = 1:4
    end; %of for i = 1:qnFeR
  end; %of for j = 1:qnFeZ


  %Учитываем действие внешнего давления
  %Внутренняя грань
  for j = 1:qnFeZ
    i = 1;
    indIU = 2*mIndNodes(j,i) - 1;
    indLU = 2*mIndNodes(j+1,i) - 1;
    vF(indIU) = vF(indIU) + PrA*vR(i)*(vZ(j+1)-vZ(j))/2;
    vF(indLU) = vF(indLU) + PrA*vR(i)*(vZ(j+1)-vZ(j))/2;
  end;
  %Внешняя грань
  for j = 1:qnFeZ
    i = qnFeR;
    indJU = 2*mIndNodes(j,i+1) - 1;
    indKU = 2*mIndNodes(j+1,i+1) - 1;
    vF(indJU) = vF(indJU) + PrB*vR(i+1)*(vZ(j+1)-vZ(j))/2;
    vF(indKU) = vF(indKU) + PrB*vR(i+1)*(vZ(j+1)-vZ(j))/2;
  end;
  %Верхняя грань
  for i = 1:qnFeR
    j = qnFeZ;
    indLU = 2*mIndNodes(j+1,i) - 1;
    indLW = 2*mIndNodes(j+1,i);
    indKU = 2*mIndNodes(j+1,i+1) - 1;
    indKW = 2*mIndNodes(j+1,i+1);
    vF(indLW) = vF(indLW) + PrU*(vFeR(i)^2-vR(i)^2)/2;
    vF(indKW) = vF(indKW) + PrU*(vR(i+1)^2-vFeR(i)^2)/2;
  end;
  %Нижняя грань
  for i = 1:qnFeR
    j = 1;
    indIU = 2*mIndNodes(j,i) - 1;
    indIW = 2*mIndNodes(j,i);
```

```
    indJU = 2*mIndNodes(j,i+1) - 1;
    indJW = 2*mIndNodes(j,i+1);
    vF(indIW) = vF(indIW) + PrD*(vFeR(i)^2-vR(i)^2)/2;
    vF(indJW) = vF(indJW) + PrD*(vR(i+1)^2-vFeR(i)^2)/2;
  end;

  %Накладываем граничные условия
  for i = 1:qnNodeR

    j = qnNodeZ;
    indW = 2*mIndNodes(j,i);
    mK(indW, : ) = 0;
    mK( : , indW) = 0;
    mK(indW, indW) = 1;
    vF(indW, 1) = 0;
    %indU = 2*mIndNodes(j,i)-1;
    %mK(indU, : ) = 0;
    %mK( : , indU) = 0;
    %mK(indU, indU) = 1;
    %vF(indU, 1) = 0;
  end;

  %Решение системы уравнений
  mK = sparse(mK);
  vF = sparse(vF);
  vU = mK\vF;

  %Заполняем матрицы перемещений U и W
  for j = 1:qnNodeZ
    for i = 1:qnNodeR
      glU(t,j,i) = vU(2*mIndNodes(j,i)-1);
      glW(t,j,i) = vU(2*mIndNodes(j,i));
    end;
  end;

  %Определяем напряжения в конечных элемента
  for j = 1:qnFeZ
    for i = 1:qnFeR
      Ri  = vR(i);
      Rk  = vR(i+1);
      Zi  = vZ(j);
      Zk  = vZ(j+1);
      r   = vFeR(i);
      z   = vFeZ(j);
      B   = matB(r,Ri,Rk,z,Zi,Zk);
      D   = matD(E, nu);
```

```
        Ui = glU(t,j,i);
        Wi = glW(t,j,i);
        Uj = glU(t,j,i+1);
        Wj = glW(t,j,i+1);
        Uk = glU(t,j+1,i+1);
        Wk = glW(t,j+1,i+1);
        Ul = glU(t,j+1,i);
        Wl = glW(t,j+1,i);

        vN = [ ((Rk - r)*(Zk - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)),...
             -((Ri - r)*(Zk - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)),...
             ((Ri - r)*(Zi - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk)),...
             -((Rk - r)*(Zi - z))/((Ri - Rk)*(Zi - Zk))];

        U = [Ui; Wi; Uj; Wj; Uk; Wk; Ul; Wl];

        epsFull = B*U;
        epsTemp = [1;1;1;0]*alfaL1*(vN*[mTemp(t,j,i);mTemp(t,j,i+1);mTemp(t,j+1,i+1);
            mTemp(t,j+1,i)]-Tmin);
        %epsTemp = [1;1;1;0]*mFeEpsTemp(t,j,i);

        mGamFullRZ(t,j,i) = epsFull(4,1);
        mGamElRZ(t,j,i)  = mGamFullRZ(t,j,i) - mGamCrRZ(t,j,i);

        ecrR  = mEpsCrR(t,j,i);
        ecrT  = mEpsCrT(t,j,i);
        ecrZ  = mEpsCrZ(t,j,i);
        gcrRZ = mGamCrRZ(t,j,i);
        epsCreep = [ecrR; ecrT; ecrZ; gcrRZ];

        S = D*(epsFull-epsTemp - epsCreep);
        Sr(t,j,i)   = S(1);
        St(t,j,i)   = S(2);
        Sz(t,j,i)   = S(3);
        Trz(t,j,i)  = S(4);

        TTT = [ Sr(t,j,i)   0           Trz(t,j,i)
                0           St(t,j,i)   0
                Trz(t,j,i)  0           Sz(t,j,i)];
        [RR, DD] = eig(TTT);

        SS1 = DD(1,1);

        if SS1<DD(2,2)
          SS1 = DD(2,2);
        elseif SS1<DD(3,3)
```

```
        SS1 = DD(3,3);
      end;

      SS3 = DD(1,1);

      if SS3>DD(2,2)
        SS3 = DD(2,2);
      elseif SS3>DD(3,3)
        SS3 = DD(3,3);
      end;

      S1(t,j,i)    = SS1;
      S3(t,j,i)    = SS3;
    end;
  end;

  %Определяем параметры ползучести для следующего временнОго шага
  for j = 1:qnFeZ
    for i = 1:qnFeR
      if t < qnPtsT
        E       = mUng(t,j,i);
        nu      = mNu(t,j,i);

        Eunl1   = mEunlim(t,j,i);
        ms1     = mMcr(t,j,i);
        n0s1    = mN0cr(t,j,i);

        Eunl2   = mE2unlim(t,j,i);
        ms2     = mM2cr(t,j,i);
        n0s2    = mN02cr(t,j,i);

        ecrR1   = mEpsCrR1(t,j,i);
        ecrT1   = mEpsCrT1(t,j,i);
        ecrZ1   = mEpsCrZ1(t,j,i);
        gcrRZ1 = mGamCrRZ1(t,j,i);

        ecrR2   = mEpsCrR2(t,j,i);
        ecrT2   = mEpsCrT2(t,j,i);
        ecrZ2   = mEpsCrZ2(t,j,i);
        gcrRZ2 = mGamCrRZ2(t,j,i);

        Sre    = Sr(t,j,i);
        Ste    = St(t,j,i);
        Sze    = Sz(t,j,i);
        Trze   = Trz(t,j,i);
        pe     = (Sre + Ste + Sze) / 3;
```

```

          frs1   = 3/2*(Sre - pe) - Eunl1 * ecrR1;
          fts1   = 3/2*(Ste - pe) - Eunl1 * ecrT1;
          fzs1   = 3/2*(Sze - pe) - Eunl1 * ecrZ1;
          frzs1  = 3/2*(Trze) - Eunl1 * gcrRZ1/2;

          frs2   = 3/2*(Sre - pe) - Eunl2 * ecrR2;
          fts2   = 3/2*(Ste - pe) - Eunl2 * ecrT2;
          fzs2   = 3/2*(Sze - pe) - Eunl2 * ecrZ2;
          frzs2  = 3/2*(Trze) - Eunl2 * gcrRZ2/2;

          fmax1 = abs(frs1);
          if fmax1 < abs(fts1)
            fmax1 = abs(fts1);
          end;
          if fmax1 < abs(fzs1)
            fmax1 = abs(fzs1);
          end;

          fmax2 = abs(frs2);
          if fmax2 < abs(fts2)
            fmax2 = abs(fts2);
          end;
          if fmax2 < abs(fzs2)
            fmax2 = abs(fzs2);
          end;

          %ns = n0s*exp(-fmax/ms);

          dt = (vTime(t+1)-vTime(t));
          mEpsCrR1(t+1,j,i)  = mEpsCrR1(t,j,i) + frs1/n0s1*exp(fmax1/ms1)*dt;
          mEpsCrT1(t+1,j,i)  = mEpsCrT1(t,j,i) + fts1/n0s1*exp(fmax1/ms1)*dt;
          mEpsCrZ1(t+1,j,i)  = mEpsCrZ1(t,j,i) + fzs1/n0s1*exp(fmax1/ms1)*dt;
          mGamCrRZ1(t+1,j,i) = mGamCrRZ1(t,j,i) + 2*frzs1/n0s1*exp(fmax1/ms1)*dt;

          mEpsCrR2(t+1,j,i)  = mEpsCrR2(t,j,i) + frs2/n0s2*exp(fmax2/ms2)*dt;
          mEpsCrT2(t+1,j,i)  = mEpsCrT2(t,j,i) + fts2/n0s2*exp(fmax2/ms2)*dt;
          mEpsCrZ2(t+1,j,i)  = mEpsCrZ2(t,j,i) + fzs2/n0s2*exp(fmax2/ms2)*dt;
          mGamCrRZ2(t+1,j,i) = mGamCrRZ2(t,j,i) + 2*frzs2/n0s2*exp(fmax2/ms2)*dt;

          mEpsCrR(t+1,j,i)  = mEpsCrR1(t+1,j,i) + mEpsCrR2(t+1,j,i);
          mEpsCrT(t+1,j,i)  = mEpsCrT1(t+1,j,i) + mEpsCrT2(t+1,j,i);
          mEpsCrZ(t+1,j,i)  = mEpsCrZ1(t+1,j,i) + mEpsCrZ2(t+1,j,i);
          mGamCrRZ(t+1,j,i) = mGamCrRZ1(t+1,j,i) + mGamCrRZ2(t+1,j,i);
        end;
      end;
```

```
  end;
end; %of for t = 1:qnPtsT

toc

vMaxSr = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxSt = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxSt = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxTrz = zeros(qnPtsT,1);
vMinTrz = zeros(qnPtsT,1);

GlobalS1 = zeros(qnPtsT,1);
GlobalS3 = zeros(qnPtsT,1);

for t=1:qnPtsT
  maxSr = Sr(t,1,1);
  minSr = Sr(t,1,1);
  maxSt = Sr(t,1,1);
  minSt = Sr(t,1,1);
  maxSz = Sr(t,1,1);
  minSz = Sr(t,1,1);
  maxTrz = Sr(t,1,1);
  minTrz = Sr(t,1,1);
  maxS1 = S1(t,1,1);
  minS1 = S1(t,1,1);
  maxS3 = S3(t,1,1);
  minS3 = S3(t,1,1);

  for j=11:30
    for i=1:qnFeR
      if maxSr<Sr(t,j,i)
        maxSr = Sr(t,j,i);
      end;
      if minSr>Sr(t,j,i)
        minSr = Sr(t,j,i);
      end;

      if maxSt<St(t,j,i)
        maxSt = St(t,j,i);
      end;
      if minSt>St(t,j,i)
        minSt = St(t,j,i);
      end;
```

```

      if maxSz<Sz(t,j,i)
        maxSz = Sz(t,j,i);
      end;
      if minSz>Sz(t,j,i)
        minSz = Sz(t,j,i);
      end;

      if maxTrz<Trz(t,j,i)
        maxTrz = Trz(t,j,i);
      end;
      if minTrz>Trz(t,j,i)
        minTrz = Trz(t,j,i);
      end;

      if maxS1<S1(t,j,i)
        maxS1 = S1(t,j,i);
      end;

      if minS3>S3(t,j,i)
        minS3 = S3(t,j,i);
      end;

      vMaxSr(t) = maxSr;
      vMinSr(t) = minSr;
      vMaxSt(t) = maxSt;
      vMinSt(t) = minSt;
      vMaxSz(t) = maxSz;
      vMinSz(t) = minSz;
      vMaxTrz(t) = maxTrz;
      vMinTrz(t) = minTrz;
      vMaxS1(t) = maxS1;
      vMinS1(t) = minS1;
      vMaxS3(t) = maxS3;
      vMinS3(t) = minS3;
      GlobalS1(t) = maxS1;
      GlobalS3(t) = minS3;
    end;
  end;
end;
```

B.7 Код модуля определения НДС полимерного диска из главы 7

Листинг В.7 — Some Code

```
%Двумерная задача расчета ПЭВП по коэффициентам ТРЕУГОЛЬНЫМИ элементами
%Расчёт по главным напряжениям
clc;
clear all;

tic

qnIntT  = 20;       %число интервалов разбиения по времени
qnPtsT  = qnIntT + 1;   %число расчётных точек по времени

GlobalS1 = zeros(qnPtsT,5);
GlobalS3 = zeros(qnPtsT,5);


for GaPHI = 1:5
  if GaPHI == 1
    ga = 0
    PHI = 0
  elseif GaPHI == 2
    ga = 0.3
    PHI = 0
  elseif GaPHI == 3
    ga = 0
    PHI = 70
  elseif GaPHI == 4
    ga = 0.15
    PHI = 35
  elseif GaPHI == 5
    ga = 0.3
    PHI = 70
  end;

PrA      = 0; %Давление на внутренней грани цилиндра, МПа
PrB      = 0; %Давление на внешней грани цилиндра, МПа
PrD      = 0; %Давление на нижнем торце цилиндра, МПа
PrU      = -10; %Давление на верхнем торце цилиндра, МПа

Ra       = 0.01; %Внутренний радиус, м
Rb       = 0.050; %Внешний радиус, м
Zmin     = 0; %Координата нижней точки, м
Zmax     = 0.005; %Координата верхней точки, м



limTime = 10; %ч. Максимальное время, до которого происходит расчёт
```

```
vTime    = zeros(qnPtsT, 1); %Вектор текущего времени

%Формируем вектор о текущем времени
%В случае равномерного шага по времени
kg = 10^2; %во сколько раз последний элемент больше первого
q = kg^(1/(qnIntT-1));
b1 = (limTime)*(1-q)/(1-q^qnIntT);
vTime(1) = 0;
for i = 1:qnIntT
  %vR(i) = Ra + (i-1)*(Rb-Ra)/qnFeR;
  vTime(i+1) = vTime(i) + b1*q^(i-1);
end;



sizeFrac = 10; %Максимальное количество ребер элемента по высоте или радиусу

%Создаём область, описывающую рассчитываемое тело. Ход - против ч.с.
%Первый элемент в столбце определяет тип сегмента (2 — отрезок прямой);
%2, 3 (4, 5) строки определяют x (y) координаты начальной и конечной точки
%оответственно; 6, 7 строки — номер области слева и справа по направлению
%обхода. Для отрезков прямых следующие строки не нужны и задаются нулями;
%для эллипса 8, 9 строки определяют x и y координаты центра эллипса,
%а 10, 11 строки — его x и y полуоси (для окружности они совпадают и равны
%радиусу окружности); 12 строка определяет угол поворота эллипса вокруг
%центра против часовой стрелки (в радианах). 1)

g = [ 2     2     2     2
      Ra    Rb    Rb    Ra
      Rb    Rb    Ra    Ra
      Zmin  Zmin  Zmax  Zmax
      Zmin  Zmax  Zmax  Zmin
      1     1     1     1
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0 ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%p - массив узлов конечноэлементной сетки (столбцам соответствуют узлы):
%- первая строка - горизонтальные координаты узлов,
%- вторая строка -вертикальные координаты узлов;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%e - матрица граничных элементов на границах раздела зон (см. pdegeom):
```

```
%столбцам соответствуют граничные элементы (стороны конечных элементов, принадлежащие границам раздела зон или границе расчётной области);
%первые две строки - номера номера начальных и конечных узлов граничных элементов;
%строки 3, 4 - длина «дуги» от начала граничного сегмента до начального и конечного узла граничного элемента, отнесённая к длине «дуги» граничного сегмента;
%строка 5 - номера граничных сегментов, которым принадлежат граничные элементы;
%строки 6, 7 - номера зон, примыкающих слева и справа к граничным элементам;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%t - матрица треугольных конечных элементов (столбцам соответствуют треугольники):
%- t(1:3,ie) - глобальные номера узлов треугольника с номером ie,
%- t(4,ie) - номер зоны, которой принадлежит треугольник с номером ie.

%%%Проводим замену переменных на более читаемоудобные
%p -> nds от nodes - матрица узлов КЭ сетки
%e -> edges - матрица граничных элементов на границах раздела
%t -> fel от finite element - матрица треугольных конечных элементов
Hm = min([(Rb-Ra)/sizeFrac (Zmax-Zmin)/sizeFrac])

 [nds, edges, fel] = initmesh(g, 'Hmax', Hm);
 pdemesh(nds, edges, fel), axis equal

 qnNds     = size(nds,2);    %Всего у нас узлов
 qnEdges   = size(edges,2);  %Всего у нас рёбер
 qnFel     = size(fel,2);    %Всего у нас конечных элементов

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Формируем глобальные матрицы с информацией о напряжениях, перемещениях,
%физико-механических параметрах материала и т.д.
 glU      = zeros(qnPtsT, 2*qnNds); % перемещения u и w
 Sr       = zeros(qnPtsT, qnFel);   % радиальные напряжения
 St       = zeros(qnPtsT, qnFel);   % окружные напряжения
 Sz       = zeros(qnPtsT, qnFel);   % осевые напряжения
 S1       = zeros(qnPtsT, qnFel);   % Максимальные главные напряжения
 S3       = zeros(qnPtsT, qnFel);   % Минимальные главные напряжения
 Trz      = zeros(qnPtsT, qnFel);   % касательные напряжения

 mEpsCrR   = zeros(qnPtsT, qnFel); % деформации ползучести вдоль оси r
 mEpsCrT   = zeros(qnPtsT, qnFel); % деформации ползучести вдоль оси theta
 mEpsCrZ   = zeros(qnPtsT, qnFel); % деформации ползучести вдоль оси z
 mGamCrRZ  = zeros(qnPtsT, qnFel); % сдвиговые деформаций ползучести

 mUng      = zeros(qnPtsT, qnFel); % модуль упругости, МПа
 mNu       = zeros(qnPtsT, qnFel); % коэффициент пуассона
 mE1unlim  = zeros(qnPtsT, qnFel); % модуль высокоэластичности 1-го спектра, МПа
 mM1cr     = zeros(qnPtsT, qnFel); % модуль скорости 1-го спектра, МПа
```

```
mN01cr    = zeros(qnPtsT, qnFel); % к-т начальной релакс. вязкости 1-го спектра, МПа*час
mE2unlim  = zeros(qnPtsT, qnFel); % модуль высокоэластичности 2-го спектра, МПа
mM2cr     = zeros(qnPtsT, qnFel); % модуль скорости 2-го спектра, МПа
mN02cr    = zeros(qnPtsT, qnFel); % к-т начальной релакс. вязкости 2-го спектра, МПа*час

%Начинаем перебор каждого этапа времени
for t = 1:qnPtsT
  %Формируем глобальную матрицу жёсткости и вектор нагрузок в текущий
  %момент времени
  Kglob = zeros(2*qnNds);
  Fglob = zeros(2*qnNds,1);

  %Присваиваем физико-механические параметры материала каждому КЭ
  for e = 1:qnFel
    if fel(4,e) == 1
      mUng(t,e)      = 694 + 1251*ga + 2.908*PHI -4.498*ga*PHI; %МПа
      mNu(t,e)       = 0.3; % коэффициент пуассона
      mE1unlim(t,e)  = 228.9 + 1093*ga + 2.276*PHI -1.5*ga*PHI; %МПа
      mM1cr(t,e)     = 5.545 + 8.501*ga + 0.01283*PHI + 0.05456*ga*PHI; %МПа
      mN01cr(t,e)    = 1113 + 2398*ga + 8.877*PHI -32.64*ga*PHI; %МПа*час
      mE2unlim(t,e)  = 0;
      mM2cr(t,e)     = 0;
      mN02cr(t,e)    = 1e100; %МПа*час

    end;
  end;

  disp(fprintf(1,'Провожу расчёт НДС, шаг времени %g из %g',t,qnPtsT));

  for e = 1:qnFel
    indNds = zeros(3,1); %Номера узлов текущего КЭ
    for i = 1:3
      indNds(i) = fel(i,e);
    end;

    %Определяем координаты каждого узла КЭ
    Ri = nds(1, indNds(1));
    Rj = nds(1, indNds(2));
    Rk = nds(1, indNds(3));
    Zi = nds(2, indNds(1));
    Zj = nds(2, indNds(2));
    Zk = nds(2, indNds(3));
    %Определяем положение центра тяжести КЭ вдоль осей r и z
    r = (Ri + Rj + Rk)/3;
```

```
    z = (Zi + Zj + Zk)/3;

    EE = mUng(t,e);
    NN = mNu(t,e);

    Area   = matAreaTr(Ri,Rj,Rk,Zi,Zj,Zk);
    BB     = matBtr(r,Ri,Rj,Rk,z,Zi,Zj,Zk);
    DD     = matDtr(EE, NN);
    Kel    = BB'*DD*BB*r*Area;

    %Переносим элементы из локальной матрицы жёсткости в глобальную
    for jj = 1:3
      for ii = 1:3
        for rr = 0:1
          for cc = 0:1
            Kglob(2*indNds(jj)-rr,2*indNds(ii)-cc) = ...
              Kglob(2*indNds(jj)-rr,2*indNds(ii)-cc) + Kel(2*jj-rr,2*ii-cc);
          end; %cc = 0:1
        end; %of rr = 0:1
      end; %of ii = 1:3
    end; %of jj = 1:3

    ecrR   = mEpsCrR(t,e);
    ecrT   = mEpsCrT(t,e);
    ecrZ   = mEpsCrZ(t,e);
    gcrRZ = mGamCrRZ(t,e);
    eCR = [ecrR; ecrT; ecrZ; gcrRZ];

    Fel = BB'*DD*(eCR)*r*Area;


    %Переносим элементы из локального вектора нагрузок в глобальный
    for jj = 1:3
      for rr = 0:1
        Fglob(2*indNds(jj)-rr) = Fglob(2*indNds(jj)-rr) + Fel(2*jj-rr);
      end; %of rr = 0:1
    end; %of jj = 1:4
  end; %for e = 1:qnFel

  %Накладываем граничные условия
  for ed = 1:qnEdges
    indNodes = zeros(2,1);
    indNodes(1) = edges(1,ed);
    indNodes(2) = edges(2,ed);
    Ri = nds(1, indNodes(1));
    Rj = nds(1, indNodes(2));
```

```
  Zi = nds(2, indNodes(1));
  Zj = nds(2, indNodes(2));

  %Прикладываем вертикальную нагрузку на верхнюю грань
  if (Zi==Zmax)&&(Zj==Zmax)
    r = (Ri+Rj)/2;
    len = abs(Ri-Rj)/2;
    Fglob(2*indNodes(1)) = Fglob(2*indNodes(1)) + PrU*r*len;
    Fglob(2*indNodes(2)) = Fglob(2*indNodes(2)) + PrU*r*len;
  end;

  %Зануляем вертикальные перемещения на оси семметрии
  if (Zi==Zmin)&&(Zj==Zmin)
    for i = 1:2
      Kglob(2*indNodes(i),:) = 0;
      Kglob(:,2*indNodes(i)) = 0;
      Kglob(2*indNodes(i),2*indNodes(i)) = 1;
      Fglob(2*indNodes(i)) = 0;
    end;
  end;

  %Зануляем горизонтальные перемещния под грузом
  if (Zi==Zmax)&&(Zj==Zmax)
    for i = 1:2
      Kglob(2*indNodes(i)-1,:) = 0;
      Kglob(:,2*indNodes(i)-1) = 0;
      Kglob(2*indNodes(i)-1,2*indNodes(i)-1) = 1;
      Fglob(2*indNodes(i)-1) = 0;
    end;
  end;
end;

UU = Kglob\Fglob;

%Переносим результаты расчёта в глобальную матрицу перемещений
for i = 1:qnNds*2
  glU(t,i) = UU(i);
end

%Определяем напряжения в каждом КЭ
for e = 1:qnFel
  indNds = zeros(3,1); %Номера узлов текущего КЭ
  for i = 1:3
    indNds(i) = fel(i,e);
  end;

```

```
%Определяем координаты каждого узла КЭ
Ri = nds(1, indNds(1));
Rj = nds(1, indNds(2));
Rk = nds(1, indNds(3));
Zi = nds(2, indNds(1));
Zj = nds(2, indNds(2));
Zk = nds(2, indNds(3));
%Определяем положение центра тяжести КЭ вдоль осей r и z
r = (Ri + Rj + Rk)/3;
z = (Zi + Zj + Zk)/3;

Area  = matAreaTr(Ri,Rj,Rk,Zi,Zj,Zk);
BB    = matBtr(r,Ri,Rj,Rk,z,Zi,Zj,Zk);
DD    = matDtr(mUng(t,e), mNu(t,e));

%Переносим перемещения из глобальной матрицы в локальный вектор
Uel = zeros(6,1);
for jj = 1:3
  for rr = 0:1
    Uel(2*jj-rr) = glU(t, 2*indNds(jj)-rr);
  end; %of rr = 0:1
end; %of jj = 1:4

epsFull = BB*Uel;

ecrR  = mEpsCrR(t,e);
ecrT  = mEpsCrT(t,e);
ecrZ  = mEpsCrZ(t,e);
gcrRZ = mGamCrRZ(t,e);
epsCreep = [ecrR; ecrT; ecrZ; gcrRZ];

S = DD*(epsFull - epsCreep);
Sr(t,e)   = S(1);
St(t,e)   = S(2);
Sz(t,e)   = S(3);
Trz(t,e)  = S(4);

TTT = [ Sr(t,e)   0         Trz(t,e)
        0         St(t,e)   0
        Trz(t,e)  0         Sz(t,e)];
[RR, DD] = eig(TTT);

SS1 = DD(1,1);

if SS1<DD(2,2)
  SS1 = DD(2,2);
```

```
    elseif SS1<DD(3,3)
      SS1 = DD(3,3);
    end;

    SS3 = DD(1,1);

    if SS3>DD(2,2)
      SS3 = DD(2,2);
    elseif SS3>DD(3,3)
      SS3 = DD(3,3);
    end;

    S1(t,e)    = SS1;
    S3(t,e)    = SS3;

    if t<qnPtsT
      Eunl   = mE1unlim(t,e);
      ms     = mM1cr(t,e);
      n0s    = mN01cr(t,e);

      pe     = (Sr(t,e) + St(t,e) + Sz(t,e)) / 3;
      frs    = 3/2*(Sr(t,e) - pe) - Eunl * ecrR;
      fts    = 3/2*(St(t,e) - pe) - Eunl * ecrT;
      fzs    = 3/2*(Sz(t,e) - pe) - Eunl * ecrZ;
      frzs   = 3/2*(Trz(t,e)) - Eunl * gcrRZ;

      fmax = abs(frs);
      if fmax < abs(fts)
        fmax = abs(fts);
      end;
      if fmax < abs(fzs)
        fmax = abs(fzs);
      end;

      dt = (vTime(t+1)-vTime(t));
      mEpsCrR(t+1,e)   = mEpsCrR(t,e) + frs/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
      mEpsCrT(t+1,e)   = mEpsCrT(t,e) + fts/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
      mEpsCrZ(t+1,e)   = mEpsCrZ(t,e) + fzs/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
      mGamCrRZ(t+1,e) = mGamCrRZ(t,e) + frzs/n0s*exp(fmax/ms)*dt;
    end;
  end;%for e = 1:qnFel
end; %for t = 1:qnPtsT

toc

%Определяем главные напряжения в каждый момент времени
```

```
vMaxSr = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxSt = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxSt = zeros(qnPtsT,1);
vMinSr = zeros(qnPtsT,1);
vMaxTrz = zeros(qnPtsT,1);
vMinTrz = zeros(qnPtsT,1);

for t=1:qnPtsT
  maxSr = Sr(t,1,1);
  minSr = Sr(t,1,1);
  maxSt = Sr(t,1,1);
  minSt = Sr(t,1,1);
  maxSz = Sr(t,1,1);
  minSz = Sr(t,1,1);
  maxTrz = Sr(t,1,1);
  minTrz = Sr(t,1,1);
  maxS1 = S1(t,1,1);
  minS1 = S1(t,1,1);
  maxS3 = S3(t,1,1);
  minS3 = S3(t,1,1);


  %Заполняем матрицу с физико-механическими параметрами материала
  ind = 0;
  for l = 1:qnLayersZ
    qn = qnFeLayer(l);
    for i = 1:qn
      ind = ind+1;
      mUng(:,ind,:)      = ELayer(l);
      mNu(:,ind,:)       = nuLayer(l);
      mEunlim(:,ind,:)   = Eu1Layer(l);
      mMcr(:,ind,:)      = m1Layer(l);
      mN0cr(:,ind,:)     = n1Layer(l);

      mE2unlim(:,ind,:)  = Eu2Layer(l);
      mM2cr(:,ind,:)     = m2Layer(l);
      mN02cr(:,ind,:)    = n2Layer(l);
    end;
  end;

  for e=1:qnFel
    %for i = 1:qnFeR
      if maxSr<Sr(t,e)
        maxSr = Sr(t,e);
```

```
      end;
      if minSr>Sr(t,e)
        minSr = Sr(t,e);
      end;

      if maxSt<St(t,e)
        maxSt = St(t,e);
      end;
      if minSt>St(t,e)
        minSt = St(t,e);
      end;

      if maxSz<Sz(t,e)
        maxSz = Sz(t,e);
      end;
      if minSz>Sz(t,e)
        minSz = Sz(t,e);
      end;

      if maxTrz<Trz(t,e)
        maxTrz = Trz(t,e);
      end;
      if minTrz>Trz(t,e)
        minTrz = Trz(t,e);
      end;

      if maxS1<S1(t,e)
        maxS1 = S1(t,e);
      end;

      if minS3>S3(t,e)
        minS3 = S3(t,e);
      end;

      vMaxSr(t) = maxSr;
      vMinSr(t) = minSr;
      vMaxSt(t) = maxSt;
      vMinSt(t) = minSt;
      vMaxSz(t) = maxSz;
      vMinSz(t) = minSz;
      vMaxTrz(t) = maxTrz;
      vMinTrz(t) = minTrz;
      vMaxS1(t) = maxS1;
      vMinS1(t) = minS1;
      vMaxS3(t) = maxS3;
      vMinS3(t) = minS3;
```

```
          GlobalS1(t,GaPHI) = maxS1;
          GlobalS3(t,GaPHI) = minS3;
        %end;
    end;
end;

t = 1
vSr=zeros(qnFel,1);
vSt=zeros(qnFel,1);
vSz=zeros(qnFel,1);
vTrz=zeros(qnFel,1);
vS1=zeros(qnFel,1);
vS3=zeros(qnFel,1);
for e=1:qnFel
    vSr(e) = Sr(t,e);
    vSt(e) = St(t,e);
    vSz(e) = Sz(t,e);
    vS1(e) = S1(t,e);
    vS3(e) = S3(t,e);
    vTrz(e) = Trz(t,e);
end;
```

Глава С. Свидетельства регистрации программ ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015611906

Оптимизация толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, испытывающих температурное и силовое воздействие

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет» (РГСУ) (RU)***

Авторы: ***Языев Батыр Меретович (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Пучков Евгений Владимирович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)***

Заявка № **2014662800**

Дата поступления **10 декабря 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 февраля 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Рисунок С.1 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611906 от 09 февраля 2015 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015611914

Определение напряжённо-деформированного состояния бетонных тел цилиндрической формы под действием физических полей и механического давления

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет» (РГСУ) (RU)***

Авторы: ***Языев Батыр Меретович (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Пучков Евгений Владимирович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)***

Заявка № **2014662825**

Дата поступления **11 декабря 2014 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***09 февраля 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Рисунок С.2 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611914 от 09 февраля 2015 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018616951

Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков

Правообладатель: ***федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)***

Авторы: ***Литвинов Степан Викторович (RU), Дудник Анастасия Евгеньевна (RU), Аваков Артур Артурович (RU), Труш Любовь Ивановна (RU)***

Заявка № **2018614101**

Дата поступления **24 апреля 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 июня 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Рисунок С.3 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018616951 от 09 июня 2018 г.